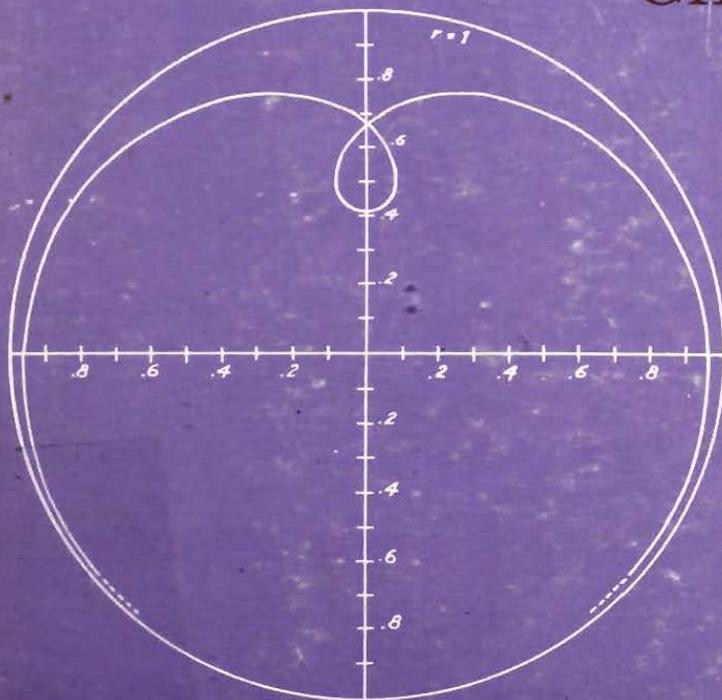


797

CARLOS  
GRAEF  
FERNÁNDEZ

OBRA  
CIENTÍFICA



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
AZCAPOTZALCO IZTAPALAPA







CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ  
OBRA CIENTÍFICA



CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ

OBRA CIENTÍFICA

*Recopilación, preámbulo e introducción*

José Luis Fernández Chapou y Alfonso Mondragón Ballesteros



AZCAPOTZALCO  
COSEI BIBLIOTECA

2893336

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
AZCAPOTZALCO IZTAPALAPA

MÉXICO, 1993

Primera edición: 1993

DR ©1993, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
Azcapotzalco Iztapalapa

ISBN 970-620-245-5

Impreso y hecho en México / Printed and made in Mexico





---

## ÍNDICE

Preámbulo	13
Introducción	15
<i>Artículos científicos</i>	
Representación de un tensor por medio de seis vectores, <i>Ingeniería XI</i> (6), 4 (1937) y <i>XI</i> (7), 25 (1937)	23
On periodic orbits in the equatorial plane of a magnetic dipole (en colaboración con S. Kusaka), <i>Journal of Mathematics and Physics XVII</i> , 43 (1938)	73
Galactic rotation and the intensity of cosmic radiation at the geomagnetic equator (en colaboración con M. Sandoval Vallarta y S. Kusaka), <i>Physical Review 55</i> , 1 (1939)	85
An analysis of periodic orbits of particles of primary cosmic radiation, tesis para recibir el grado de Doctor en Ciencias, Massachusetts Institute of Technology, 1940	90
On Birkhoff's new theory of gravitation (en colaboración con A. Barajas, G.D. Birkhoff y M. Sandoval Vallarta), <i>Physical Review 66</i> , 138 (1944)	245
Órbitas periódicas de la radiación cósmica primaria, <i>Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 1</i> , 1, 30 (1944)	251
El movimiento de los dos cuerpos en la teoría de la gravitación de Birkhoff, <i>Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 1</i> , 25 (1944)	281
La corrección bolométrica de las magnitudes de las galaxias en la cosmología birkhoffiana, <i>Anuario CICIC</i> (1945)	296
La expansión del universo en la teoría de Birkhoff, <i>Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 2</i> , 43 (1945)	312
Principios de conservación en la teoría de la gravitación de Birkhoff, <i>Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 5</i> , 7 (1948)	320
Campo gravitacional de Birkhoff de un punto masa en movimiento arbitrario en la teoría de Birkhoff, <i>Revista Mexicana de Física 1</i> , 11 (1952)	328

Principios variacionales para el movimiento de los planetas en el campo central de Birkhoff, <i>Revista Mexicana de Física II</i> , 180 (1953)	345
Campo gravitacional de un punto masa en movimiento arbitrario en la teoría de Birkhoff, <i>Memoria del Congreso Científico Mexicano</i> , UNAM, México, p. 262 (1953)	358
Estado actual de la teoría de la gravitación de Birkhoff, <i>Memoria del Congreso Científico Mexicano</i> , UNAM, México, p. 277 (1953)	373
Movimiento de una masa que aniquila su propio campo gravitacional, <i>Revista Mexicana de Física III</i> (4), 253 (1954)	376
La teoría de la gravitación de Birkhoff, <i>Cosmos y Ciencia I</i> (1), 44 (1954)	391
Las fuerzas gravitacionales de Birkhoff en el espacio físico, <i>Anales del Instituto de Física, UNAM I</i> , 35 (1955)	413
Orbits in Birkhoff's central field [en] <i>Orbit theory, Proceedings of the Symposium on Applied Mathematics</i> , American Mathematical Society, Nueva York IX, 167 (1959)	426
El gradiente del campo gravitacional de Birkhoff, <i>Revista Mexicana de Física X</i> (3), 181 (1961)	449
El hiperángulo sólido en la teoría de la relatividad especial, <i>Revista Mexicana de Física XI</i> , 129 (1962)	463
Del potencial de un punto masa a las ecuaciones del campo en la teoría de Birkhoff, <i>Revista Mexicana de Física XVI</i> , 181 (1968)	492
Primera etapa de trabajo del grupo del acelerador Van de Graaf Tandem en el Centro Nuclear de México, <i>Revista Mexicana de Física XVIII</i> , S1 (1969)	510
Primera etapa de trabajo del grupo del reactor nuclear en el Centro Nuclear de México, <i>Revista Mexicana de Física XIX</i> , S1 (1970)	517
<i>Ensayos y conferencias</i>	
El aparato de Galton, <i>Ingeniería IX</i> (5-7), 121 (1935)	525

La aceleración de Coriolis. <i>Ingeniería, IX</i> (10), 176 (1935)	530
Las geodésicas, <i>Ingeniería IX</i> (9), 164 (1935)	540
El espacio de cuatro dimensiones, <i>Ingeniería IX</i> (11 y 12), 214 (1935)	546
El principio de Hamilton, <i>Ingeniería X</i> (1), 26 (1936)	552
Las deformaciones elásticas, <i>Ingeniería XI</i> (10), 395 (1937)	557
La fundación de la Sociedad Matemática Mexicana, <i>Ingeniería XVII</i> (10), 304 (1943)	564
Afinidades morfológicas entre las matemáticas y la pintura, <i>Cuadernos Americanos</i> 6, 105 (1946)	566
Escultura y ciencia, <i>Revista de Arquitectura</i> 31, 35 (1950)	584
Espacio matemático y espacio físico, <i>Seminario de Problemas Científicos y Filosóficos</i> , Cuaderno núm. 2, UNAM, México (1955)	591
My tilt with Albert Einstein, <i>The American Scientist</i> 44, 204 (1956)	616
Alejandro de Humboldt, Seminario de Cultura Mexicana, México, 1963	624
Niels Bohr, <i>Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana</i> 8, 13 (1963)	633
The Texcoco Project [en] <i>Water Production Using Nuclear Power</i> , The University of Arizona Press, Tucson, 1966	640
Los radioisótopos como instrumento de progreso, <i>IV Simposio Panamericano de Farmacología y Terapéutica</i> , Excerpta Medica International Congress Series No. 185, agosto de 1967	650
La física (prólogo del libro <i>Física general</i> , de Salvador Mosqueira), Patria, México 1974, pp. 9-12	654

La serendipidad, Anuario de 1975 del Seminario de Cultura Mexicana, México (1975), pp. 80-87	658
Viejos episodios de la ciencia en México, <i>Naturaleza</i> 66 (5), 204 (1975)	665
Uranex llegará a tener importancia semejante a la de Pcmex, <i>Energía</i> 19 y 20, 26 (1980)	674
Reminiscencias, <i>Revista Mexicana de Física</i> 30, 599 (1984)	680
Origen y desarrollo de los aceleradores de partículas en México, <i>Memoria del Simposio sobre aceleradores de electrones en México</i> , Centro Nuclear de México, México, 1986	694
Geometría no euclídea (prólogo a "Inmersión de $R_4$ en $E_6$ ", tesis de José Luis Fernández Chapou para obtener el grado de Doctor en Ciencias), Univer- sidad Nacional Autónoma de México, 1986	703
La física, [en] <i>Setenta y cinco años de Revolución</i> , Fondo de Cultura Económica, México, 1988, vol. IV, p. 743	708
Relación entre el Instituto de Física y el Centro Nuclear de México (inédito). 1988	710

#### *Curriculum vitae*

Estudios	737
Puestos académicos y docentes	737
Cargos desempeñados	738
Cargos honoríficos	738
Honores	739
Membresía en sociedades científicas	739
Representaciones	739
Publicaciones	740

---

## PREÁMBULO

La publicación de este volumen, en el que se recoge la obra científica de don Carlos Graef Fernández, fue patrocinada por la Unidad Azcapotzalco y por el Departamento de Física de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana.

Manifetamos nuestra gratitud a las autoridades de esas instituciones, particularmente a la doctora Sylvia B. Ortega Salazar, rectora de la Unidad Azcapotzalco, y al doctor Octavio Obregón, jefe del Departamento de Física de la Unidad Iztapalapa, por su generoso apoyo para la realización de esta obra.

También queremos dejar constancia de nuestra gratitud y reconocimiento a las autoridades y al personal del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México, muy especialmente a la licenciada Catalina Nau-mis, coordinadora de la Biblioteca, y al señor Pablo Carrasco, responsable de Consulta de la misma, por su muy valiosa ayuda en la localización de muchos de los documentos que aquí se reproducen.

JOSÉ LUIS FERNÁNDEZ CHAPOU  
ALFONSO MONDRAGÓN BALLESTEROS

Ciudad de México, marzo de 1993



---

## INTRODUCCIÓN

Carlos Graef Fernández nació en Guanaceví, Durango, el 25 de febrero de 1911, y murió en la Ciudad de México el 13 de enero de 1988. Fueron sus padres Carlos Graef Ziehl y Gudelia Fernández Espinosa. En 1938 desposó a Alicia Sánchez Castell. El joven Carlos pasó su infancia y adolescencia en la Ciudad de México en donde estudió la primaria y la preparatoria en el Colegio Alemán hasta obtener el Abitur (1922-1928). Al finalizar estos estudios viajó a Alemania e ingresó al Departamento de Ingeniería Civil de la Escuela Técnica Superior de Darmstadt (1929-1930). La crisis económica lo hizo volver a México e ingresó a la Escuela Nacional de Ingenieros (1931-1933) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y a la Sección de Matemáticas y Física de la Escuela Nacional de Ciencias Físicas y Matemáticas de la misma Universidad, en donde realizó estudios de física teórica y matemáticas (1934-1937). En 1937 obtuvo la beca de la John Simon Guggenheim Memorial Foundation con la cual viajó a los Estados Unidos e ingresó al Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) en donde, después de cuatro años de estudios e investigación, obtuvo el grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de física teórica (1937-1940). También asistió a algunos de los cursos avanzados de astronomía y astrofísica en la Universidad de Harvard en 1940.

Graef Fernández inició sus múltiples e importantes tareas académicas y docentes como profesor de geometría analítica y cálculo en la Escuela Superior de Construcción de la Secretaría de Educación Pública (1934) y profesor de geometría superior en el Departamento de Física y Matemáticas de la Escuela Nacional de Ingenieros de la UNAM (1937). A su vuelta de los Estados Unidos, en 1941, fue nombrado profesor titular de física en la Facultad de Ciencias de la UNAM, cátedra que ocupó hasta su muerte. En el mismo año fue nombrado subdirector (fundador) del Observatorio Astronómico de Tonantzintla, Puebla (1941-1944). Volvió a los Estados Unidos por un breve tiempo y dio un curso de teoría de la relatividad y gravitación en la Universidad de Harvard (1944-1945). De vuelta a México fue nombrado investigador titular del Instituto de

Física de la Universidad Nacional Autónoma de México (1945-1976), y más tarde director del Instituto de Física (1945-1957) y director de la Facultad de Ciencias de la UNAM (1957-1959). También fue director fundador de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana (1974-1976).

Como investigador científico, Carlos Graef Fernández concentró su atención en dos campos de la física teórica: I. El estudio de las órbitas de las partículas cargadas de electricidad que se mueven en el campo magnético de la Tierra, y II. La teoría de la gravitación y la teoría general de la relatividad.

En 1936 fue aceptado como miembro de número de la Sociedad Científica Antonio Alzate en la que presentó su primer trabajo titulado "Representación de un tensor por medio de seis vectores", publicado ese mismo año en la revista *Ingeniería*. En este primer trabajo se anuncia su interés de medio siglo en las matemáticas y la física de la relatividad general.

A su llegada al MIT en 1937, Graef Fernández inició un intenso programa de investigación científica. Por sugerencia de Manuel Sandoval Vallarta, su asesor académico en el MIT, dirigió su atención al esclarecimiento de la teoría matemática del movimiento de las partículas cargadas de electricidad en el campo magnético de un imán o dipolo magnético, un problema cuya solución es esencial para el desarrollo de la teoría de los efectos geomagnéticos de la radiación cósmica.

En su primer trabajo, hecho en colaboración con S. Kusaka, estudió el movimiento de dichas cargas en el plano que contiene el ecuador magnético de la Tierra. Demostró que hay una infinidad de movimientos posibles en este plano. Clasificó los tipos de movimiento y logró encontrar expresiones matemáticas simples para describir las órbitas periódicas ecuatoriales. En 1938, con el propósito de determinar si la radiación cósmica que llega a la Tierra tiene su origen fuera de nuestra propia galaxia, Graef Fernández, Kusaka y Sandoval Vallarta usaron los resultados del trabajo anterior para calcular el cambio de dirección de las partículas de la radiación cósmica que se mueven en el plano del ecuador magnético terrestre y, tomando en cuenta la pequeña variación en el movimiento de la Tierra debida a la rotación de nuestra galaxia (la Vía Láctea), determinaron la variación diurna de la intensidad de la radiación cósmica que llega verticalmente a un punto del ecuador geomagnético.

En el trabajo que sería su tesis doctoral, Graef Fernández se ocupó del análisis de las órbitas periódicas en el caso general del movimiento en tres di-

mensiones. Logró reducir el problema general al estudio de las soluciones de una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, con lo que redujo la dificultad del problema a su mínima expresión. A partir de aquí demostró que hay una infinidad de movimientos posibles. Estudió la forma de las órbitas y logró clasificar los tipos de movimientos posibles con un método matemático de su invención basado en el uso de las relaciones geométricas que quedan invariantes cuando se hacen deformaciones continuas del espacio. Los resultados de esta serie de trabajos fueron publicados en cuatro artículos en las revistas *Journal of Mathematics and Physics*, *Physical Reviews* y *Mathematical Reviews* entre 1938 y 1944. A más de medio siglo de su publicación estos trabajos de Graef Fernández siguen siendo de actualidad y son citados con frecuencia por los investigadores que estudian los movimientos caóticos de los sistemas dinámicos que cumplen con el principio de reflexión en el tiempo. En 1943, Graef Fernández se reunió en México con el gran matemático estadounidense G.D. Birkhoff, quien el año anterior había propuesto una nueva teoría de la gravitación como una alternativa a la teoría de la relatividad general de Einstein. La teoría de Birkhoff tenía la virtud de ser matemáticamente más simple y de contenido físico más transparente que la teoría de Einstein, que en aquella época parecía oscura por las dificultades de interpretación inherentes a una estructura matemática que aún no había sido suficientemente desarrollada.

En un importante trabajo, hecho en 1943 en colaboración con A. Barajas, C. Graef Fernández y M. Sandoval Vallarta, Birkhoff respondió desde México a las críticas hechas por H. Weyl a su nueva teoría. La muerte, en noviembre de 1944, le impidió proseguir con el desarrollo de sus ideas sobre la gravitación. Para Graef Fernández este trabajo fue el inicio de la tarea a la que dedicaría la mayor parte de su vida activa como investigador. En diecinueve artículos, escritos entre 1944 y 1968, Graef Fernández desarrolló sistemáticamente la teoría de la gravitación propuesta por Birkhoff. Abordó y resolvió problemas tan importantes como son: los principios de conservación en la teoría; el movimiento de dos cuerpos en interacción gravitacional; el campo gravitacional que produce un punto masa en movimiento arbitrario; los principios variacionales para el movimiento de los planetas; la expansión del Universo; el movimiento de una masa que aniquila su propio campo gravitacional; del potencial de un punto masa a las ecuaciones del campo, y varios más. Estos trabajos fueron publicados en la *Revista Mexicana de Física*, el *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, los *Annals of the American Mathematical Society* y otras.

Aunque ahora casi todos los físicos admiten que la teoría de la relatividad general de Einstein es correcta y la teoría de Birkhoff ha caído en desuso, las ideas fundamentales de esta teoría, desarrolladas por Graef Fernández, tuvieron un gran alcance en su época y siguen siendo importantes hoy día pues aclaran el significado físico de las teorías de la gravitación y permiten buscar nuevos caminos para la solución de las cuestiones que aún no encuentran una respuesta satisfactoria en la teoría de Einstein.

Además de artículos científicos, Graef Fernández escribió una veintena de interesantes ensayos en los que muestra a la física y las matemáticas como una parte integral de la cultura. Entre estos destacan “Afinidades morfológicas entre las matemáticas y la pintura” [*Cuadernos Americanos* 6: 105 (1946)]; “Escultura y ciencia” [*Revista de Arquitectura* 31: 35 (1950)]; “Espacio matemático y espacio físico” [Seminarario de Problemas Científicos y Filosóficos, UNAM, núm. 2 (1955)]; “Alejandro Humboldt” [Anuario del Seminario de Cultura Mexicana (1963)]; “Niels Bohr” [*Bol. Soc. Mex. Fis.* 8: 13 (1963)]; “Mi discusión con Alberto Einstein” (*The American Scientist* 44: 204 (1956)); “Viejos episodios de la ciencia en México” (*Naturaleza* 6: 204 (1975)); “La serendipidad” [Anuario del Seminario de Cultura Mexicana (1975)]; “The Texcoco Project” en *Water Production Using Nuclear Power* [The University of Arizona Press, Tucson (1966)]; “Nuclear Power and Water Desalting Plants in Southern United States and Northwestern Mexico” [Atomic Energy Commission (1968)] y “Reminiscencias” [*Rev. Mex. Fis.* 30: 615 (1984)].

Dedicó Graef Fernández gran parte de su esfuerzo y atención al desarrollo de la ciencia y de la industria nuclear en México. En 1946 fue delegado de México ante la Comisión de Energía Atómica de las Naciones Unidas y, años más tarde, miembro de la delegación de México a las conferencias sobre los usos pacíficos de la energía atómica de las Naciones Unidas, en agosto de 1955 y septiembre de 1958.

Entre otros cargos importantes fue asesor científico coordinador de la Comisión Nacional de Energía Nuclear (1956-1963); director del Centro Nuclear de México (1964-1970); gobernador por México del Organismo Internacional de la Energía Atómica (1960-1961); delegado de México a la Conferencia sobre el Estatuto del Organismo Internacional de la Energía Atómica (1956); presidente del Grupo de Expertos en Energía Nuclear (1971-1977); coordinador general del Instituto Nacional de Energía Nuclear (1977-1978), y coordinador general de Uranio Mexicano (1980-1983). Contribuyó también a la formulación

---

y discusión de los proyectos de desalación de agua por medio de la energía nuclear como jefe de la Sección Mexicana del Grupo de Estudio sobre Desalación de Agua de Mar para el Noroeste de México y Suroeste de los Estados Unidos (1967-1970).

La distinguida carrera científica de Carlos Graef Fernández fue ampliamente reconocida; entre los muchos honores y distinciones de que fue objeto cabe mencionar el Premio Manuel Ávila Camacho del Instituto del Libro (1945), la Medalla Francisco Zarco, el Premio Nacional de Ciencias (1970), la Medalla Académica de la Sociedad Mexicana de Física y el Premio Nabor Carrillo de Ciencia y Tecnología Nucleares (1982). En 1979 la Universidad Nacional Autónoma de México lo hizo profesor emérito de la Facultad de Ciencias, y en 1978 su ciudad natal lo distinguió con el título de hijo predilecto de Guanaceví, Durango.



ARTÍCULOS CIENTÍFICOS



# Representación de un tensor por medio de seis vectores

Prof. Carlos Graef



Premiado con mención honorífica en el  
Segundo Concurso de la Escuela Nacio  
nal de Ingenieros\_\_\_\_\_

**REVISTA "INGENIERIA"**

MEXICO, D. F.  
1937

## INTRODUCCION

Los vectores y los tensores a que se refiere este estudio están localizados en un modesto espacio euclídeo de tres dimensiones. Todas las transformaciones de coordenadas efectuadas, son rotaciones de sistemas ortogonales de coordenadas cartesianas.

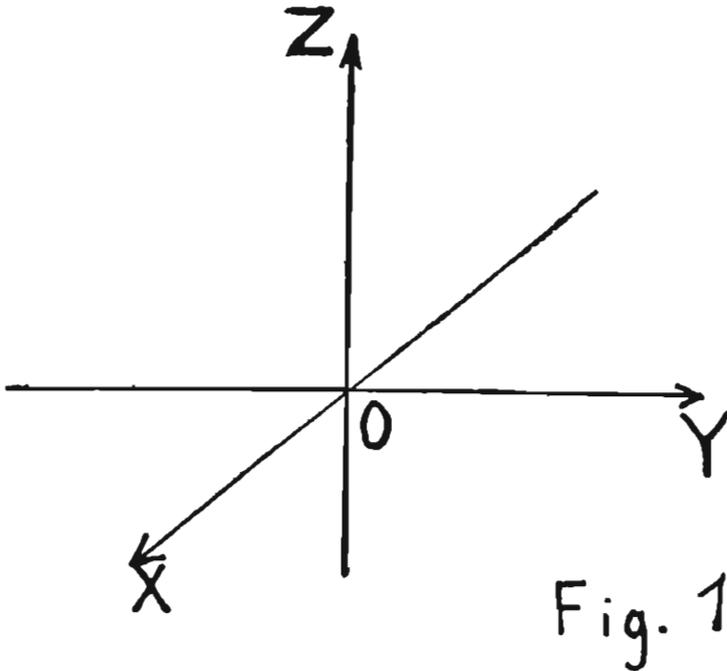
El objeto de este trabajo es, mostrar cómo se puede representar un tensor por medio de un conjunto de seis vectores.

Las operaciones del álgebra de los tensores pueden reducirse por medio de esa representación, a operaciones con conjuntos de seis vectores.

Los primeros 8 capítulos están dedicados a la exposición rápida de la notación y las convenciones, que seguí en los capítulos ulteriores.

### 1. EL SISTEMA DE REFERENCIA

Utilizo para sistema de referencia un sistema cartesiano, ortogonal y derecho. Consiste éste en tres ejes coordenados perpendiculares con un origen común. (Fig. 1).



Deben elegirse los sentidos positivos en los ejes, de manera que el sistema resulte derecho. Al elegir un sentido positivo en un eje, es dividido éste en dos rayos: un rayo positivo y un rayo negativo.

Un sistema cartesiano ortogonal, es derecho, si satisface tres condiciones: (Fig. 1).

Primera: para cualquier punto del rayo positivo OX debe ser positiva la rotación que conduce al rayo positivo OY a coincidir con el rayo positivo OZ, al girar el primer rayo un ángulo de  $90^\circ$  en torno del rayo OX.

(Las manecillas de un reloj realizan rotaciones negativas para cualquier observador colocado frente al reloj).

Segunda: para cualquier punto del rayo positivo OY debe ser positiva la rotación que conduce al rayo positivo OZ a coincidir con el rayo positivo OX— al girar el primer rayo un ángulo de  $90^\circ$  en torno del rayo OY.

Tercera: para cualquier punto del rayo positivo OZ debe ser positiva la rotación que conduce al rayo positivo OX a coincidir con el rayo positivo OY— al girar el primer rayo un ángulo de  $90^\circ$  en torno del rayo OZ.

Uso la misma unidad de longitud en los tres ejes.

## 2. LOS TRES VECTORES UNITARIOS: $i$ , $j$ , $k$ .

El vector unitario  $i$  es un vector de módulo 1, soportado por el eje de las  $x$  y con el mismo sentido que el rayo positivo OX.

El vector unitario  $j$  es un vector de módulo 1, soportado por el eje de las  $y$  y con el mismo sentido que el rayo positivo OY.

El vector unitario  $k$  es un vector de módulo 1, soportado por el eje de las  $z$  y con el mismo sentido que el rayo positivo OZ.

## 3. LAS COMPONENTES DE UN VECTOR

Designo a un vector con una letra coronada por un segmento de recta; p. e.  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ .

Únicamente en los vectores unitarios  $i$ ,  $j$  y  $k$  no sobre rayo la letra. Al módulo del vector  $\bar{v}$  lo designo con  $v$  o también con  $|\bar{v}|$ .

Entonces:

$$\text{módulo de } \bar{u} := |\bar{u}| = u$$

El símbolo  $|\bar{u}|$  se lee: “valor absoluto del vector  $\bar{u}$ ”.

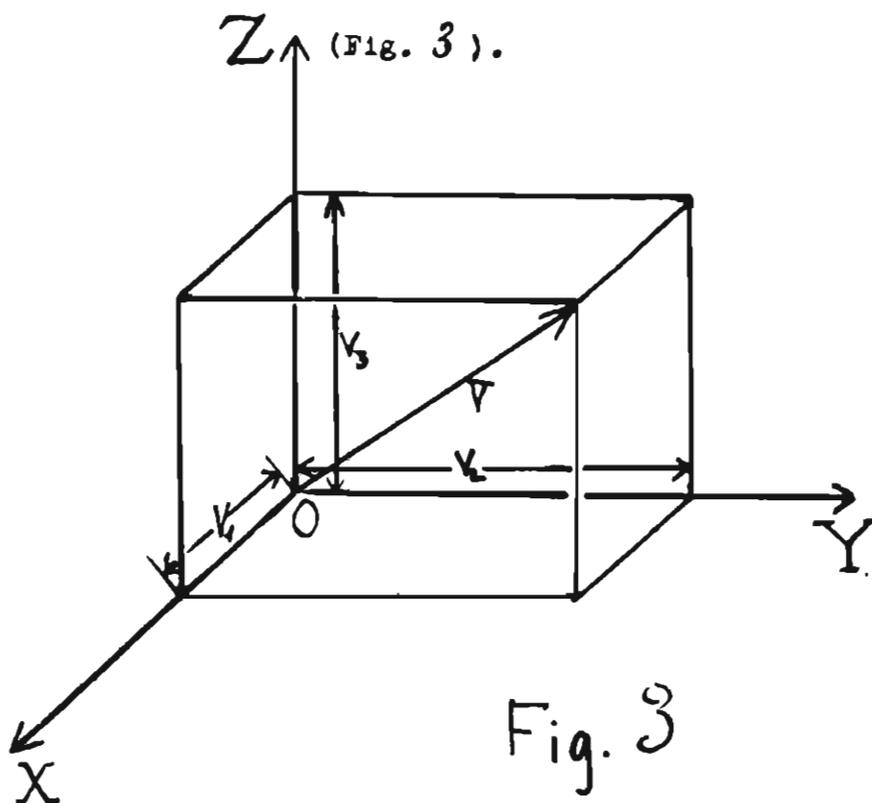
En este estudio me refiero **exclusivamente** a vectores libres.

Cualquier vector libre se puede trasladar hasta que su origen

coincida con el origen de un sistema de referencia. El extremo del vector tiene en el sistema de referencia tres coordenadas.

Las tres coordenadas del extremo de un vector son las componentes del vector para ese sistema.

A las componentes del vector  $\bar{v}$  las designo con  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ .



El vector  $\bar{v}$  se puede expresar como la suma de tres vectores ortogonales paralelos a los ejes.

$$\bar{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

Nótese que las tres componentes de un vector no son vectores.

Componente de un vector en un eje es la proyección del vector en ese eje, multiplicada por  $+1$  o por  $-1$ .

Si al recorrer la proyección de un vector en un eje a partir de la proyección de su origen hasta la proyección de su extremo, se recorre esta proyección en el sentido positivo del eje, entonces la componente del vector es igual al producto de su proyección por  $+1$ .; y si al re-

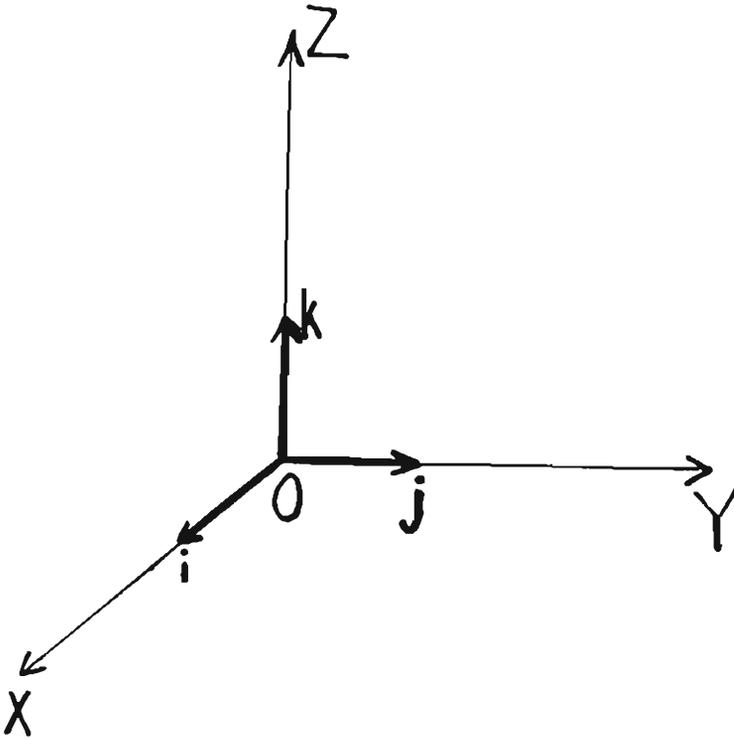


Fig. 2

correr la proyección de un vector en un eje a partir de la proyección del origen hasta la proyección del extremo, se recorre ésta, en el sentido negativo del eje, entonces la componente del vector es igual al producto de su proyección por  $-1$ .

Se acostumbra designar al vector  $\vec{v}$  por sus tres componentes, escribiendo:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

#### 4. LA NOTACION VECTORIAL

##### a) El producto escalar.

El producto escalar es un escalar función de dos vectores. Se trasladan los dos vectores, llamados factores, hasta que sus orígenes coincidan. El producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

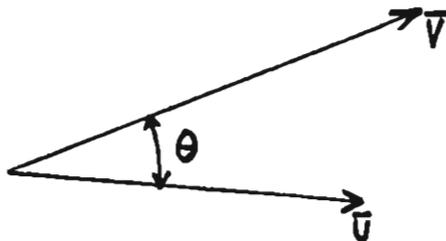


Fig. 4

El producto escalar de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se denota con  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . Por definición:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv \cos \theta$$

Con los vectores unitarios se pueden formar los siguientes nueve productos escalares:

$$\begin{array}{lll} i \cdot i = 1 & j \cdot i = 0 & k \cdot i = 0 \\ i \cdot j = 0 & j \cdot j = 1 & k \cdot j = 0 \\ i \cdot k = 0 & j \cdot k = 0 & k \cdot k = 1 \end{array}$$

De la definición del producto escalar es evidente que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ . El producto escalar es conmutativo.

El producto escalar es distributivo con respecto a la suma:

$$\bar{v} \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \bar{v} \cdot \bar{a} + \bar{v} \cdot \bar{b} + \bar{v} \cdot \bar{c}$$

El producto escalar en función de las componentes de los vectores factores:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} + u_3 \bar{k} \\ \bar{v} &= v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} + v_3 \bar{k} \\ \bar{u} \cdot \bar{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\end{aligned}$$

Se designa con  $\bar{u}^2$  al producto escalar de  $\bar{u}$  por  $\bar{u}$ .

El cuadrado de un vector  $\bar{u}$  es igual al cuadrado de su módulo.

$$\bar{u}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Formo los productos escalares de un vector  $\bar{u}$  por los vectores unitarios  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ .

$$\begin{aligned}\bar{u} \cdot \bar{i} &= u_1 \\ \bar{u} \cdot \bar{j} &= u_2 \\ \bar{u} \cdot \bar{k} &= u_3\end{aligned}$$

En general: La componente de un vector en un eje, es igual al producto escalar del vector por el vector unitario soportado por el eje, cuyo sentido es el mismo que el sentido positivo del eje.

### b) El producto vectorial.

El producto vectorial es un vector función de dos vectores. Se trasladan los dos vectores llamados factores, hasta que sus orígenes coincidan. El producto vectorial de dos vectores es un vector; su dirección es la de la perpendicular a los dos vectores factores, su módulo es igual al producto de los módulos de los dos factores por el seno del ángulo que forman y su sentido es tal, que para su extremo es positiva la rotación que conduce al primer factor o coincidir con el segundo, barriendo el primero un ángulo menor que  $180^\circ$ .

Se designa con  $\bar{u} \times \bar{v}$  al producto vectorial de los vectores  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$ .

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = uv \operatorname{sen} \theta$$

Con los vectores unitarios se pueden formar los 9 productos vectoriales:

$$\begin{array}{lll}
 i \times i = 0 & j \times i = -k & k \times i = j \\
 i \times j = k & j \times j = 0 & k \times j = -i \\
 i \times k = -j & j \times k = i & k \times k = 0
 \end{array}$$

El producto vectorial no es conmutativo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u} \cdot (-1)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

El producto vectorial es distributivo con respecto a la suma.

$$\vec{u} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{u} \times \vec{a} + \vec{u} \times \vec{b} + \vec{u} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{u} = \vec{a} \times \vec{u} + \vec{b} \times \vec{u} + \vec{c} \times \vec{u}$$

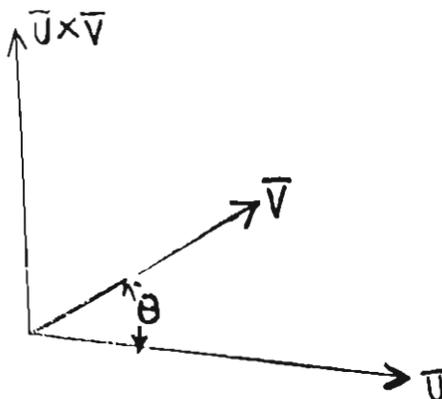


Fig. 6

El producto vectorial en función de las componentes de los vectores factores.

$$\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

$$\vec{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

### El triple producto escalar.

El triple producto escalar es un escalar, función de tres vectores.

Los tres vectores llamados factores se trasladan hasta que sus orígenes coincidan. El valor absoluto del triple producto escalar es igual al volumen del paralelepípedo, que tiene sus aristas iguales y paralelas a los tres vectores factores.

Se designa al triple producto escalar de los tres vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  con  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

La definición del triple producto escalar es:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Propiedades:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

$$(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

El triple producto escalar no se altera si se cambia el orden de sus factores, respetando el orden cíclico.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}).$$

Si se cambia el orden cíclico de los factores en un triple producto escalar, el producto resulta multiplicado por menos 1.

El triple producto escalar de los tres vectores unitarios  $i$ ,  $j$ ,  $k$  es igual a 1.

$$(i, j, k) = 1.$$

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}, \vec{e} + \vec{f}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{e}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{f}) + (\vec{a}, \vec{d}, \vec{e}) + (\vec{a}, \vec{d}, \vec{f}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{e}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{f}) + (\vec{b}, \vec{d}, \vec{e}) + (\vec{b}, \vec{d}, \vec{f})$$

## 5. DOS SISTEMAS DE REFERENCIA

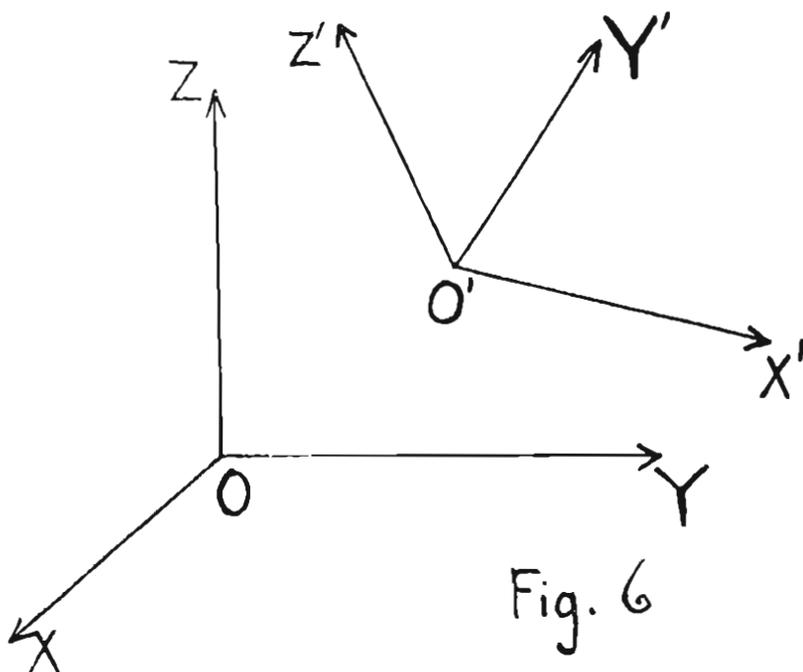
Considero dos sistemas de referencia. Cada sistema está formado por tres ejes coordenados perpendiculares. Un sistema es el  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  y el otro el  $O'X'$ ,  $O'Y'$ ,  $O'Z'$ . (Fig. 6).

Los dos sistemas son derechos.

En cada uno de los dos sistemas introduzco los tres vectores unitarios a lo largo de los ejes. (Fig. 7).

$i, j, k$  son los tres vectores unitarios del sistema  $OX, OY, OZ$ .

$i', j', k'$  son los tres vectores unitarios del sistema  $O'X', O'Y', O'Z'$ .



**Componentes de los vectores  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  en el sistema primitivo.**

A las componentes de  $i'$  en el sistema  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  las designo con  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ :

$$i' = a_{11} i + a_{12} j + a_{13} k$$

Llamo  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  y  $a_{23}$  á las componente de  $j'$  en el sistema  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ .

$$j' = a_{21} i + a_{22} j + a_{23} k$$

Designo con  $a_{31}$ ,  $a_{32}$  y  $a_{33}$  a las componentes de  $k'$ , en el sistema  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ .

$$k' = a_{31} i + a_{32} j + a_{33} k$$

Las nueve  $a_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ) no son independientes Existen entre ellas relaciones que se deducen de las propiedades de los tres vectores  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$ .

1. Propiedad de los vectores  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$ :  
El triple producto escalar  $(i', j', k') = 1$ .

2893396

1. Relación de las

$$(1) \quad (i', j', k') = \begin{matrix} & a_{mn} : \\ & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{matrix} = 1$$

2. Propiedades de los vectores  $i', j', k'$ :

Los cuadrados de los vectores son iguales a 1.

$$i'^2 = 1 \quad j'^2 = 1 \quad k'^2 = 1$$

2. Relaciones de las  $a_{mn}$ :

$$(2) \quad \begin{aligned} i'^2 &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \\ j'^2 &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \\ k'^2 &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{aligned}$$

3. Propiedades de los vectores  $i', j', k'$ :

El producto escalar de dos vectores unitarios perpendiculares es nulo:

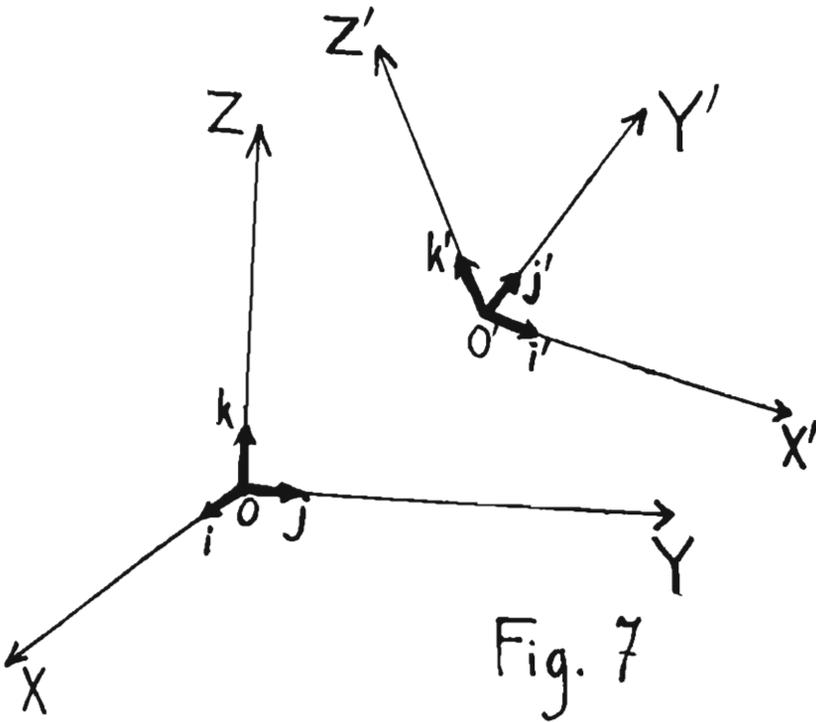
$$i' \cdot j' = 0 \quad i' \cdot k' = 0 \quad j' \cdot k' = 0$$

3. Relaciones entre las  $a_{mn}$ :

$$(3) \quad \begin{aligned} i' \cdot j' &= a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + a_{13} a_{23} = 0 \\ i' \cdot k' &= a_{11} a_{31} + a_{12} a_{32} + a_{13} a_{33} = 0 \\ j' \cdot k' &= a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} + a_{23} a_{33} = 0 \end{aligned}$$

Las relaciones (2) y (3) pueden condensarse en una breve fórmula:

$$(2.3) \quad \sum_1^3 a_{mn} a_{1n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m=1 \\ 0 & \text{si } m \neq 1 \end{cases}$$



4. Propiedades de los vectores  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$ .

$$j' \times k' = i' \quad k' \times i' = j' \quad i' \times j' = k'$$

4. Relación de las

$a_{mn}$ :

$$a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(4.1)

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \\ a_{12} &= a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} \\ a_{13} &= a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

$$a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} a_{21} &= a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} \\ a_{22} &= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \\ a_{23} &= a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} \end{aligned}$$

$$a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} a_{31} &= a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{32} &= a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ a_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Las relaciones (4.1), (4.2) y (4.3) se pueden expresar en un solo enunciado. Fijando la atención en el determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se nota que esas relaciones (4.1), (4.2) y (4.3) afirman la igualdad de cada elemento con su complemento algebraico.

Relaciones 4:

Cada elemento del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

es igual a su complemento algebraico.

#### Componente de los factores i, j, k en el sistema nuevo

La componente de un vector en un eje es igual al producto escalar de ese vector por un vector unitario soportado por el eje, cuyo sentido es el mismo que el sentido positivo del eje.

La componente de  $i$  en el eje  $OX'$  es  $i \cdot i'$

$$\begin{aligned} i' &= a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k \\ i \cdot i' &= a_{11} \end{aligned}$$

La componente de  $i$  en el eje  $OY'$  es  $i \cdot j'$ .

$$\begin{aligned} j' &= a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k \\ i \cdot j' &= a_{21} \end{aligned}$$

La componente de  $i$  en el eje  $OZ'$  es  $i \cdot k'$ .

$$\begin{aligned} k' &= a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k \\ i \cdot k' &= a_{31} \end{aligned}$$

Se deduce inmediatamente de lo anterior que

$$i = a_{11}i' + a_{21}j' + a_{31}k'$$

La componente de  $j$  en el eje  $OX'$  es  $j \cdot i'$

$$\begin{aligned} i' &= a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k \\ j \cdot i' &= a_{12} \end{aligned}$$

La componente de  $j$  en el eje  $OY'$  es  $j \cdot j'$ .

$$\begin{aligned} j' &= a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k \\ j \cdot j' &= a_{22} \end{aligned}$$

La componente de  $j$  en el eje  $OZ'$  es  $j \cdot k'$ .

$$\begin{aligned} k' &= a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k \\ j \cdot k' &= a_{32} \end{aligned}$$

El vector  $j$  se puede expresar entonces como sigue:

$$j = a_{12}i' + a_{22}j' + a_{32}k'$$

Las componentes de  $k$  en los ejes  $OX'$ ,  $OY'$  y  $OZ'$  son respectivamente  $k \cdot i'$ ,  $k \cdot j'$  y  $k \cdot k'$ .

$$i' = a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k$$

$$k \cdot i' = a_{13}$$

$$j' = a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k$$

$$k \cdot j' = a_{23}$$

$$k' = a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k$$

$$k \cdot k' = a_{33}$$

$$k = a_{13}i' + a_{23}j' + a_{33}k'$$

El vector  $k$  es entonces:

$$k = a_{13}i' + a_{23}j' + a_{33}k'$$

En resumen:

$$(5) \quad \begin{array}{ll} i' = a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k & i = a_{11}i' + a_{21}j' + a_{31}k' \\ j' = a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k & j = a_{12}i' + a_{22}j' + a_{32}k' \\ k' = a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k & k = a_{13}i' + a_{23}j' + a_{33}k' \end{array}$$

El producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Por eso:

$$i \cdot i' = 1 \cdot 1 \cos(i, i') = a_{11}$$

en que  $(i, i')$  es el ángulo que forman los vectores  $i$  e  $i'$ .

$$j \cdot j' = 1 \cdot 1 \cos(j, j') = a_{22}$$

$(j, j')$  es el ángulo que forman los vectores  $j$  e  $j'$ .

Designo con  $(\overline{u}, \overline{v})$  al ángulo que forman los vectores  $\overline{u}$  y  $\overline{v}$ , y formo los nueve productos escalares.

$$\begin{array}{lll} i \cdot i' & j \cdot j' & k \cdot k' \\ i \cdot j' & j \cdot i' & k \cdot j' \\ i \cdot k' & j \cdot k' & k \cdot i' \end{array}$$

Esos nueve productos escalares son iguales respectivamente a

$$\begin{aligned}
 i \cdot i' &= a_{11} = \cos \alpha_1(i i') \\
 i \cdot j' &= a_{21} = \cos \alpha_2(i j') \\
 i \cdot k' &= a_{31} = \cos \alpha_3(i k') \\
 j \cdot i' &= a_{12} = \cos \alpha_4(j i') \\
 j \cdot j' &= a_{22} = \cos \alpha_5(j j') \\
 j \cdot k' &= a_{32} = \cos \alpha_6(j k') \\
 k \cdot i' &= a_{13} = \cos \alpha_7(k i') \\
 k \cdot j' &= a_{23} = \cos \alpha_8(k j') \\
 k \cdot k' &= a_{33} = \cos \alpha_9(k k')
 \end{aligned}$$

Los tres cosenos

$$\cos \alpha_1(i, i'), \cos \alpha_2(j, i') \text{ y } \cos \alpha_3(k, i')$$

son los tres cosenos directores del eje  $OX'$  y del vector  $i'$  en el sistema primitivo.

$$\cos \alpha_4(i, j'), \cos \alpha_5(j, j') \text{ y } \cos \alpha_6(k, j')$$

son los cosenos directores del eje  $OY'$  y del vector  $j'$  en el sistema primitivo.

$$\cos \alpha_7(i, k'), \cos \alpha_8(j, k') \text{ y } \cos \alpha_9(k, k')$$

son los cosenos directores del eje  $OZ'$  y del vector  $k'$  en el sistema primitivo.

Los tres cosenos

$$\cos \alpha_{11}(i, i'), \cos \alpha_{12}(i, j') \text{ y } \cos \alpha_{13}(i, k')$$

son los cosenos directores del eje  $OX$  y del vector  $i$  en el sistema nuevo.

$$\cos \alpha_{21}(j, i'), \cos \alpha_{22}(j, j') \text{ y } \cos \alpha_{23}(j, k')$$

son los cosenos directores del eje  $OY$  y del vector  $j$  en el sistema nuevo.

$$\cos \alpha_{31}(k, i'), \cos \alpha_{32}(k, j') \text{ y } \cos \alpha_{33}(k, k')$$

son los cosenos directores del eje  $OZ$  y del vector  $k$  en el sistema nuevo.

Los nueve números:

$$a_{11} \ a_{12} \ a_{13}$$

$$a_{21} \ a_{22} \ a_{23}$$

$$a_{31} \ a_{32} \ a_{33}$$

forman, distribuidos en tres renglones de tres números cada renglón, la tabla de los cosenos directores.

En Cada renglón están los tres cosenos directores de un eje nuevo en el sistema primitivo, y en cada columna los tres cosenos directores de un eje primitivo en el nuevo sistema. Es conveniente colocar al principio de cada renglón el nombre del eje, cuyos cosenos directores son los tres números de ese renglón y encabezar cada columna con el nombre el eje cuyos cosenos directores son los tres números de esa columna. Se obtiene entonces el cuadro de los cosenos directores.

### CUADRO DE LOS COSENOS DIRECTORES

	OX	OY	OZ
O'X'	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
O'Y'	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
O'Z'	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

En el lugar de los símbolos de los ejes se pueden colocar los símbolos de los vectores unitarios correspondientes:

Cada uno de los tres vectores que encabezan una columna, es una función lineal y homogénea de los tres vectores que están al principio de los tres renglones; los coeficientes son los cosenos que acompañan al vector en su columna.

	i	j	k
i'	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
j'	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
k'	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

Cada uno de los tres vectores que están al principio de los renglones es una función lineal y homogénea de los tres vectores que encabezan las columnas; los coeficientes son los cosenos que acompañan al vector en su renglón.

### 6. La Transformación de las Componentes de un Vector

Utilizo los sistemas de referencia  $OX, OY, OZ$  y  $O'X', O'Y', O'Z'$ , con sus vectores unitarios  $i, j, k$  y  $i', j', k'$  respectivamente.

Un vector cualquiera  $\bar{u}$  tiene tres componentes  $u_1, u_2, u_3$  en el sistema  $OX, OY, OZ$ .

$$\bar{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

El mismo vector  $\bar{u}$  tiene también tres componentes  $u_1', u_2', u_3'$  en el sistema  $O'X', O'Y', O'Z'$ .

$$\bar{u} = u_1' i' + u_2' j' + u_3' k'$$

Los vectores  $i, j, k$  son funciones lineales y homogéneas de los vectores  $i', j', k'$  y estos son a su vez funciones lineales y homogéneas de los primeros. Utilizando esa dependencia, se pueden obtener las relaciones que hay entre los componentes  $u_1, u_2, u_3$  y  $u_1', u_2', u_3'$  del vector  $\bar{u}$ . Sustituyo en

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

los valores de  $i, j, k$  en función de  $i', j', k'$ .

$$\begin{aligned}i &= a_{11}i' + a_{21}j' + a_{31}k' \\j &= a_{12}i' + a_{22}j' + a_{32}k' \\k &= a_{13}i' + a_{23}j' + a_{33}k'\end{aligned}$$

y obtengo:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u_1(a_{11}i' + a_{21}j' + a_{31}k') + u_2(a_{12}i' + a_{22}j' + a_{32}k') + \\ &+ u_3(a_{13}i' + a_{23}j' + a_{33}k')\end{aligned}$$

Ordeno el resultado según los vectores  $i'$ ,  $j'$  y  $k'$ .

$$\begin{aligned}\bar{u} &= (a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3)i' + (a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3)j' + \\ &+ (a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3)k'\end{aligned}$$

Comparo esta expresión con

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u'_1i' + u'_2j' + u'_3k' \\ u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ u'_3 &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3\end{aligned}$$

Sustituyo en

$$\bar{u} = u'_1i' + u'_2j' + u'_3k'$$

los valores de  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  en función de  $i$ ,  $j$ ,  $k$ .

$$\begin{aligned}i' &= a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k \\ j' &= a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k \\ k' &= a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k\end{aligned}$$

y obtengo:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u'_1(a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k) + u'_2(a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k) + \\ &+ u'_3(a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k)\end{aligned}$$

Ordeno el resultado según los vectores  $i, j, k$ .

$$\bar{u} = (a_{11}u'_1 + a_{21}u'_2 + a_{31}u'_3)i + (a_{12}u'_1 + a_{22}u'_2 + a_{32}u'_3)j + (a_{13}u'_1 + a_{23}u'_2 + a_{33}u'_3)k$$

Comparo esta expresión con

$$\bar{u} = u_1i + u_2j + u_3k$$

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}u'_1 + a_{21}u'_2 + a_{31}u'_3 \\ u_2 &= a_{12}u'_1 + a_{22}u'_2 + a_{32}u'_3 \\ u_3 &= a_{13}u'_1 + a_{23}u'_2 + a_{33}u'_3 \end{aligned}$$

A las ecuaciones que expresan a  $u_1, u_2, u_3$  en función de  $u'_1, u'_2, u'_3$  y a  $u'_1, u'_2, u'_3$  en función de  $u_1, u_2, u_3$ , se les llama ecuaciones de transformación de las componentes de un vector.

Estas ecuaciones son análogas a las que expresan las relaciones entre los vectores unitarios  $i, j, k$  e  $i', j', k'$ .

Se pueden resumir también en un cuadro semejante al utilizado para los vectores unitarios:

	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$u'_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$u'_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$u'_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

Cada componente que encabeza una columna es una función lineal y homogénea de las componentes que están en los primeros lugares de

los renglones; los coeficientes son los cosenos directores que acompañan a la componente en su columna.

Cada componente que está en el primer lugar de un renglón es una función lineal y homogénea de las componentes que encabezan las columnas; los coeficientes son los cosenos directores que acompañan a la componente en su renglón.

Un vector está completamente definido en un sistema de referencia, por medio de sus tres componentes. Se puede definir un vector como sigue:

Un vector es el conjunto de tres números  $u_1, u_2, u_3$  dados en un sistema de referencia, que se transforman al cambiar de sistema según las ecuaciones:

$$\begin{aligned}U'_1 &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3 \\U'_2 &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3 \\U'_3 &= a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + a_{33} u_3\end{aligned}$$

Los coeficientes  $a_{mn}$  son los cosenos directores de los nuevos ejes en el sistema primitivo.

---

---

[Continuará en el próximo número]

## 7. LOS TENSORES

Considero dos vectores  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  en el sistema OX, OY, OZ.

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u_1 i + u_2 j + u_3 k \\ \bar{v} &= v_1 i + v_2 j + v_3 k\end{aligned}$$

Con las componentes  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ , se pueden formar los nueve productos de dos factores:

$$\begin{array}{ccc}u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3\end{array}$$

Al cambiar el sistema de referencia OX, OY, OZ por el sistema O'X', O'Y', O'Z' las componentes  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ , se transforman en  $u'_1, u'_2, u'_3, v'_1, v'_2, v'_3$ . Los nueve productos  $u_r v_s$  se transforman en otros nueve números.

Al producto  $u_r v_s$  lo designo con  $K_{rs}$ .

$$K_{rs} = u_r v_s \quad (r, s = 1, 2, 3.)$$

Al producto  $u'_r v'_s$  lo designo con  $K'_{rs}$ .

$$K'_{rs} = u'_r v'_s$$

Establezco las relaciones que hay entre las  $K'_{rs}$  y las  $K_{rs}$ .

Las ecuaciones que expresan a las  $u'_r$  en función de las  $u_r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) se pueden resumir en una:

$$u'_r = a_{r1} u_1 + a_{r2} u_2 + a_{r3} u_3 \\ (r = 1, 2, 3)$$

Del mismo modo:

$$v'_s = a_{s1} u_1 + a_{s2} u_2 + a_{s3} u_3 \\ (s = 1, 2, 3)$$

$$K'_{rs} = u'_r v'_s$$

$$K'_{rs} = (a_{r1} u_1 + a_{r2} u_2 + a_{r3} u_3) (a_{s1} v_1 + a_{s2} v_2 + a_{s3} v_3)$$

$$K'_{rs} = a_{r1} a_{s1} K_{11} + a_{r1} a_{s2} K_{12} + a_{r1} a_{s3} K_{13}$$

$$+ a_{r2} a_{s1} K_{21} + a_{r2} a_{s2} K_{22} + a_{r2} a_{s3} K_{23}$$

$$+ a_{r3} a_{s1} K_{31} + a_{r3} a_{s2} K_{32} + a_{r3} a_{s3} K_{33}$$

$$(r, s = 1, 2, 3)$$

Esta ecuación resume a las nueve ecuaciones de transformación de las  $K_{rs}$ .

Las  $K_{rs}$  pueden expresarse en función de las  $K'_{rs}$ .

$$K_{rs} = u_r v_s$$

$$K_{rs} = (a_{1r} u'_1 + a_{2r} u'_2 + a_{3r} u'_3) (a_{1s} v'_1 + a_{2s} v'_2 + a_{3s} v'_3)$$

$$K_{rs} = (a_{1r} a_{1s} K'_{11} + a_{1r} a_{2s} K'_{12} + a_{1r} a_{3s} K'_{13}$$

$$+ a_{2r} a_{1s} K'_{21} + a_{2r} a_{2s} K'_{22} + a_{2r} a_{3s} K'_{23}$$

$$+ a_{3r} a_{1s} K'_{31} + a_{3r} a_{2s} K'_{32} + a_{3r} a_{3s} K'_{33}$$

$$r, s = 1, 2, 3)$$

Las ecuaciones de transformación de las  $K_{rs}$  son entonces:

$$K_{r\bar{s}} = a_{r1} a_{s1} K_{11} + a_{r1} a_{s2} K_{12} + a_{r1} a_{s3} K_{13} +$$

$$+ a_{r2} a_{s1} K_{21} + a_{r2} a_{s2} K_{22} + a_{r2} a_{s3} K_{23} +$$

$$+ a_{r3} a_{s1} K_{31} + a_{r3} a_{s2} K_{32} + a_{r3} a_{s3} K_{33}$$

$$(r, s = 1, 2, 3)$$

$$K_{r\bar{s}} = a_{1r} a_{1s} K'_{11} + a_{1r} a_{2s} K'_{12} + a_{1r} a_{3s} K'_{13} +$$

$$+ a_{2r} a_{1s} K'_{21} + a_{2r} a_{2s} K'_{22} + a_{2r} a_{3s} K'_{23} +$$

$$+ a_{3r} a_{1s} K'_{31} + a_{3r} a_{2s} K'_{32} + a_{3r} a_{3s} K'_{33}$$

$$(r, s = 1, 2, 3)$$

Un **tensor**  $K$  es el conjunto de nueve números  $K_{rs}$  ( $r, s = 1, 2, 3$ ) dados en un sistema de referencia, que se transforman según las ecuaciones anteriores.

Dados nueve números  $K_{rs}$  ( $r, s = 1, 2, 3$ ) cualesquiera, no siempre es posible encontrar dos vectores  $u$  y  $v$  tales que siempre es posible encontrar dos vectores  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  tales que

$$K_{rs} = u_r v_s; \text{ porque } K_{rs} = u_r v_s. (r, s = 1, 2, 3)$$

es un sistema de nueve ecuaciones, y si están dadas las  $K_{rs}$  y se pretende determinar  $u_r$  y  $v_s$  se cuenta con nueve ecuaciones en seis incógnitas que en general no son compatibles.

La definición dada para el tensor incluye los conjuntos de los productos de las componentes de dos vectores, pero es mucho más amplia, porque incluye también conjuntos de nueve números que no se pueden expresar como productos de las componentes de dos vectores.

Las  $K_{rs}$  se llaman componentes del tensor  $K$  en el sistema  $OX, OY, OZ$ .

Las  $K'_{rs}$  son las componentes del tensor  $K$  en el sistema  $O'X', O'Y', O'Z'$ .

Las ecuaciones de transformación se pueden escribir de un modo comprimido como sigue:

$$K_{rs} = \sum_t^3 u_t a_{rt} a_{su} K_{tu}$$

$$K_{rs} = \sum_t^3 u_t a_{tr} a_{us} K_{tu}$$

## 8. LA SUMA DE DOS TENSORES

El tensor  $M$  es el conjunto de los nueve números  $M_{rs}$  en el sistema  $OX, OY, OZ$ .

El tensor  $N$  es el conjunto de los nueve números  $N_{rs}$  en el sistema  $OX, OY, OZ$ .

Llamo  $K_{rs}$  a la suma de  $M_{rs}$  y  $N_{rs}$

$$K_{rs} = M_{rs} + N_{rs} \quad (r, s = 1, 2, 3)$$

Al cambiar del sistema de referencia  $OX, OY, OZ$  al sistema  $O'X', O'Y', O'Z'$  se transforman las  $M_{rs}$  y  $N_{rs}$  en  $M'_{rs}$  y  $N'_{rs}$ .

Las  $K_{rs}$  se transforman en  $K'_{rs}$ .

Establezco las ecuaciones que ligan a las  $K'_{rs}$  con las  $K_{rs}$ .

$$\begin{aligned}
 M'_{rs} &= \sum_{t,u}^3 a_{rt} a_{su} M_{tu} \\
 N'_{rs} &= \sum_{t,u}^3 a_{rt} a_{su} N_{tu} \\
 K_{rs} &= \sum_{t,u}^3 a_{rt} a_{su} M_{tu} + \sum_{t,u}^3 a_{rt} a_{su} N_{tu} \\
 K'_{rs} &= \sum_{t,u}^3 a_{rt} a_{su} (M_{tu} + N_{tu}) \\
 K'_{rs} &= \sum_{t,u}^3 a_{rt} a_{su} K_{tu}
 \end{aligned}$$

Las  $K_{rs}$  se transforman como las componentes de un tensor. El conjunto  $K$  de los nueve números  $K_{rs} = M_{rs} + N_{rs}$  ( $r, s = 1, 2, 3$ ) es un tensor. Al tensor  $K$  se le llama suma de los tensores  $M$  y  $N$ .

$$K = M + N$$

## 9. EL TENSOR COMO CONJUNTO DE SEIS VECTORES

Considero los vectores  $\bar{A}$  y  $\bar{a}$ .

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= A_1 i + A_2 j + A_3 k \\
 \bar{a} &= a_1 i + a_2 j + a_3 k
 \end{aligned}$$

Con esos dos vectores formo el tensor  $K$ .

$$K_{rs} = a_r A_s \quad (r, s = 1, 2, 3)$$

Con los vectores  $\bar{B}$  y  $\bar{\beta}$

$$\begin{aligned}\bar{B} &= B_1 i + B_2 j + B_3 k \\ \bar{\beta} &= \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k\end{aligned}$$

formo el tensor L.

$$L_{rs} = \beta_r B^s \quad (r, s = 1, 2, 3)$$

Construyo el tensor M con los vectores  $\bar{C}$  y  $\bar{\gamma}$

$$\bar{C} = C_1 i + C_2 j + C_3 k$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} &= \gamma_1 i + \gamma_2 j + \gamma_3 k \\ M_{rs} &= \gamma_r C_s\end{aligned}$$

Llamo N al tensor suma de los tensores K, L y M.

$$N = K + L + M$$

El tensor N es el conjunto de los nueve números:

$$N_{rs} = \alpha_r A_s + \beta_r B_s + \gamma_r C_s$$

Elijo para  $\alpha, \beta, \gamma$  tres vectores unitarios perpendiculares. (Fig. 8).

Entonces  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) = 1$

Dados nueve números cualesquiera  $T_{rs}$  ( $r, s = 1, 2, 3$ )

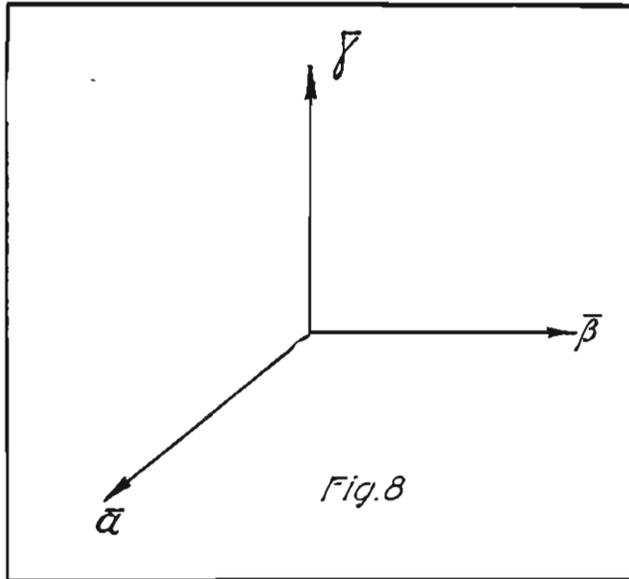
y tres vectores unitarios perpendiculares  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$   
siempre es posible determinar otros tres vectores  $\bar{A}, \bar{B},$  y  $\bar{C}$ , de modo que

$$\begin{aligned}T_{rs} &= \alpha_r A_s + \beta_r B_s + \gamma_r C_s \\ (r, s &= 1, 2, 3)\end{aligned}$$

( $r, s = 1, 2, 3$ )



2893396



Considero las tres ecuaciones:

$$T_{1s} = \alpha_1 A_s + \beta_1 B_s + \gamma_1 C_s$$

$$T_{2s} = \alpha_2 A_s + \beta_2 B_s + \gamma_2 C_s$$

$$T_{3s} = \alpha_3 A_s + \beta_3 B_s + \gamma_3 C_s$$

(s = 1, 2, 3)

Datos son las  $T_{1s}, T_{2s}, T_{3s}$ , y las  $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ .

(r = 1, 2, 3)

Como el determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) = 1$$

es diferente de cero, es siempre posible despejar de las ecuaciones a las  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ .

Al sistema de tres vectores unitarios perpendiculares  $\bar{a}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  lo llamo sistema base.

Al sistema de tres vectores unitarios perpendiculares  $i$ ,  $j$ ,  $k$  lo llamo sistema fundamental.

El sistema base y el sistema fundamental pueden coincidir.

Dado un sistema de base  $\bar{a}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  y un tensor  $T_{rs}$  ( $r, s = 1, 2, 3$ )

siempre es posible determinar tres vectores  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  y  $\bar{C}$  tales que

$$T_{rs} = \alpha_r A_s + \beta_r B_s + \gamma_r C_s$$

El tensor  $T$  se puede representar concretamente por seis vectores; los tres vectores unitarios perpendiculares  $\bar{a}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  del sistema base y los vectores  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ .

El sistema base es arbitrario; una vez fijado el sistema base están determinados unívocamente los vectores  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ . Al conjunto de los tres vectores  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  lo llamo sistema secundario.

Un tensor se puede representar por un sistema base y un sistema secundario. El sistema base es enteramente arbitrario. Utilizaré la locución "tensor referido a un sistema base".

Al cambiar el sistema base, cambia también el sistema secundario.

A los soportes de los vectores  $\bar{a}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  les llamo ejes del sistema base, y a los soportes de  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  ejes del sistema secundario.

## 10. UN VECTOR Y UN ESCALAR LIGADOS A UN TENSOR

A cualquier tensor  $T$  están ligados un vector y un escalar:

$$\begin{array}{ccc} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array}$$

Llamo  $e$  a la suma de las tres componentes de la diagonal del tensor:

$$e = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$e = (\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1) + (\alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2) + (\alpha_3 A_3 + \beta_3 B_3 + \gamma_3 C_3)$$

$$e = \bar{\alpha} \cdot \bar{A} + \bar{\beta} \cdot \bar{B} + \bar{\gamma} \cdot \bar{C}$$

El escalar  $e$  es un número independiente del sistema de referencia. El producto escalar de dos vectores  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Tanto los módulos como el ángulo, que forman los dos vectores son independientes del sistema de referencia. Por eso  $\bar{a}$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{B}$  y  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{C}$  son independientes del sistema; por eso  $e$  es independiente del sistema. Se expresa este resultado enunciando que la suma de las tres componentes  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  y  $T_{33}$  de un tensor  $T$  es un invariante. Invariante porque no cambia al cambiar el sistema de referencia.

$$e = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

es un escalar ligado al tensor  $T$ . De esta última ecuación, se deduce inmediatamente, que  $e$  es también independiente del sistema elegido. Con las componentes del tensor  $T$  formo las tres diferencias:

$$\begin{aligned} g_1 &= T_{23} - T_{32} \\ g_2 &= T_{31} - T_{13} \\ g_3 &= T_{12} - T_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_2 A_3 + \beta_2 B_3 + \gamma_2 C_3 - \alpha_3 A_2 - \beta_3 B_2 - \gamma_3 C_2 \\ g_2 &= \alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 - \alpha_1 A_3 - \beta_1 B_3 - \gamma_1 C_3 \\ g_3 &= \alpha_1 A_2 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 - \alpha_2 A_1 - \beta_2 B_1 - \gamma_2 C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 &= (\alpha_2 A_3 - \alpha_3 A_2) + (\beta_2 B_3 - \beta_3 B_2) + (\gamma_2 C_3 - \gamma_3 C_2) \\ g_2 &= (\alpha_3 A_1 - \alpha_1 A_3) + (\beta_3 B_1 - \beta_1 B_3) + (\gamma_3 C_1 - \gamma_1 C_3) \\ g_3 &= (\alpha_1 A_2 - \alpha_2 A_1) + (\beta_1 B_2 - \beta_2 B_1) + (\gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2) \end{aligned}$$

$g_1, g_2, g_3$  son las tres componentes del vector

$$\bar{v} = \bar{a} \times \bar{A} + \bar{\beta} \bar{B} + \bar{\gamma} \times \bar{C}$$

llamo  $\bar{v}$  a ese vector.  $\bar{v} = (T_{23} - T_{32}, T_{31} - T_{13}, T_{12} - T_{21})$ .

El vector  $\bar{v}$  es independiente del sistema base  $\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  elegido

Al tensor  $T$  están ligados el escalar  $\epsilon = T_{11} + T_{22} + T_{33}$   
 y el vector  $\bar{v} = (T_{23} - T_{32}, T_{31} - T_{13}, T_{12} - T_{21})$   
 Las componentes del tensor  $T$  que intervienen en la formación del  
 escalar  $\epsilon$  se les llama componentes de primera especie, y a aquellas que  
 intervienen en la formación del vector  $\bar{v}$ , componentes de segunda  
 especie.

Las componentes de primera especie son entonces  $T_{11}, T_{22}, T_{33}$  y  
 $T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{23}, T_{31}, T_{32}$  las de segunda especie.

## 11. INTERPRETACION VECTORIAL DE LA SUMA DE TENSORES.

Elijo un mismo sistema base  $\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ , para representar vectorialmen-  
 te a los tensores  $L, M$  y  $N$ .

El sistema secundario de  $L$  lo designo con  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ .

El sistema secundario de  $M$  lo designo con  $\bar{D}, \bar{E}, \bar{F}$ .

El sistema secundario de  $N$  lo designo con  $\bar{G}, \bar{H}, \bar{I}$ .

Entonces:

$$\begin{aligned} L_{rs} &= \alpha_r A_s + \beta_r B_s + \gamma_r C_s \\ M_{rs} &= \alpha_r D_s + \beta_r E_s + \gamma_r F_s \\ N_{rs} &= \alpha_r G_s + \beta_r H_s + \gamma_r I_s \\ &(r, s = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

0217081

Designo con  $S$  a la suma de los tres tensores  $L, M$  y  $N$ .

$$S_{rs} = L_{rs} + M_{rs} + N_{rs}$$

$$S_{rs} = \alpha_r [A_s + D_s + G_s] + \beta_r [B_s + E_s + H_s] + \gamma_r [C_s + F_s + I_s]$$

$$r, s = 1, 2, 3$$

El sistema secundario del tensor S es entonces:

$$\bar{A} + \bar{D} + \bar{C}, \bar{B} + \bar{E} + \bar{H}, \bar{C} + \bar{F} + \bar{I}.$$

Conviene llamar: suma de varios sistemas, de tres vectores cada sistema, al sistema que tiene por primer vector, a la suma de los primeros vectores de cada sistema; por segundo vector, a la suma de los segundos vectores de cada sistema y, por tercer vector, a la suma de los terceros vectores de cada sistema.

$$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} + \bar{D}, \bar{E}, \bar{F} + \bar{G}, \bar{H}, \bar{I} = \bar{A} + \bar{D} + \bar{G}, \\ \bar{B} + \bar{E} + \bar{H}, \bar{C} + \bar{F} + \bar{I}.$$

El resultado obtenido para la suma de varios tensores se puede expresar entonces:

La suma de varios tensores referidos al mismo sistema base, es igual a otro tensor referido a ese sistema base y con un sistema secundario igual a la suma de los sistemas secundarios de los tensores sumandos.

## 12. UN TENSOR PARTICULAR.

Considero el tensor

$$\begin{matrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{matrix}$$

en el sistema de referencia OX, OY, OZ y estudio la transformación de las componentes al cambiar el sistema.

Llamo K al tensor propuesto:

$$K_{rs} = \begin{cases} K & \text{si } r=s \\ 0 & \text{si } r \neq s \end{cases}$$

Las componentes de  $K$  en el sistema  $O'X', O'Y', O'Z'$  son:

$$K'_{rs} = \sum_t^3 a_{rt} a_{st} K_{tu} \quad (r, s = 1, 2, 3)$$

Escribo las nueve ecuaciones, teniendo en cuenta siempre que

$$K_{tu} = \begin{cases} k & \text{si } t=U \\ 0 & \text{si } t \neq U \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K'_{11} &= a_{11} a_{11} k + a_{12} a_{12} k + a_{13} a_{13} k \\ K'_{12} &= a_{11} a_{21} k + a_{12} a_{22} k + a_{13} a_{23} k \\ K'_{13} &= a_{11} a_{31} k + a_{12} a_{32} k + a_{13} a_{33} k \\ K'_{21} &= a_{21} a_{11} k + a_{22} a_{12} k + a_{23} a_{13} k \\ K'_{22} &= a_{21} a_{21} k + a_{22} a_{22} k + a_{23} a_{23} k \\ K'_{23} &= a_{21} a_{31} k + a_{22} a_{32} k + a_{23} a_{33} k \\ K'_{31} &= a_{31} a_{11} k + a_{32} a_{12} k + a_{33} a_{13} k \\ K'_{32} &= a_{31} a_{21} k + a_{32} a_{22} k + a_{33} a_{23} k \\ K'_{33} &= a_{31} a_{31} k + a_{32} a_{32} k + a_{33} a_{33} k \end{aligned}$$

De las propiedades de los cosenos directores  $a_{rs}$  se deduce que

$$\begin{array}{lll} K'_{11} = k & K'_{12} = 0 & K'_{13} = 0 \\ K'_{21} = 0 & K'_{22} = k & K'_{23} = 0 \\ K'_{31} = 0 & K'_{32} = 0 & K'_{33} = 0 \end{array}$$

Las componentes del tensor

$$\begin{array}{ccc} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{array}$$

son invariantes.

Este resultado se puede expresar también como sigue:

Las componentes del tensor  $K$  en el que

$$K_{rs} = \begin{cases} k & \text{si } r = s \\ 0 & \text{si } r \neq s \end{cases}$$

son escalares.

El tensor

$$K \ O \ O$$

$$O \ K \ O$$

$$O \ O \ K$$

tiene las mismas componentes en todos los sistemas.

De un escalar  $K$  se obtiene el tensor.

$$K \ O \ O$$

$$O \ K \ O$$

$$O \ O \ K$$

cuyas componentes son invariantes, como el escalar, al cambiar de sistema de referencia.

Represento el tensor  $K$  por sus sistemas base y secundario.

Para sistema base elijo un sistema cualquiera de vectores unitarios perpendiculares  $\bar{a}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$ . Calculo las componentes de los vectores del sistema secundario.

$$k = \alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1$$

$$0 = \alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1$$

$$0 = \alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1$$

$$A_i = \frac{\begin{vmatrix} k & \beta_i & j_i \\ 0 & \beta_2 & j_2 \\ 0 & \beta_3 & j_3 \end{vmatrix}}{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{j})} = k(\beta_2 j_3 - \beta_3 j_2) = k\alpha_i.$$

$$B_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_i & k & j_i \\ \alpha_2 & 0 & j_2 \\ \alpha_3 & 0 & j_3 \end{vmatrix}}{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{j})} = k(\alpha_3 j_2 - j_3 \alpha_2) = k\beta_i.$$

$$C_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & k \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 \end{vmatrix}}{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{j})} = k(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) = k j_i.$$

De un modo análogo, obtengo:

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 = k\alpha_1 & A_2 = k\alpha_2 & A_3 = k\alpha_3 \\ B_1 = k\beta_1 & B_2 = k\beta_2 & B_3 = k\beta_3 \\ C_1 = k j_1 & C_2 = k j_2 & C_3 = k j_3 \end{array}$$

De aquí se deduce inmediatamente que:  
tores.

$$\bar{A} = k\bar{a}, \quad \bar{B} = k\bar{\beta}, \quad \bar{C} = k\bar{j}.$$

En el tensor.

$$\begin{array}{ccc} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{array}$$

se obtiene el sistema secundario, multiplicando los tres vectores del sistema base por el escalar  $K$ .

En el tensor.

$$\begin{array}{ccc} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{array}$$

son colineales los sistemas base y secundario.

Considero un tensor cualquiera  $T$  con sus componentes.

$$\begin{array}{ccc} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array}$$

y un escalar  $K$ , con el que construyo el tensor  $K$

$$\begin{array}{ccc} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{array}$$

La suma de los dos tensores es un tensor de componentes.

$$\begin{array}{ccc} T_{11} + k & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} + k & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} + k \end{array}$$

Si se le agrega a las tres componentes de primera especie de un tensor, un mismo escalar  $K$  y si no se tocan las componentes de segunda especie, el conjunto de los nueve números que así se obtiene, sigue siendo un tensor.

Un tensor conserva su carácter tensorial, si a sus tres componentes de primera especie se les agrega un mismo escalar  $K$ .

### 13. MULTIPLICACION DE UN VECTOR POR SU TENSOR.

Definición: El producto del tensor  $T$  por el vector  $\bar{v}$ , es un vector que se designa con  $T\bar{v}$  ( $T$  por  $\bar{v}$ ) y cuyas componentes se calculan como sigue:

$$T\bar{v} = T[v_1, v_2, v_3] =$$

$$[T_{11}v_1 + T_{12}v_2 + T_{13}v_3, T_{21}v_1 + T_{22}v_2 + T_{23}v_3, T_{31}v_1 + T_{32}v_2 + T_{33}v_3]$$

Expreso el tensor  $T$  por medio de su sistema base  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  y de su sistema secundario  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ .

$$\begin{aligned} T\bar{v} = & \left[ \alpha_1 A_1 v_1 + \beta_1 B_1 v_1 + \gamma_1 C_1 v_1 + \alpha_2 A_2 v_2 + \beta_2 B_2 v_2 + \gamma_2 C_2 v_2 \right] i + \\ & \left[ \alpha_1 A_3 v_3 + \beta_1 B_3 v_3 + \gamma_1 C_3 v_3 \right. \\ & \left. + \alpha_2 A_1 v_1 + \beta_2 B_1 v_1 + \gamma_2 C_1 v_1 + \alpha_2 A_2 v_2 + \beta_2 B_2 v_2 + \gamma_2 C_2 v_2 \right] j + \\ & \left[ \alpha_3 A_1 v_1 + \beta_3 B_1 v_1 + \gamma_3 C_1 v_1 + \alpha_3 A_2 v_2 + \beta_3 B_2 v_2 + \gamma_3 C_2 v_2 \right. \\ & \left. + \alpha_3 A_3 v_3 + \beta_3 B_3 v_3 + \gamma_3 C_3 v_3 \right] k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\bar{v} = & (\alpha_1 \bar{A} \cdot \bar{v} + \beta_1 \bar{B} \cdot \bar{v} + \gamma_1 \bar{C} \cdot \bar{v}) i + \\ & (\alpha_2 \bar{A} \cdot \bar{v} + \beta_2 \bar{B} \cdot \bar{v} + \gamma_2 \bar{C} \cdot \bar{v}) j + \\ & (\alpha_3 \bar{A} \cdot \bar{v} + \beta_3 \bar{B} \cdot \bar{v} + \gamma_3 \bar{C} \cdot \bar{v}) k \end{aligned}$$

$$T\bar{v} = (\bar{A} \cdot \bar{v}) \bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot \bar{v}) \bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{v}) \bar{\gamma}$$

De la definición de la multiplicación de un tensor por un vector, se deduce inmediatamente, que los tres números que se obtienen como resultado, son independientes del sistema base que se elija para referir el tensor. De la última expresión obtenida para ese producto, se

deduce, que los tres números son las componentes de un vector. Al multiplicar un vector por un tensor, se transforma el vector en otro.

En la definición de producto, no interviene para nada el sistema base; el vector producto es independiente del sistema base que se use; podría esperarse que ese vector producto dependiese del sistema de referencia. Esta última suposición debe desecharse, porque el sistema

base  $\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  es independiente del sistema de referencia. El sistema secundario de un tensor sólo depende del sistema base y por eso es enteramente independiente del sistema de referencia. En resumen:

El producto de un tensor por un vector, es un vector independiente del sistema de referencia y del sistema base del tensor.

Para poder expresar este resultado en forma simple, es pertinente convenir en llamar a  $\bar{a}$  vector del sistema base correspondiente al vector  $\bar{A}$  del sistema secundario, y, del mismo modo, decir que a  $\bar{\beta}$  y  $\bar{\gamma}$  del sistema base corresponden respectivamente  $\bar{B}$  y  $\bar{C}$  del sistema secundario.

Llamo ejes del sistema base, a los ejes que soportan a los vectores unitarios de ese sistema y que tienen su origen en el origen del sistema y cuyo sentido coincide con el de los vectores del mismo.

A cada eje del sistema base le corresponde un vector del sistema secundario. El producto de un tensor por un vector es otro vector, cuya componente en cada eje del sistema base del tensor, es el producto escalar del vector factor por el vector del sistema secundario correspondiente a ese eje del sistema base.

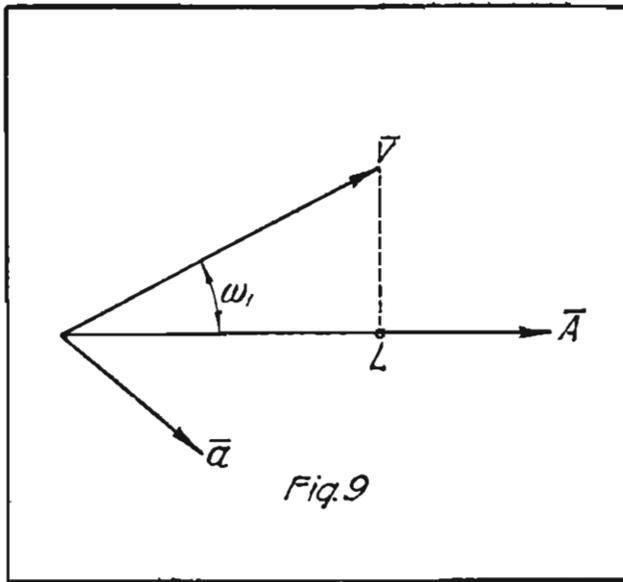
Al multiplicar un vector  $\bar{v}$  por un tensor  $T$ , el vector se transforma en otro vector  $T\bar{v}$ .

Se puede interpretar geoméricamente la transformación de  $\bar{v}$  en  $T\bar{v}$ . Considero la componente de  $T\bar{v}$  en el primer eje del sistema base; esta componente es  $(\bar{v} \cdot \bar{A})$ .

$\bar{v} \cdot \bar{A}$  es igual al producto de las longitudes de  $\bar{v}$  y de  $\bar{A}$  por el coseno del ángulo que forman: (Fig. 9).

$\bar{v}$ ,  $\bar{A}$  y  $\bar{a}$  no son coplanos en general. Llamo  $\omega_1$  al ángulo que forman  $\bar{v}$  y  $\bar{A}$ .  $[\bar{v} \cdot \bar{A}] = vA \cos \omega_1$

Proyecto el extremo del vector  $\bar{v}$  en  $\bar{A}$ . La proyección de ese extremo es  $L$ . Apoyo una circunferencia en  $L$ , el extremo de  $\bar{A}$  y el extremo de  $\bar{a}$  (Fig. 10).



Esa circunferencia corta el eje soporte de  $\bar{a}$  en M. El vector  $\overline{OM}$  es  $[\bar{v} \cdot \bar{A}] \bar{a}$ .

En el triángulo OLV':

$$OL = OV' \cos \omega_1$$

$$OL = V \cos \omega_1$$

$OL \perp A'$  y  $Ca' \perp M$  son dos secantes a una circunferencia, apoyadas en el punto O.

$$OL \cdot OA' = Od' \cdot OM$$

$$OL = V \cos \omega_1,$$

$$OA' = A$$

$$Od' = 1$$

$$V \cos \omega_1 \cdot A = 1 \cdot OM$$

$$OM = AV \cos \omega_1,$$

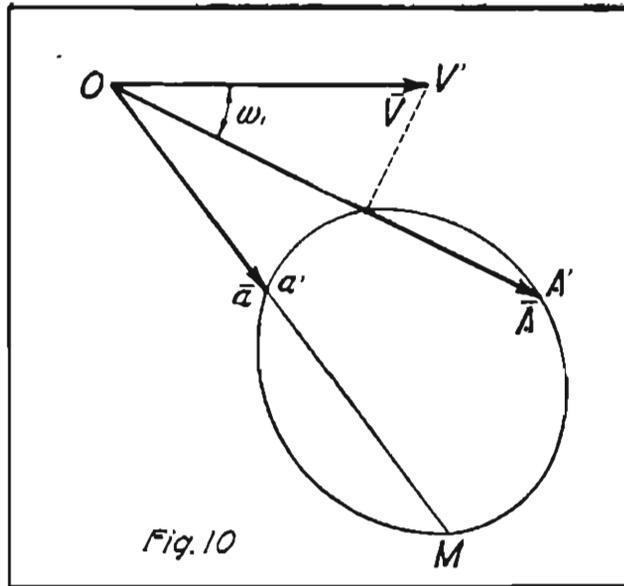


Fig. 10

El vector  $OM$  es entonces  $(\bar{v} \cdot \bar{A}) \bar{a}$ .

El producto de un tensor por un vector es un vector que se construye como sigue:

Se construyen tres circunferencias, apoyadas cada una en tres puntos. Esos tres puntos son:

- a).—El extremo de un vector del sistema secundario del tensor.
- b).—La proyección del extremo del vector factor en el eje del sistema secundario del vector elegido en a).
- c).—El extremo del vector unitario del sistema base, correspondiente al vector del sistema secundario elegido en a).

Las tres circunferencias cortan a los ejes del sistema base en tres puntos, que son las proyecciones del extremo del vector producto, en estos ejes.

El vector producto difiere en general, del vector factor en módulo y dirección.

Se puede considerar al tensor como un operador que, aplicado a los vectores, los transforma en otros.

La multiplicación de un vector por un escalar y la multiplicación de un vector por un tensor, son dos operaciones conmutativas.

$$T(m\bar{v}) = (\bar{A} \cdot m\bar{v})\bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot m\bar{v})\bar{\beta} + (\bar{C} \cdot m\bar{v})\bar{\gamma}$$

$$T(m\bar{v}) = m[(\bar{A} \cdot \bar{v})\bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot \bar{v})\bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{v})\bar{\gamma}]$$

$$T(m\bar{v}) = m(T\bar{v})$$

#### 14. MULTIPLICACION DE UNA SUMA DE VECTORES POR UN TENSOR

T es un tensor referido al sistema base  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  y con un sistema secundario  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ . Llamo  $\bar{s}$  al vector suma de los tres vectores  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ .

$$\bar{s} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$$

$$T\bar{s} = (\bar{A} \cdot \bar{s})\bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot \bar{s})\bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{s})\bar{\gamma}$$

$$T\bar{s} = (\bar{A} \cdot \bar{u} + \bar{A} \cdot \bar{v} + \bar{A} \cdot \bar{w})\bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot \bar{u} + \bar{B} \cdot \bar{v} + \bar{B} \cdot \bar{w})\bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{u} + \bar{C} \cdot \bar{v} + \bar{C} \cdot \bar{w})\bar{\gamma}$$

$$T\bar{s} = (\bar{A} \cdot \bar{u})\bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot \bar{u})\bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{u})\bar{\gamma} + (\bar{A} \cdot \bar{v})\bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot \bar{v})\bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{v})\bar{\gamma} + (\bar{A} \cdot \bar{w})\bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot \bar{w})\bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{w})\bar{\gamma}$$

$$T(\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}) = T\bar{u} + T\bar{v} + T\bar{w}$$

La multiplicación por un tensor es distributiva con respecto a una suma de vectores.

#### 15. PRODUCTO DE DOS TENSORES.

Multiplico a un vector cualquiera  $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$  por un tensor T que referido al sistema  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  tiene el sistema secundario  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ .

El producto es el vector,  $T \bar{v} = (\bar{A} \cdot \bar{v}) \bar{a} + (\bar{B} \cdot \bar{v}) \bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{v}) \bar{\gamma}$   
 Al vector producto lo multiplico por el tensor  $T'$  que referido al sistema base  $\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  tiene el sistema secundario  $\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}'$ .

El producto es el vector:

$$\begin{aligned} T'(T\bar{v}) = & [(\bar{A} \cdot \bar{v})(\bar{\alpha} \cdot \bar{A}') + (\bar{B} \cdot \bar{v})(\bar{\beta} \cdot \bar{A}') + (\bar{C} \cdot \bar{v})(\bar{\gamma} \cdot \bar{A}')] \bar{\alpha} + \\ & + [(\bar{A} \cdot \bar{v})(\bar{\alpha} \cdot \bar{B}') + (\bar{B} \cdot \bar{v})(\bar{\beta} \cdot \bar{B}') + (\bar{C} \cdot \bar{v})(\bar{\gamma} \cdot \bar{B}')] \bar{\beta} + \\ & + [(\bar{A} \cdot \bar{v})(\bar{\alpha} \cdot \bar{C}') + (\bar{B} \cdot \bar{v})(\bar{\beta} \cdot \bar{C}') + (\bar{C} \cdot \bar{v})(\bar{\gamma} \cdot \bar{C}')] \bar{\gamma} \end{aligned}$$

Este vector puede expresarse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T'(T\bar{v}) = & \{[(\bar{\alpha} \cdot \bar{A}') \bar{A} + (\bar{\beta} \cdot \bar{A}') \bar{B} + (\bar{\gamma} \cdot \bar{A}') \bar{C}] \cdot \bar{v}\} \bar{\alpha} + \\ & + \{[(\bar{\alpha} \cdot \bar{B}') \bar{A} + (\bar{\beta} \cdot \bar{B}') \bar{B} + (\bar{\gamma} \cdot \bar{B}') \bar{C}] \cdot \bar{v}\} \bar{\beta} + \\ & + \{[(\bar{\alpha} \cdot \bar{C}') \bar{A} + (\bar{\beta} \cdot \bar{C}') \bar{B} + (\bar{\gamma} \cdot \bar{C}') \bar{C}] \cdot \bar{v}\} \bar{\gamma} \end{aligned}$$

El vector  $T'(T\bar{v})$  se puede obtener directamente del vector  $\bar{v}$  multiplicando este último por un tensor, que referido al mismo sistema base  $\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  tiene por sistema secundario:

$$\begin{aligned} & (\bar{\alpha} \cdot \bar{A}') \bar{A} + (\bar{\beta} \cdot \bar{A}') \bar{B} + (\bar{\gamma} \cdot \bar{A}') \bar{C}, \\ & (\bar{\alpha} \cdot \bar{B}') \bar{A} + (\bar{\beta} \cdot \bar{B}') \bar{B} + (\bar{\gamma} \cdot \bar{B}') \bar{C}, \\ & (\bar{\alpha} \cdot \bar{C}') \bar{A} + (\bar{\beta} \cdot \bar{C}') \bar{B} + (\bar{\gamma} \cdot \bar{C}') \bar{C}. \end{aligned}$$

A este tensor, lo simbolizo con  $S$ ; se le llama producto de los dos tensores  $T'$  y  $T$  y se designa:

$$S = T' T$$

En general no es conmutativo el producto de dos tensores.

$$T' T \neq T T'$$

## 16. LOS EJES DE DILATACION DE UN TENSOR

Un tensor es un operador que, aplicado a los vectores, transforma a estos en otros vectores y, en general, difieren los vectores transformados, en dirección y longitud, de los primitivos. Me propongo analizar el siguiente problema:

¿Existen vectores en el espacio, tales, que sólo cambien de módulo y no de dirección, al aplicarles un tensor dado?

Supongo que el tensor dado está referido al sistema base  $\bar{a}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  y que tiene por sistema secundario a A, B, C.

Si el vector  $\bar{v}$  sólo sufre un cambio en el módulo, al multiplicarlo por el tensor T, entonces:

$$T \bar{v} = k \bar{v}$$

k es un escalar.

$$T \bar{v} = (\bar{A} \cdot \bar{v}) \bar{a} + (\bar{B} \cdot \bar{v}) \bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{v}) \bar{\gamma}$$

El vector  $\bar{v}$  mismo, se puede expresar en función de sus componentes en el sistema base:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= (\bar{\alpha} \cdot \bar{v}) \bar{\alpha} + (\bar{\beta} \cdot \bar{v}) \bar{\beta} + (\bar{\gamma} \cdot \bar{v}) \bar{\gamma} \\ (\bar{A} \cdot \bar{v}) \bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot \bar{v}) \bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{v}) \bar{\gamma} &= k(\bar{\alpha} \cdot \bar{v}) \bar{\alpha} + k(\bar{\beta} \cdot \bar{v}) \bar{\beta} + k(\bar{\gamma} \cdot \bar{v}) \bar{\gamma} \\ [(\bar{A} \cdot \bar{v}) - k(\bar{\alpha} \cdot \bar{v})] \bar{\alpha} + [(\bar{B} \cdot \bar{v}) - k(\bar{\beta} \cdot \bar{v})] \bar{\beta} + [(\bar{C} \cdot \bar{v}) - k(\bar{\gamma} \cdot \bar{v})] \bar{\gamma} &= 0 \\ [(\bar{A} - k\bar{\alpha}) \cdot \bar{v}] \bar{\alpha} + [(\bar{B} - k\bar{\beta}) \cdot \bar{v}] \bar{\beta} + [(\bar{C} - k\bar{\gamma}) \cdot \bar{v}] \bar{\gamma} &= 0 \end{aligned}$$

Los tres vectores  $\bar{a}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  no son coplanos y, por eso, tampoco lo son los tres sumandos de la suma anterior. La suma de tres vectores no coplanos no puede ser nula.

Solamente si cada uno de los tres vectores

$$[(\bar{A} - k \bar{a}) \cdot \bar{v}] \bar{a}, [(\bar{B} - k \bar{\beta}) \cdot \bar{v}] \bar{\beta}, [(\bar{C} - k \bar{\gamma}) \cdot \bar{v}] \bar{\gamma}$$

es de módulo nulo, puede obtenerse una suma nula para esos tres vectores. El problema propuesto se reduce a este otro:

¿Existen en el espacio vectores  $\bar{v}$  tales que

$$\begin{aligned} (\bar{A} - k \bar{a}) \cdot \bar{v} &= 0 \\ (\bar{B} - k \bar{\beta}) \cdot \bar{v} &= 0 \\ (\bar{C} - k \bar{\gamma}) \cdot \bar{v} &= 0 \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones expresan, que de existir un vector  $\bar{v}$  que sufra solamente un cambio de módulo al multiplicarlo por el tensor T, este vector  $\bar{v}$  debe ser perpendicular a los vectores:

$$\bar{A} - k \bar{a}, \bar{B} - k \bar{\beta} \text{ y } \bar{C} - k \bar{\gamma}.$$

Estos tres vectores deben ser coplanos.

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  son 6 vectores dados k debe ser tal, que

$$\bar{A} - k \bar{a}, \bar{B} - k \bar{\beta} \text{ y } \bar{C} - k \bar{\gamma}.$$

sean tres vectores coplanos.

La condición necesaria y suficiente para que eso se realice es:

$$(\bar{A} - k \bar{a}, \bar{B} - k \bar{\beta}, \bar{C} - k \bar{\gamma}) = 0$$

El triple producto escalar de los tres vectores debe ser nulo.

La condición es una ecuación en la que la única incógnita es k.

Transformo el producto escalar:

$$(\bar{A} - K \bar{a}, \bar{B} - K \bar{\beta}, \bar{C} - K \bar{\gamma}) =$$

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) - k \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}, \bar{B}, \bar{C} \\ +\bar{A}, \bar{\beta}, \bar{C} \\ +\bar{A}, \bar{B}, \bar{\gamma} \end{array} \right\} + k^2 \left\{ \begin{array}{l} (\bar{A}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \\ +(\bar{a}, \bar{B}, \bar{\gamma}) \\ +(\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{C}) \end{array} \right\} - k^3 (\bar{a}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) &= 1 \\
 (\vec{A}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) &= \vec{A} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = \vec{A} \cdot \vec{\alpha} \\
 (\vec{\alpha}, \vec{B}, \vec{\gamma}) &= -\vec{B} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma}) = \vec{B} \cdot \vec{\beta} \\
 (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{C}) &= \vec{C} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \vec{C} \cdot \vec{\gamma} \\
 k^3 - [(\vec{A} \cdot \vec{\alpha}) + (\vec{B} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{C} \cdot \vec{\gamma})]k^2 + \left[ \begin{array}{l} (\vec{\alpha}, \vec{B}, \vec{C}) \\ + (\vec{A}, \vec{\beta}, \vec{C}) \\ + (\vec{A}, \vec{B}, \vec{\gamma}) \end{array} \right]k - (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) &= 0
 \end{aligned}$$

Esta ecuación de tercer grado tiene tres raíces, de las cuales una, por lo menos, es real.

A las raíces las llamo  $k_1, k_2, k_3$ .

Estudio del caso en que las tres raíces son reales.

Existen entonces tres valores de  $k$  para los cuales

$$A - k \vec{a}, B - k \vec{\beta}, C - k \vec{\gamma}$$

son tres vectores coplanos.

Considero el caso particular para  $k_1$ .

$$A - k_1 \vec{a}, B - k_1 \vec{\beta}, C - k_1 \vec{\gamma}$$

son tres vectores coplanos.

Obtengo el vector  $\vec{v}$ .

$$\begin{aligned}
 T\vec{v} &= k_1 \vec{v} \\
 (\vec{A} \cdot \vec{v})\vec{\alpha} + (\vec{B} \cdot \vec{v})\vec{\beta} + (\vec{C} \cdot \vec{v})\vec{\gamma} &= k_1 \vec{v} \\
 [(\vec{A} - k_1 \vec{a}) \cdot \vec{v}]\vec{\alpha} + [(\vec{B} - k_1 \vec{\beta}) \cdot \vec{v}]\vec{\beta} + [(\vec{C} - k_1 \vec{\gamma}) \cdot \vec{v}]\vec{\gamma} &= 0
 \end{aligned}$$

Cualquier vector  $\vec{v}$  perpendicular al plano de los tres vectores

$$A - k_1 \vec{a}, B - k_1 \vec{\beta}, C - k_1 \vec{\gamma}$$

satisface la última ecuación.

Como

$$\kappa_1 \neq \kappa_2 \quad \kappa_1 \neq \kappa_3 \quad \kappa_2 \neq \kappa_3$$

La multiplicación de un vector por un tensor es unívoca:

$$(T\bar{\lambda}) = (\bar{A} \cdot \bar{\lambda})\bar{\alpha} + (\bar{B} \cdot \bar{\lambda})\bar{\beta} + (\bar{C} \cdot \bar{\lambda})\bar{\gamma}$$

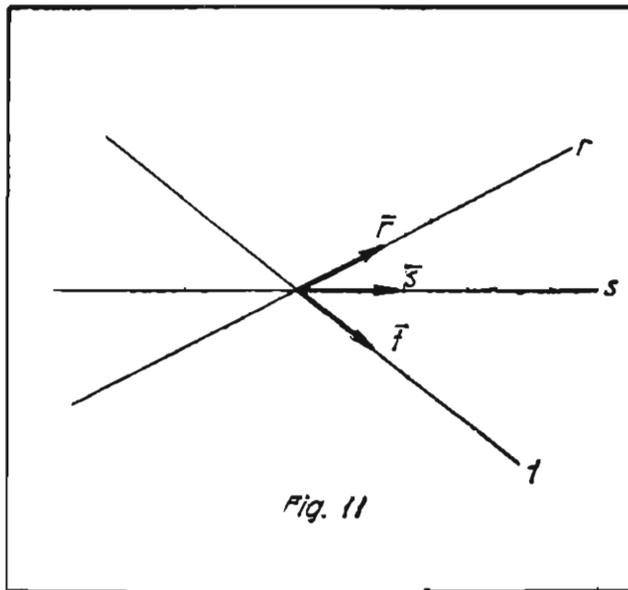
De modo que es imposible obtener dos resultados desiguales para el producto de un mismo tensor  $T$  por el vector  $\gamma$

A valores desiguales de  $k$  corresponden ejes distintos.

Los tres ejes de dilatación que corresponden a tres valores reales y desiguales de  $k$  no pueden ser coplanos.

También esta proposición la demuestro por reducción al absurdo.

Supongo que las tres rectas coplanas  $r$ ,  $s$  y  $t$ , son los tres ejes de dilatación del tensor  $T$ .  $r$  corresponde a  $k_1$ ,  $s$  corresponde a  $k_2$  y  $t$  corresponde a  $k_3$ .



Cualquier vector que sea perpendicular al plano de los tres vectores

$$\bar{A} = k_1 \bar{a}, \bar{B} = k_1 \bar{\beta}, \bar{C} = k_1 \bar{\gamma}$$

sufre únicamente un cambio de módulo, conservando su dirección, al ser multiplicado por el tensor T.

Para un tensor hay tres direcciones privilegiadas en el espacio, una para cada valor de k; todos los vectores paralelos a una de estas direcciones privilegiadas, resultan multiplicados por una misma constante, al aplicarles el tensor T. (Siempre que los valores de k sean reales).

Las tres direcciones privilegiadas, son las de los ejes de dilatación del tensor.

Un tensor arbitrario tiene uno o tres ejes de dilatación, según tenga la ecuación de tercer grado en k, una raíz real, o tres raíces reales.

Los ejes de dilatación del tensor T son paralelos a los tres vectores:

$$\begin{aligned} &(\bar{A} - k_1 \bar{\alpha}) \times (\bar{B} - k_1 \bar{\beta}) \\ &(\bar{A} - k_2 \bar{\alpha}) \times (\bar{B} - k_2 \bar{\beta}) \\ &(\bar{A} - k_3 \bar{\alpha}) \times (\bar{B} - k_3 \bar{\beta}) \end{aligned}$$

## 17. POSICIONES DE LOS EJES DE DILATACION DE UN TENSOR.

Analizo el caso en que los tres valores de k:  $k_1, k_2, k_3$  son reales y desiguales. A una misma dirección en el espacio, a un sólo eje de dilatación, no pueden corresponderle dos valores desiguales de k. Demuestro esta proposición por reducción al absurdo. Supongo que a dos valores desiguales de k:  $k_1$  y  $k_2$ , corresponden dos ejes de dilatación que coinciden. Elijo un vector  $\bar{\lambda}$  soportado por esos ejes de dilatación. Al tensor lo designo con T. Por una parte se obtiene:

$$T \bar{\lambda} = k_1 \bar{\lambda} \text{ y por otra } T \bar{\lambda} = k_2 \bar{\lambda}$$

Elijo tres vectores unitarios  $\bar{r}$ ,  $\bar{s}$ ,  $\bar{t}$ , soportados por las tres rectas  $r$ ,  $s$  y  $t$  respectivamente.

El vector  $\bar{t}$  es una combinación lineal de los vectores  $\bar{r}$  y  $\bar{s}$ .

$$\bar{t} = \xi \bar{r} + \eta \bar{s}$$

$$\xi \neq 0 \quad \eta \neq 0$$

Cualquier vector del plano de las tres rectas  $r$ ,  $s$  y  $t$ , es una combinación lineal de los vectores  $\bar{r}$  y  $\bar{s}$ .

Designo con  $\bar{u}$  a un vector de ese plano:

$$\bar{u} = \rho \bar{r} + \sigma \bar{s}$$

$\bar{u}$  se puede expresar también como combinación lineal de los vectores  $\bar{r}$ ,  $\bar{s}$  y  $\bar{t}$ .

$$\bar{u} - m\bar{t} + m\bar{t} = \bar{u}$$

$$\bar{u} = \rho \bar{r} + \sigma \bar{s} - m(\xi \bar{r} + \eta \bar{s}) + m\bar{t}$$

$$\bar{u} = (\rho - m\xi) \bar{r} + (\sigma - m\eta) \bar{s} + m\bar{t}$$

Aplicar el tensor  $T$  al vector  $\bar{r}$  equivale a multiplicar a  $\bar{r}$  por el escalar  $k_1$ .

$$T\bar{r} = k_1 \bar{r}$$

$$T\bar{s} = k_2 \bar{s}$$

$$T\bar{t} = k_3 \bar{t}$$

$$T\bar{u} = k_1(\rho - m\xi) \bar{r} + k_2(\sigma - m\eta) \bar{s} + k_3 m\bar{t}$$

La descomposición del vector  $\bar{u}$ , según las tres direcciones  $\bar{r}$ ,  $\bar{s}$  y  $\bar{t}$  no es unívoca. El escalar  $m$  es enteramente arbitrario.

$$\bar{u} = (\rho - n\xi)\bar{r} + (\sigma - n\eta)\bar{s} + n\bar{t}$$

y entonces

$$T\bar{u} = k_1(\rho - n\xi)\bar{r} + k_2(\sigma - n\eta)\bar{s} + k_3 n\bar{t}$$

El producto del tensor  $T$  por el vector  $\bar{u}$  es un vector único, bien determinado.

Por un lado obtuve:

$$T\bar{u} = k_1(\rho - m\xi)\bar{r} + k_2(\sigma - m\eta)\bar{s} + k_3 m(\xi\bar{r} + \eta\bar{s}),$$

$$T\bar{u} = (k_1\rho - k_1 m\xi + k_3 m\xi)\bar{r} + (k_2\sigma - k_2 m\eta + k_3 m\eta)\bar{s}$$

y por otro lado:

$$T\bar{u} = k_1(\rho - n\xi)\bar{r} + k_2(\sigma - n\eta)\bar{s} + k_3 n(\xi\bar{r} + \eta\bar{s})$$

$$T\bar{u} = (k_1\rho - k_1 n\xi + k_3 n\xi)\bar{r} + (k_2\sigma - k_2 n\eta + k_3 n\eta)\bar{s}$$

La descomposición del vector  $T\bar{u}$  según las dos direcciones  $\bar{r}$  y  $\bar{s}$ , sí es unívoca.

$$k_1\rho + m\xi(k_3 - k_1) = k_1\rho + n\xi(k_3 - k_1)$$

$$k_2\sigma + m\eta(k_3 - k_1) = k_2\sigma + n\eta(k_3 - k_2)$$

Como tanto  $\xi$  como  $\eta$  son diferentes de cero.

$$\begin{aligned}m(k_3 - k_1) &= n(k_3 - k_1) \\m(k_3 - k_2) &= n(k_3 - k_2)\end{aligned}$$

Las diferencias  $k_3 - k_1$  y  $k_3 - k_2$  son diferentes de cero. Los escalares  $m$  y  $n$  son **enteramente** arbitrarios. Las dos últimas ecuaciones son absurdas.

Hay una infinidad de parejas de valores de  $m$  y  $n$  que contrarían esas ecuaciones, que debían quedar satisfechas para todas esas parejas.

$$\text{Si } k_2 \neq k_3 \text{ y } k_3 \neq k_1$$

entonces los tres ejes de dilatación no son coplanos.



## ON PERIODIC ORBITS IN THE EQUATORIAL PLANE OF A MAGNETIC DIPOLE

BY C. GRAEF\* AND S. KUSAKA

The periodic circular orbit in the equatorial plane of a magnetic dipole is well known. Störmer<sup>1</sup> discovered that in the meridian plane there is an infinity of periodic motions, among which may be distinguished the pair of periodic orbits which have the property of intersecting the equator at right angles (principal periodic orbits). Lemaître and Vallarta<sup>2</sup> then showed that these do not exist for all values of  $2\gamma_1$ , the axial component of the angular momentum of the particle at infinity; but only in the range (in appropriate units)  $0.783 < \gamma_1 < 1$ . The lower limit was later refined by Lemaître<sup>3</sup> to 0.78856. The value  $\gamma_1 = 1$  corresponds to the periodic circular orbit in the equatorial plane, while for the value 0.78856 the two principal periodic orbits collapse together and then vanish. For values of  $\gamma_1 > 1$  the outer principal orbit vanishes, but the inner orbit continues to exist. It seems that the outer orbit has collapsed into the equator, but from general theorems of Poincaré it is known that periodic orbits can only vanish in pairs, and therefore that companion orbit to the inner orbit should still exist. The present paper presents an attempt to calculate the periodic orbits in the equatorial plane. It will be shown that there is a bounded region of motion only for  $\gamma_1 \geq 1$  and that in the bounded region closed periodic orbits exist for a denumerable set of values of  $\gamma_1 > 1$ , while for all other values of  $\gamma_1 > 1$  the motion is conditioned periodic. For any value of  $\gamma_1$  the motion is unbounded in the unbounded region of motion. Several properties of these equatorial orbits will be established and the asymptotic motions will be investigated.

**The Equations of Motion and the General Integral.** The equations of motion, in polar coordinates, of a charged particle in the equatorial plane of a magnetic dipole are

\* Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

<sup>1</sup> C. Störmer, *Zeits. f. Astrophys.*, *1*, 237 (1930).

<sup>2</sup> G. Lemaître and M. S. Vallarta, *Phys. Rev.*, *43*, 87 (1933).

<sup>3</sup> G. Lemaître, *Ann. de la Soc. Sci. de Bruxelles, A* *64*, 194 (1934).

$$\frac{m}{qM} \left\{ \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{m}{qM} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (2)$$

where  $M$  is the moment of the dipole,  $q$  the charge, and  $m$  the relativistic mass of the particle. From the conservation of kinetic energy we have

$$\left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = v^2 \quad (3)$$

It is convenient to use the normalized coordinates introduced by Störmer

$$\rho = c_1 r \quad (4)$$

$$v dt = c_1 ds \quad (5)$$

where

$$c_1 = \sqrt{\frac{M|q|}{mv}} \quad (6)$$

The physical significance of  $c_1$  is that it is the radius of the periodic circular orbit. In these units equations (1), (2), and (3) become

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - r \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{ds} \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds} \quad (8)$$

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 1 \quad (9)$$

Equation (8) can be integrated immediately to give

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{r} = 2\gamma_1 \quad (10)$$

where  $2\gamma_1$  is a constant which can have all values from  $-\infty$  to  $+\infty$ . Its meaning, apparent from (10), is the moment of momentum of the particle in the equatorial plane, at infinity. From equations (9) and (10) we get

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 1 - \frac{4\gamma_1^2}{r^2} + \frac{4\gamma_1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \quad (11)$$

The differential equation of the trajectory obtained by eliminating  $s$  between (10) and (11) is

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \left(2\gamma_1 - \frac{1}{r}\right)^2 = r^4 - 4\gamma_1 r^2 + 4\gamma_1 r - 1 \quad (12)$$

and this gives the integral

$$\varphi = \pm \int \frac{\left(2\gamma_1 - \frac{1}{r}\right) dr}{\sqrt{r^4 - 4\gamma_1^2 r^2 + 4\gamma_1 r - 1}} + C \quad (13)$$

The possibility of two signs shows that the trajectory is symmetric about a certain radial line. In the sequel we restrict our attention to one of these symmetrical branches and shall only keep the positive sign. The integral can be simplified by introducing a new variable  $y$  defined by

$$y^2 = 1 + \frac{2\gamma_1}{r} - \frac{1}{r^2} \quad (14)$$

Equation (13) then becomes

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}} \mp \frac{\gamma_1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} I + c \quad (15)$$

where

$$I = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{1 + \gamma_1^2}\right)}} \quad (16)$$

and the choice of the sign in (15) is determined by the choice in

$$r = \frac{1}{\gamma_1^2 \pm \sqrt{\gamma_1^2 + 1 - y^2}} \quad (17)$$

which is obtained from (14).

The intrinsic equation of motion has a particularly simple form. Since the force always acts perpendicular to the direction of motion,

$$m\kappa v^2 = v \frac{|q| M}{\rho^3} \quad (18)$$

where  $\kappa$  is the curvature. In normalized coordinates this becomes

$$\kappa_1 = \frac{1}{r^3} \quad (19)$$

Now from Euler's relation

$$\frac{1}{\kappa_1} = \pm r \frac{dr}{dp} \quad (20)$$

where  $p$  is the perpendicular from the pole to the tangent to the trajectory, and the positive (negative) sign is taken when the pole and the center of curvature lie on the same (opposite) side of the tangent. Thus we get

$$\pm \frac{dr}{dp} = r^2 \quad (21)$$

which gives the integral

$$\pm p + \frac{1}{r} = c \quad (22)$$

In order to relate this integral to (15) and (17) we note from (17) that the minimum value of  $r$  is  $\frac{1}{\gamma_1 + \sqrt{1 + \gamma_1^2}}$  and at this point  $r = p$  so we have  $c = 2\gamma_1$  and (22) becomes

$$\pm p + \frac{1}{r} = 2\gamma_1 \quad (23)$$

It is interesting to note that Weyr has investigated plane curves with the property such that the passage of a unit current along the curve of given length joining two given points will produce at a third point in the plane of the curve a maximum magnetic intensity. He found that these curves have the property that the radius of curvature is proportional to the cube of the radius vector. Loria<sup>4</sup> has called these curves the electromagnetic curves of Emil Weyr. We have seen that the trajectories of the charged particles in the equatorial plane have this property so that they are Weyr curves.

First case  $\gamma_1 < 1$

To express  $\varphi$  as an elliptic integral we must consider the cases  $\gamma_1 < 1$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_1 > 1$  separately. For  $\gamma_1 < 1$  we put

$$\frac{y}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} = \sin \psi \quad (24)$$

then

$$I = \sqrt{1 + \gamma_1^2} F(\alpha, \psi) \quad (25)$$

<sup>4</sup> G. Loria, *Spezielle Algebraische und Transzendente Ebenen Kurven II*, p. 220.

where  $F(\alpha, \psi)$  denotes the elliptic integral of the first kind and

$$\sin \alpha = k = \sqrt{\frac{1 + \gamma_1^2}{2}} \quad (26)$$

Hence (15) and (17) give

$$\varphi = \sin(k \sin \psi) \mp \frac{\gamma_1}{\sqrt{2}} F(\alpha, \psi) + c \quad (27)$$

and

$$r = \frac{1}{\gamma_1 \pm \sqrt{1 + \gamma_1^2} \cos \psi} \quad (28)$$

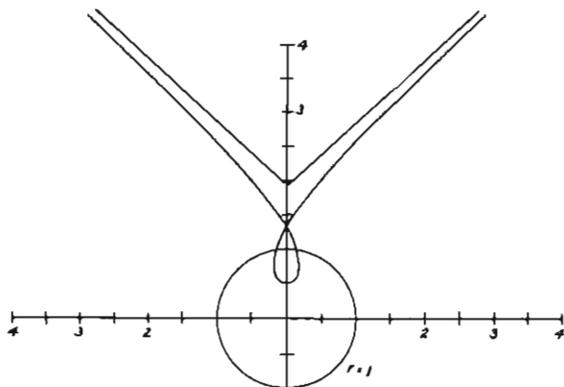


FIG. 1. AN UNBOUNDED ORBIT  $\left(\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

In this case it is immaterial which set of signs is chosen; we shall take the lower set. Equations (27) and (28) are the parametric equations of the trajectory.

From (28) we see that  $r$  takes on all values greater than  $\frac{1}{\gamma_1 + \sqrt{1 + \gamma_1^2}}$  so the trajectories are unbounded. These trajectories have asymptotes whose directions are obtained by putting

$$\psi = \cos^{-1} \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \text{ and } \psi = 2\pi - \cos^{-1} \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \quad (29)$$

in (27), and whose distance from the pole is  $2\gamma_1$ , obtained by putting  $r = \infty$  in (23). Figure 1 shows the form of the trajectory for  $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$ .

Second case  $\gamma_1 = 1$

In this case

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dy}{1 - \frac{y^2}{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + y}{\sqrt{2} - y}
 \end{aligned} \tag{30}$$

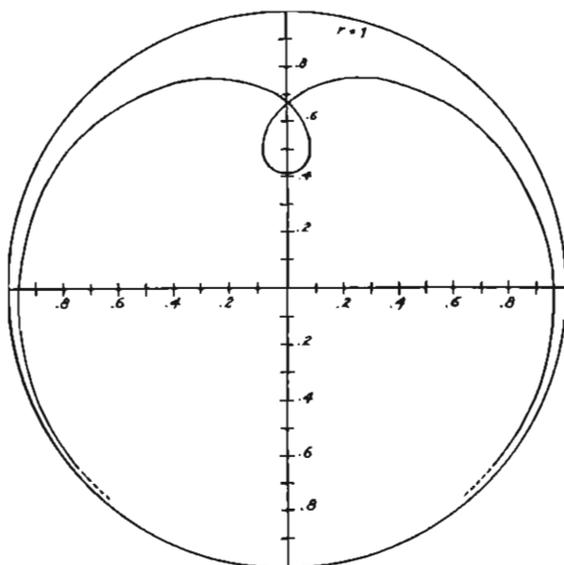


FIG. 2. DOUBLY ASYMPTOTIC ORBIT ( $\gamma_1 = 1$ )

Hence

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}} \mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + y}{\sqrt{2} - y} + c \tag{31}$$

and

$$r = \frac{1}{1 \pm \sqrt{2 - y^2}} \tag{32}$$

The two sets of signs give trajectories outside and inside the unit circle. Since from (31) and (32)  $\varphi$  becomes infinite as  $r$  approaches unity, and since the speed is constant, the particle takes infinite time to reach the unit circle. The bounded orbit is doubly asymptotic to the

unit circle, as shown in Figure 2, and the unbounded orbit (external to the circle  $r = 1$ ) is asymptotic to the unit circle and to a straight line.

Third case  $\gamma_1 > 1$

Here we put

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \sin \psi \quad (33)$$

then

$$I = \sqrt{2} F(\alpha, \psi) \quad (34)$$

where

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{1 + \gamma_1^2}} \quad (35)$$

Hence

$$\varphi = \psi \mp \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} F(\alpha, \psi) + c \quad (36)$$

and

$$r = \frac{1}{\gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 + 1 - 2 \sin^2 \psi}} \quad (37)$$

From (37) we see that the allowed values of  $r$  are

$$\frac{1}{\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 1}} \leq r \leq \frac{1}{\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 - 1}}$$

and

$$r \geq \frac{1}{\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 - 1}}$$

Thus there are bounded and unbounded orbits given by the two sets of signs.

The latter consist of periodic and conditioned periodic orbits and the values of  $\gamma_1$  which give the periodic orbits form a set of measure zero. To see this, we note that an orbit will be periodic if the periods of  $r$  and  $\varphi$  are commensurable. From (36) and (37) we see that this condition is expressed by the equation

$$\frac{\frac{\gamma_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} F(\alpha, \pi) - \pi}{\pi} = 2 \frac{t}{l} \quad (38)$$

where  $t$  and  $l$  are whole numbers. If they have no common divisor,  $l$  and  $t$  refer to the number of loops and the number of turns respectively in a complete period. If they have a common divisor  $d$ , then  $t$  and  $l$  are the total numbers of turns and loops respectively of a set of  $d$  identical orbits. There is a one to one correspondence between the values of  $t/l$  and  $\gamma_1$  since  $t/l$  is a monotonic function of  $\gamma_1$ . This can

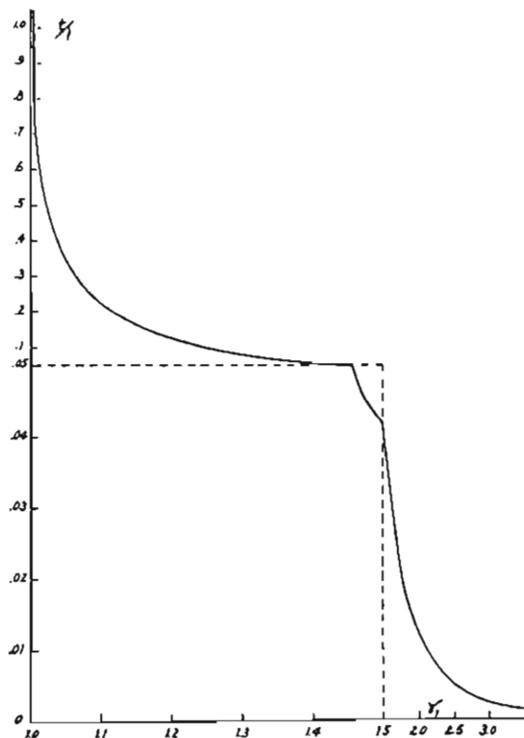


FIG. 3. RELATION BETWEEN  $t/l$  AND  $\gamma_1$

be seen from the graph of relation (38) in Figure 3 or analytically as follows: (38) can be written in the form

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_1^2} \cos 2\psi}} - 1 = \frac{2l}{t} \quad (39)$$

This is the same as

$$\frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_1^2} \cos 2\psi}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \cos 2\psi}} \right] - 1 = \frac{2l}{l} \quad (40)$$

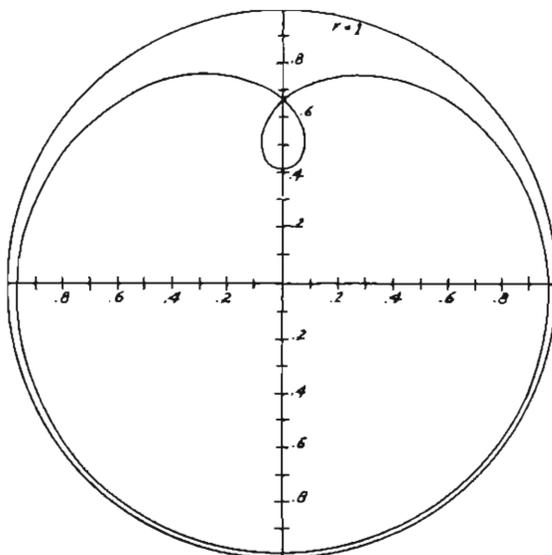


FIG. 4. PERIODIC ORBIT WITH  $l = 1$ ,  $l = 1$  ( $\gamma_1 = 1.000025$ )

Hence

$$\frac{d}{d\gamma_1} \left( \frac{l}{l} \right) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\gamma_1^3} \cos 2\psi d\psi}{\left(1 + \frac{1}{\gamma_1^2} \cos 2\psi\right)^{3/2}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\gamma_1^3} \cos 2\psi d\psi}{\left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \cos 2\psi\right)^{3/2}} \right] \quad (41)$$

Now the integrand of the first integral is never greater than the integrand of the first so that  $d(l/l)/d\gamma_1$  is never positive. Thus  $l/l$  is a monotonic decreasing function of  $\gamma_1$ . Further, for any positive rational number  $l/l$  there is a  $\gamma_1$  satisfying (38) so that in the range

$$\gamma_1' - \epsilon < \gamma_1 < \gamma_1' + \epsilon \quad (\gamma_1 > 1)$$

there are always an infinite number of values of  $\gamma_1$  for which the orbits are periodic no matter how small  $\epsilon$  may be. Therefore the values of  $\gamma_1$  corresponding to the periodic orbits form a denumerable set. Figures 4 and 5 illustrate the orbits with 1 loop and 1 turn, 10 loops and 1 turn, respectively. Table 1 gives the values of  $\gamma_1$  of periodic orbits for a few values of  $l/l$ .

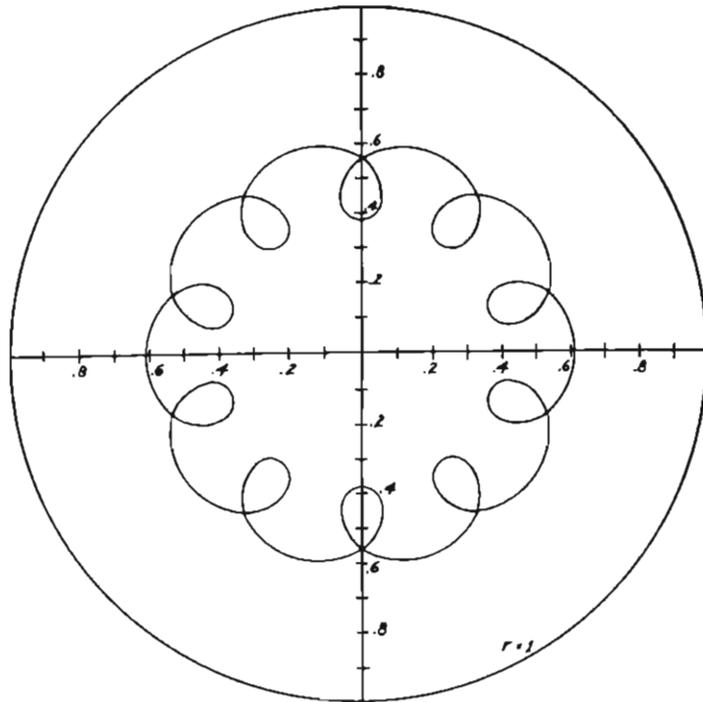


FIG. 5. PERIODIC ORBIT WITH  $l = 1$ ,  $l = 10$  ( $\gamma_1 = 1.1179$ )

We can also show that the doubly asymptotic orbit for  $\gamma_1 = 1$  is the limiting case of the periodic orbit. For in the interval 1 to  $1 + \epsilon$  we can choose at least one value of  $\gamma_1$  which satisfies (38) for a given value of  $l$ . Now if  $\epsilon$  is made very small,  $l$  must become very large, and in the limit as  $\epsilon$  goes to zero,  $l$  becomes infinite. The result is that we have  $l$  identical doubly asymptotic orbits.

TABLE I  
 Values of  $\delta = \gamma_1 - 1$  Corresponding to Periodic Orbits

$\frac{l}{l}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$2.5 \cdot 10^{-6}$									
2	$3.6 \cdot 10^{-9}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$								
3	$5.0 \cdot 10^{-12}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$							
4	$6.9 \cdot 10^{-17}$	$3.6 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$						
5	$9.5 \cdot 10^{-21}$	$4.2 \cdot 10^{-11}$	$7.0 \cdot 10^{-8}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$					
6	$1.3 \cdot 10^{-24}$	$5.0 \cdot 10^{-13}$	$3.6 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$4.4 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$				
7	$1.8 \cdot 10^{-28}$	$5.9 \cdot 10^{-16}$	$1.8 \cdot 10^{-10}$	$3.3 \cdot 10^{-8}$	$7.4 \cdot 10^{-7}$	$5.9 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$			
8	$2.5 \cdot 10^{-32}$	$6.9 \cdot 10^{-17}$	$9.5 \cdot 10^{-12}$	$3.6 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$7.3 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$		
9	$3.5 \cdot 10^{-36}$	$8.1 \cdot 10^{-19}$	$5.0 \cdot 10^{-13}$	$3.9 \cdot 10^{-10}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$8.6 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	
10	$4.8 \cdot 10^{-40}$	$9.5 \cdot 10^{-21}$	$2.6 \cdot 10^{-14}$	$4.2 \cdot 10^{-11}$	$3.6 \cdot 10^{-9}$	$7.0 \cdot 10^{-8}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$9.7 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$

**Acknowledgment**

We wish to express our indebtedness to Professor M. S. Vallarta, under whose direction this work was carried out and to his kind advice and encouragement throughout the work.

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY.

# THE PHYSICAL REVIEW

*A Journal of Experimental and Theoretical Physics Established by E. L. Nichols in 1893*

VOL. 55, No. 1

JANUARY 1, 1939

SECOND SERIES

## Galactic Rotation and the Intensity of Cosmic Radiation at the Geomagnetic Equator

M. S. VALLARTA, C. GRAEF\* AND S. KUSAKA†  
*Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts*  
(Received June 10, 1938)

The angle of deflection experienced by a primary cosmic particle moving in the plane of the geomagnetic equator is calculated for different energies and the result used to find the diurnal variation in the intensity of cosmic rays arriving vertically at the geomagnetic equator. If it is assumed that the number of primaries varies inversely as the cube of their energy, the calculation shows that there should be a diurnal variation in the vertical intensity of 0.17 percent, if all primaries are positive, with a maximum at 13 hr. 20 min. sidereal time. With a ratio of three positive to one negative primary, and the same distribution law, the amplitude of the diurnal variation should be 0.1

percent with a maximum at 12 hr. 30 min. sidereal time, while if the primary radiation as a whole is neutral (one positive particle to each negative) the amplitude should be 0.06 percent with maximum at 8 hr. 40 min. sidereal time. If the number of primaries is an exponentially decreasing function of their energy, the amplitude of the diurnal variation should be 0.24 percent with maximum at 18 hr. sidereal time, assuming all primaries are positive; if the primary radiation is neutral the amplitude should be 0.19 percent and the maximum should occur at 20 hr. 40 min. sidereal time. The expected diurnal variations for several values of the lower limiting energy are also discussed.

### 1.

A FUNDAMENTAL question in the theory of cosmic radiation is whether the radiation comes from outside our own galaxy. A possible way of answering this problem was first suggested in 1935 by Compton and Getting.<sup>1</sup> They pointed out that, as a consequence of the motion of rotation of our galaxy as a whole, there should be a small diurnal variation of the intensity depending on sidereal time. Since then they, and a number of others, have assiduously sought to establish experimentally the existence of this effect, as yet with results which are in part contradictory and largely inconclusive.

Compton and Getting developed the theory of the galactic rotation effect without regard to the deflection of charged primary particles by the earth's magnetic field. They then made a rough estimate of the error introduced by neglecting this deflection, and pointed out that it should result in still further decreasing the small expected diurnal variation in the absence of a magnetic field. In view of the importance of the question at issue, it appeared desirable to develop the exact theory of the galactic rotation effect even if at present the calculations can be carried out rigorously only for the particularly simple case of particles moving in the plane of the geomagnetic equator. A calculation due to van Wijk<sup>2</sup> already showed that, under the assumption that the number of primary particles varies as an exponentially decreasing function of their energy,

\* Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

† At present graduate student at the University of California, Berkeley, California.

<sup>1</sup> A. H. Compton and J. A. Getting, *Phys. Rev.* **47**, 817 (1935).

<sup>2</sup> L. A. van Wijk, *Physica* **3**, 769 (1936).

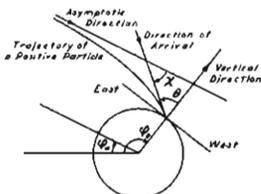


FIG. 1. The figure is drawn for an observer looking down on the equatorial plane from the north pole.

the maximum value of the diurnal variation for particles coming vertically at the geomagnetic equator should be about 0.25 percent, instead of 0.3 percent which would be expected if the earth's magnetic field were absent. He did not attempt to calculate the phase of the diurnal variation.

In the present paper we calculate the deflection of cosmic particles moving in the equatorial plane and then, by taking into account the motion of the earth due to the galactic rotation, we find the diurnal variation in the intensity of cosmic rays arriving vertically at a point in the geomagnetic equator. Methods similar to those used here yield the diurnal variation in any direction in the east-west plane at the geomagnetic equator. The results are similar to those reported here.

## 2.

The angle of deflection of a primary cosmic-ray particle reaching the earth from infinity can be easily calculated in the case we are now considering. We shall confine our attention to positive particles; the deflection of negative particles will be equal in magnitude but in the opposite direction to that of positive particles with the same absolute charge, mass, and energy. From Fig. 1 we see that the angle of deflection  $\chi$  is given by

$$\chi = \psi_e - \psi_a - \theta, \quad (1)$$

where  $\psi_e$  and  $\psi_a$  are the polar angles of the trajectory for  $r=r_e$ , the radius of the earth, and for  $r=\infty$ , respectively, and  $\theta$  is the direction of arrival of the particle at the earth. We are using Störmer's normalized coordinates so that  $r_e$  is the ratio of the radius of the earth to the radius of the circular periodic orbit of the particle, and it

is a measure of the energy of the particle. For the angles we have adopted the following conventions:  $\varphi$  is measured positive westward from the polar axis to the radius vector;  $\theta$  is measured positive eastward from the vertical to the reversed direction of arrival;  $\chi$  is measured positive clockwise from the asymptotic direction to the direction of arrival (Fig. 1).

The angles  $\varphi_e$  and  $\varphi_a$  are obtained by putting  $r=r_e$  and  $r=\infty$ , respectively, in the polar equation of the trajectory.<sup>3</sup> For  $\gamma_1 < 1$  ( $2\gamma_1$  is the moment of momentum of the particle, in the equatorial plane, at infinity and is a constant of the motion) we have

$$\begin{aligned} \varphi_e &= \sin^{-1} (k \sin \psi_e) + (\gamma_1/\sqrt{2}) F(\alpha, \psi_e), \\ \varphi_a &= \sin^{-1} (k \sin \psi_a) + (\gamma_1/\sqrt{2}) F(\alpha, \psi_a), \end{aligned} \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} \psi_e &= \cos^{-1} (r_e \gamma_1^{-1}) / (r_e (1 + \gamma_1^2)^{1/2}), \\ \psi_a &= \cos^{-1} \gamma_1 (1 + \gamma_1^2)^{-1/2}, \\ k &= \sin \alpha = [\frac{1}{2}(1 + \gamma_1^2)]^{1/2}, \end{aligned}$$

and  $F(\alpha, \psi)$  is the elliptic integral of the first kind. For  $\gamma_1 > 1$  we have

$$\begin{aligned} \varphi_e &= \psi_e + \gamma_1 (1 + \gamma_1^2)^{-1/2} F(\alpha, \psi_e), \\ \varphi_a &= \pi/4 + \gamma_1 (1 + \gamma_1^2)^{-1/2} F(\alpha, \pi/4), \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\psi_e = \sin^{-1} [(2r_e \gamma_1 + r_e^2 - 1)/2r_e^2]^{1/2}$ ,

and  $\sin \alpha = [2/(1 + \gamma_1^2)]^{1/2}$ .

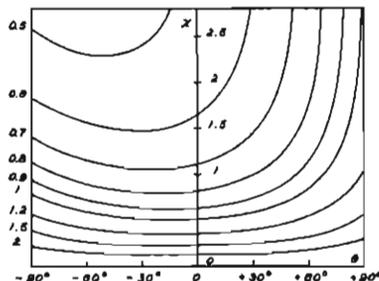


FIG. 2. The angle of deflection as a function of the angle of arrival, for different energies (expressed in störmers).  $r_e = 0.5$  for  $\theta = 0$  corresponds to an asymptotic orbit for which  $\chi \rightarrow \infty$ .

<sup>3</sup> C. Graef and S. Kusaka, *J. Math. Phys.* 17, 43 (1938). See also, L. A. van Wijk and H. Zanstra, *Physica* 3, 75 (1936).

Now  $\theta$  and  $\gamma_1$  are related by Störmer's equation<sup>4</sup>

$$\sin \theta = 2\gamma_1/r_s - 1/r_s^2, \quad (4)$$

so that for any given value of  $r_s$ ,  $\chi$  is a function of  $\theta$  alone.

We have calculated  $\chi$  for all possible values of  $\theta$  ( $-90^\circ$  to  $+90^\circ$ ) and for several values of  $r_s$ . The result is plotted in Fig. 2 where  $\chi$  is given in radians and  $\theta$  in degrees.

### 3.

We shall define the intensity of cosmic radiation,  $I$ , as the number of particles received per second per unit area. Then if  $f(E)$  is the energy distribution function at infinity, the intensity of cosmic rays arriving in the vertical direction at the earth when it is considered to be at rest with respect to the distribution of cosmic rays is, by Liouville's theorem,

$$I = \int_{E_0}^{\infty} f(E) dE, \quad (5)$$

where  $E_0$  is the lowest energy the particle can have to arrive at the given point of the earth in this direction. When the motion of the earth is taken into account the intensity is given by<sup>5</sup>

$$I' = \int_{E_0}^{\infty} \frac{f(E) dE}{(1 - \beta \cos \omega')^3} \quad (6)$$

where  $\beta$  is the ratio of the velocity of the earth to the velocity of light,  $\omega'$  is the angle between the velocity of the earth and the reversed tangent to

<sup>4</sup> C. Störmer, *Zeits. f. Astrophys.* 1, 237 (1930). This paper contains references to his previous work.

<sup>5</sup> A. H. Compton and I. A. Getting, reference 1. The lower limit of the integral (6), according to W. F. G. Swann (*Phys. Rev.* 51, 718 (1937)), should be  $E_0/(1 + \beta \cos \omega')$ , obtained by applying a Lorentz transformation to the energy  $E_0$  of the particle at infinity. We are unable to agree with this line of reasoning. With respect to the terrestrial observer the limiting energy in the earth's magnetic field is  $E_0$  and the distribution at infinity is anisotropic, as given by the denominator in (6). With respect to the extragalactic observer the limiting energy is not  $E_0$  because the particle moves with respect to him in a combined electric and magnetic field, and its kinetic energy is neither  $E_0$  nor is it conserved, but the distribution of particles with respect to him is of course isotropic. If Swann's suggestion were correct,  $I'$ , and therefore  $\Delta I/I$  (Eq. 15), would be indeterminate by the amount  $2\beta$ , since the limiting angle  $\omega'_0$  corresponding to the limiting energy  $E_0$  is infinite because the limiting trajectory described by this particle is asymptotic to the circular (periodic) orbit. We are indebted to Professor G. Lemaître for illuminating conversations on the correct approach to this problem.

the trajectory at infinity. From Fig. 3 it is seen that

$$\omega' = \chi + \omega, \quad (7)$$

where  $\omega$  is the angle between the velocity of the earth and the vertical at the point of observation. From the analysis<sup>6</sup> of Swann, Heitler, Nordheim

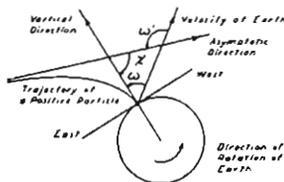


FIG. 3. Diagram of the angles used in the text.

and others, a likely distribution function of the primaries is

$$f(E) = c/E^3. \quad (8)$$

Now the energy in störmers written in terms of the energy of the particle in electron volts is<sup>7</sup>

$$r_s = R \left( \frac{E}{300 Mc \epsilon Z} \right)^2 \left( 1 + \frac{600 m_0 c^2}{E} \right), \quad (9)$$

which for very high energies ( $E \gg m_0 c^2$ ) reduces to

$$r_s = KE^2, \quad (10)$$

where  $K$  is a constant. Hence

$$f(E) = K^2/r_s^2 \quad (11)$$

and so

$$I = 2K^2 \int_{r_0}^{\infty} dr/r^3, \quad (12)$$

and, from (6),

$$I' = 2K^2 \int_{r_0}^{\infty} (1 + 3\beta \cos \omega') dr/r^3, \quad (13)$$

where  $r_0$  is the value of  $r_s$  corresponding to  $E_0$ . Thus  $r_0$  is the least energy for vertical arrival at the equator, that is, 500 millistörmers.<sup>8</sup> Now

<sup>6</sup> W. F. G. Swann, *Phys. Rev.* 50, 1103 (1936); W. Heitler, *Proc. Roy. Soc.* A161, 261 (1937); L. W. Nordheim, *Phys. Rev.* 51, 1110 (1937); 53, 694 (1938).

<sup>7</sup> G. Lemaître and M. S. Vallarta, *Phys. Rev.* 43, 87 (1933).

<sup>8</sup> G. Lemaître and M. S. Vallarta, *Phys. Rev.* 50, 530 (1936), Fig. 10.

according to Oort,<sup>9</sup>  $\beta$  is of the order of 0.001 so that we may neglect, as we have done in (13), squares and higher powers of  $\beta$ . From (12) and (13) we get

$$I' - I = 2K^4 \int_{r_0}^{\infty} 3\beta \cos \omega' dr/r^5. \quad (14)$$

Hence the fractional variation in intensity is

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I' - I}{I} = 2\beta \left( 6r_0^4 \int_{r_0}^{\infty} \cos \omega' dr/r^5 \right). \quad (15)$$

if the primaries were all positive. With an exponential distribution of primaries  $f(E) = e^{-K/E}$  instead of (11), and

$$\frac{\Delta I}{I} = 6\beta e^{\tau_0^2} \int_{r_0}^{\infty} r e^{-r^2} \cos \omega' dr \quad (16)$$

under the assumption that all particles are positive. In the actual computation the integrals (15), (16) were found graphically for several values of  $\omega$  with  $r_0 = 0.5$ .

4.

For a mixture of positive and negative particles, we must treat the two components separately. As we have stated earlier, changing the sign of the particle merely changes the sign of  $\chi$ . Hence, if we assume the same distribution law for negative as for positive particles, our result obtained for positive particle holds for negative particles if the sign of  $\theta$  is reversed. This follows from Eq. (7) and the fact that  $\omega'$  enters only as  $\cos \omega'$  in Eqs. (15), (16). Now if we use the subscripts + and - to denote quantities referring to positive and negative components of the primary radiation, respectively, then what we want to find is

$$\Delta(I_+ + I_-)/(I_+ + I_-)$$

and we know  $\Delta I_+/I_+$  and  $\Delta I_-/I_-$ . Now if there are  $n$  times as many positives as negatives in any energy band, then, since the intensity is proportional to the number of particles

$$\frac{1}{n+1} \left[ n \frac{\Delta I_+}{I_+} + \frac{\Delta I_-}{I_-} \right] = \frac{\Delta(I_+ + I_-)}{(I_+ + I_-)} = \frac{\Delta I}{I}. \quad (17)$$

<sup>9</sup>J. H. Oort, *Bull. Astr. Inst. of the Netherlands* 6, 155 (1931).

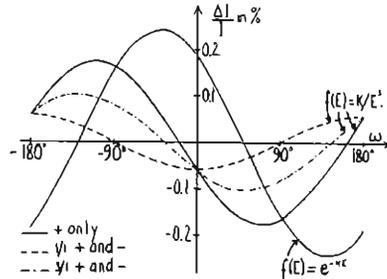


FIG. 4. The galactic diurnal variation of Compton and Getting.

Thus the effect of a mixture of positive and negative primaries is easily found if the ratio of the two components is known.

From Johnson's measurements<sup>10</sup> of the east-west and the north-south asymmetries in Mexico ( $\lambda = 29^\circ$ ), the ratio of the positive to the negative primaries in the energy band between 400 and 450 millistörmers has been estimated by Vallarta to be about 3 to 1. It is clear that an established ratio of positives to negatives in any energy interval is not in any way to be interpreted as meaning that the same ratio holds throughout the whole energy spectrum. Assuming, however, that the same ratio holds throughout the primary distribution, we may calculate the variation in the intensity. We simply put  $n = 3$  in Eq. (17).

5.

Figure 4 gives the result of this calculation. The variation in the vertical intensity is plotted as a function of  $\omega$ . This is just the sidereal time expressed in angular measure plus a constant which is determined from the fact that the velocity of the earth according to Oort<sup>9</sup> is in the direction 20 hr. 55 min. right ascension and  $47^\circ$  N declination. It is found that the zero of  $\omega$  corresponds to 20 hr. 40 min. The full curves show the percentage variation for positive particles alone; the amplitude is 0.17 percent and the maximum occurs at 13 hr. 20 min. sidereal time, assuming an inverse cube distribution, and 0.24 percent, in agreement with van Wijk's result,<sup>3</sup> with maximum at 18 hr. sidereal time, assuming

<sup>10</sup>T. H. Johnson, *Phys. Rev.* 47, 91 (1935); 48, 287 (1935).

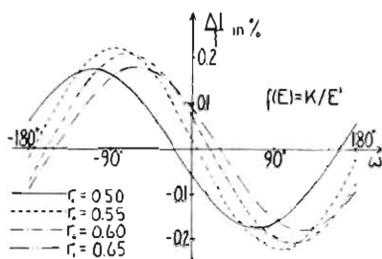


FIG. 5. The galactic diurnal variation for different values of the low energy limit. Inverse cube distribution of positive primaries.

an exponentially decreasing distribution. The other two curves show the expected diurnal variation if there are three positive primaries to each negative, and if there is an equal number of positives and negatives (primary radiation as a whole neutral), assuming in each case an inverse cube distribution. It may be pointed out that if the primary radiation as a whole is neutral, the amplitude of the expected diurnal variation is less than 0.1 percent, for an inverse cube distribution, and consequently its detection, or alternately the proof of its nonexistence, requires a very careful experimental investigation.<sup>11</sup> It is

<sup>11</sup> Whether a diurnal variation depending on sidereal time exists or not is a question which does not seem to be decided at the time of writing. Forbush's careful statistical analysis of the intensity measurements made with a Compton-Bennett automatic recording meter at Huancaayo, Peru, reported at the University of Chicago's symposium on cosmic rays (June 30, 1938), which are comparable to a good approximation with the theoretical results reported here, would not seem to rule out the existence of an effect such as would be expected for a primary radiation consisting of equal number of positive and negative particles having an inverse cube distribution. The requirement of a neutral radiation, necessary on other grounds, is thus seen to be consistent with present experimental evidence. Forbush's result, however, does seem to rule out an exponentially decreasing distribution of primaries, provided they satisfy the condition of being as a whole neutral. Cf. S. E. Forbush, Phys. Rev. 52, 1254 (1937).

also plain that a knowledge of the experimental diurnal variation as a function of sidereal time would lead to valuable conclusions as to the ratio of positive to negative primaries and as to their distribution law.

It should also be emphasized that, as already indicated by Compton and Getting, the magnitude of the diurnal variation is smaller than would be expected if the deflection of the particles in the earth's magnetic field were neglected, and the phase, except for the case of a neutral primary radiation, in the sense of equal number of positives and negatives, is shifted by a rather large amount. For undeflected particles, the amplitude of the diurnal variation should be  $3\theta$  or 0.3 percent and the maximum should always occur at 20 hr. 40 min. sidereal time.

The effect of filtering off low energy particles above the magnetic cut-off is exhibited in Fig. 5. It is seen that the effect depends rather considerably as regards both magnitude and phase on the lower limit of the energy if the distribution law goes according to the inverse cube. Such is not the case for an exponentially decreasing distribution, which is rather insensitive to the lower cut-off. The possibility of enhancing the expected effect by filtering off low energy particles, however, should not be overlooked, nor that of obliterating it (for  $r_0 = 0.54$ ) if the number of positive and negative primaries is the same.

The calculation of the galactic rotation effect for trajectories not lying wholly in the equatorial plane and for latitudes other than the equator is rendered considerably more difficult by the fact that the equations of motion are then no longer integrable. This investigation is being undertaken and the results will be presented in a future paper.

AN ANALYSIS OF PERIODIC ORBITS OF PARTICLES OF PRIMARY COSMIC  
RADIATION.

BY

CARLOS GRAEF

Abitur, Deutsche Oberrealschule zu Mexico  
1928.

SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE  
REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF

DOCTOR OF PHILOSOPHY

From the  
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
1940

Signature of Author.....*Carlos Graef*.....  
Department of Physics, May 9, 1940.

Signature of Professor in  
Charge of Research.....*W. S. Belontz*.....

Signature of Chairman of Department  
Committee on Graduate Students.....*John D. Slak*.....

a

3

ABSTRACT.

This thesis deals with the orbits traced by a charged particle, moving in the magnetic field of a dipole, on a rotating meridian plane following the particle.

In order to study these orbits it is very convenient to perform a homothetic transformation of the real meridian plane by amplifying it with the factor  $|2\gamma_1|$ .  $\gamma_1$  is the well-known parameter introduced by Carl Störmer. In the transformed meridian plane we use the dipole axis as  $\eta$ -axis and the equatorial one as  $\xi$ -axis. For  $\gamma_1 = 0$  the transformation cannot be carried out, and in this case we study the meridian plane directly.

We use the geometrical method of attack to find properties of the orbits. The transformation of the dynamical problem into a geometrical one is done by the introduction of the characteristic surface, i.e., the surface whose geodesics have the same differential equation as the trajectories. The passing from the dynamical equations of motion to the geometrical equation of the geodesics is essentially an elimination of the time. The meridian plane is a conformal image of the characteristic surface, so that properties of the geodesics on the latter can be translated into properties of orbits on the former.

We found that the characteristic surface has singular points which correspond to the boundary between allowed and forbidden regions in the meridian plane. The curvature of the surface is proved to be everywhere positive.

The characteristic surface is defined by the square of its element of arc, i.e., it is defined intrinsically and allows flexures, which are deformations without dilatation. This surface is applicable to any rigid surface in space having the same  $ds^2$ , without changing any of the properties which are interesting for the dynamical problem.

b

It was not possible to find space equations for the characteristic surface, nor to integrate the equation of the geodesics in general. But these last equations were able to be integrated approximately in two regions of the meridian plane, namely, in the region far away from the dipole and in the immediate neighborhood of the equator, in both cases for  $\gamma_1 > 0$ .

The former region is called in this thesis the hyperbolic region, because, in the approximation used, the orbits are hyperbolae. These hyperbolae cut the equator once and only once. For this approximation the space equations of the characteristic surface was found. Part of the surface is applicable to a surface of revolution with a singular edge like that of the cheese-shaped surfaces of Blaschke. We proved that the complete characteristic surface is not applicable to a surface of revolution.

We were able to establish the finite equations of the orbits in the immediate vicinity of the equator. The ordinate  $\eta$  is given as an algebraic function of the abscissa  $\xi$  and of the elliptic integrals of the first, second, and third kinds of algebraic functions of  $\xi$ .

Besides the two regions mentioned above, and also for  $\gamma_1 > 0$ , we explored in detail a third region, the vicinity of the talweg; the talweg is the lowest level line of the potential field of the particle in the  $\xi, \eta$  plane. This vicinity is called the valley by C. Störmer.

The principal problem solved in this thesis is the question of the existence in the valley of periodic orbits which do not cut the equator, proposed to the author by Professor M. S. Vallarta. We began the exploration of the valley by establishing a series expansion for the dipole orbit, i.e., the orbit starting at the dipole. We proved that this orbit has a higher order of contact with the talweg at the dipole and that it exists for all positive  $\gamma_1$ 's.

We continued our exploration with a detailed study of the concavity of the orbits, which analysis constitutes

c

the main contribution of this thesis, especially since it can be applied to the study of the geometry of the solution of other differential equations of the second order.

We proved that at each point of the allowed region there is a direction, namely, the critical direction, in which the contact of the orbit with its tangent is of a higher order. The critical direction is the one of the gradient of the potential field. We proved that the concavity of the orbits at a point is always towards that gradient, and that the orbit tangent to the critical direction, e.g., the critical orbit, has either an inflection or a flat point at the point of contact. If the inflection resembles the inflection of the letter S, we call the point an S-point; if it resembles the inflection of the number 2 we call it a 2-point. If the critical trajectory at a point has no inflection, but has a flat point, we call the point either a bowl point, if the critical trajectory has the concavity upwards, or a hill point, if the concavity is downwards. When the critical trajectory is a straight line we call the point a straight point. For the points on the talweg the gradient of the potential field is zero and thus they do not fall into any of the classes enumerated above; they are "pinwheel points", with the property that all orbits passing through them suffer an inflection there, except for the orbits tangent and normal to the talweg which have flat points there.

We determined the distribution of all these classes of points in the  $\xi, \eta$  plane. From a careful examination of this distribution we established the following theorems.

Theorem 1: For  $\gamma_1 \geq 1$  all orbits cut the equator.

Theorem 2: For  $0 < \gamma_1 < 1$  all periodic orbits cut the equator.

The same geometrical methods were applied to the case for  $\gamma_1 \leq 0$ , though the coordinate system used was different.

Theorem 3: For  $\gamma_1 \leq 0$  the orbits either do have an  $\eta$ -extremum, in which case they can have only one and then they cannot cut the equator, or they do not have an  $\eta$ -extremum

d

and must cut the equator.

Theorem 4: For  $\gamma_1 \leq 0$  all self-reversing orbits do not cut the equator.

Finally by applying a theorem due to Poincaré on geodesics of closed surfaces of positive curvature we obtained the following theorem:

Theorem 5: For  $\gamma_1 \geq 1$  there are at least three periodic orbits in the inner allowed region.

ACKNOWLEDGEMENTS.

It has been a distinct privilege to work under one of the leaders of the Theory of Primary Cosmic Radiation, and it is with pleasure that I express my appreciation to Professor M. S. Vallarta for his guidance, his kind advice, and his continuous encouragement throughout this research.

I am also grateful to Professors M. S. Vallarta, D. J. Struik, and to Drs. R. Albagli Hutner, and O. Godart for the time and effort that they devoted to discussions of this subject, and for the valuable suggestions made. I am deeply obliged to Dr. R. Albagli Hutner for correcting and rewording the manuscript.

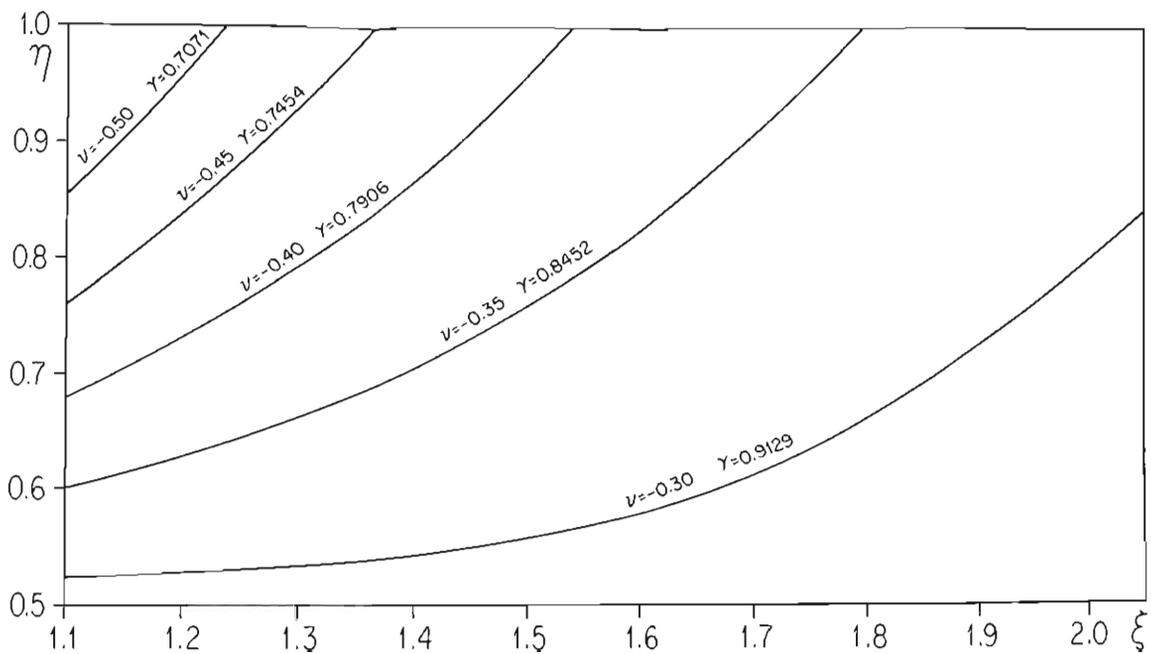
The photographs in the text are due to Mr. H. Leaderman and are deeply appreciated.

The residence and studies in the United States were made possible by a fellowship from the John Simon Guggenheim Memorial Foundation, a stipend from the Universidad Nacional de México, and full scholarships from the Massachusetts Institute of Technology during three terms; I am very grateful to these institutions for their financial assistance.

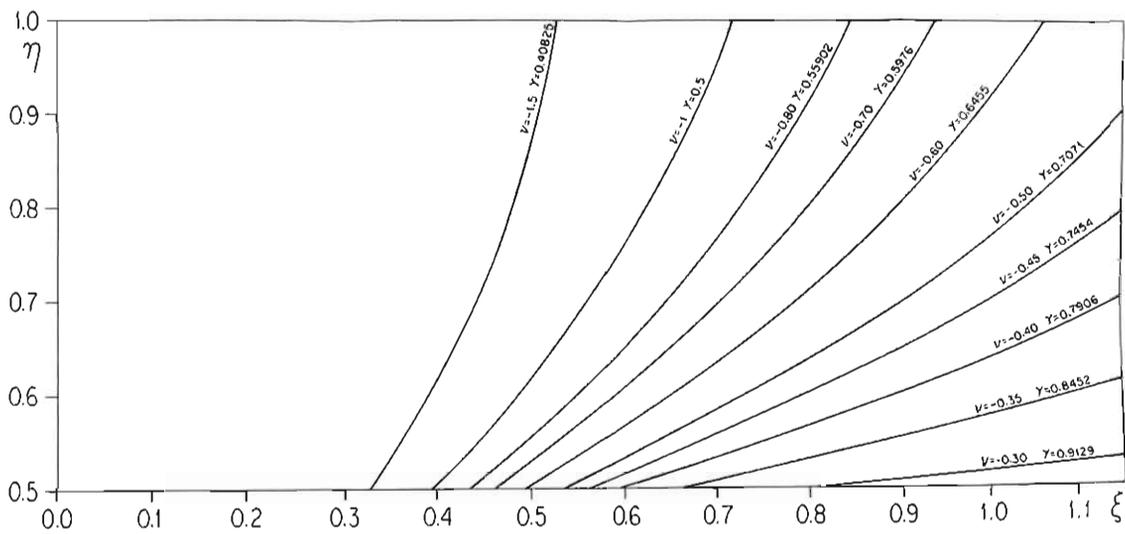
In 1940 I received a stipend from the President of Mexico, General L. Cárdenas, for which I am truly obliged and profoundly thankful.

TABLE OF CONTENTS.

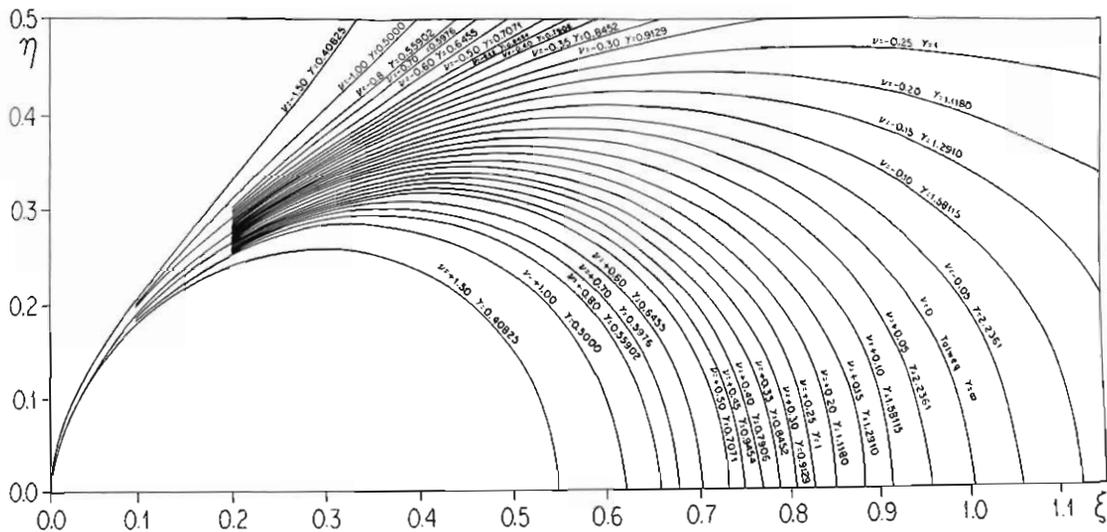
	Page
Acknowledgements	1
CHAPTER I. The Characteristic Surface	1
CHAPTER II: The System of Coordinates	5
CHAPTER III. Curvature and Singularity of the Characteristic Surface	9
CHAPTER IV. The Region Far Away from the Dipole	17
CHAPTER V. The Immediate Vicinity of the Equator	27
CHAPTER VI. The Dipole Orbit	31
CHAPTER VII. The Maxima and Minima of the Trajectories	37
CHAPTER VIII. Trajectories Emerging from a Point	40
CHAPTER IX. The Points on the Line $M = 0$	50
CHAPTER X. The Points on the Talweg	58
CHAPTER XI. The Points on the Equator	63
CHAPTER XII. The Points at Infinity	66
CHAPTER XIII. The Self-reversing Orbits	69
CHAPTER XIV. Intersections of the Orbits with the Talweg and the Equator	75
CHAPTER XV. On the Existence of Simple Periodic Orbits in the Valley	77
CHAPTER XVI. The Region between the Inner $M = 0$ Line and the Talweg	79
CHAPTER XVII. The Orbits for $\gamma_1 \geq 1$	82
CHAPTER XVIII. The Orbits for $0 < \gamma_1 < 1$	85
CHAPTER XIX. The Orbits for $\gamma_1 = 0$	89
CHAPTER XX. The Orbits for $\gamma_1 < 0$	94
APPENDIX I. The Equations of Motion	97
Biography	104



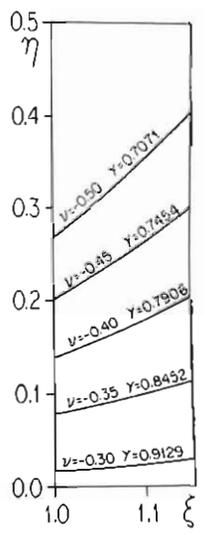
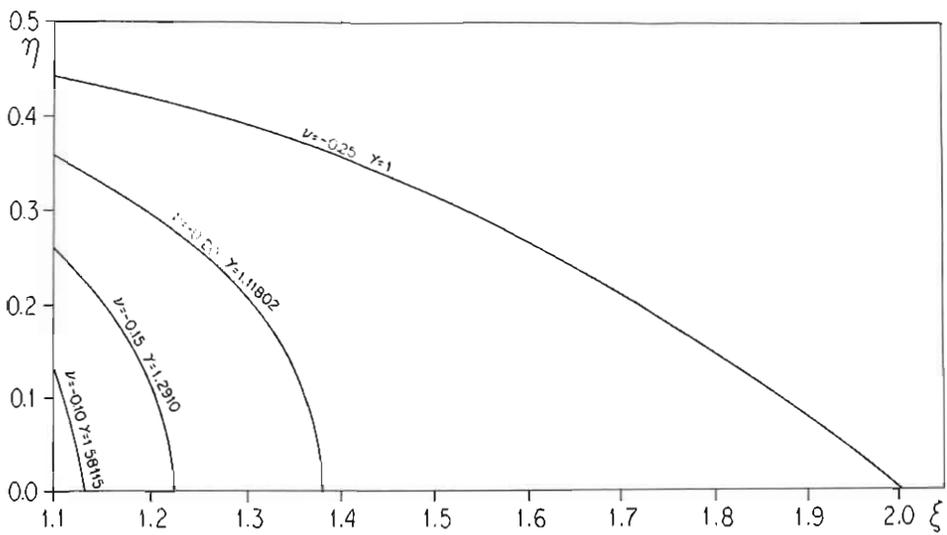














CHAPTER I. THE CHARACTERISTIC SURFACE.

It is possible to reduce the dynamical problem of the motion of a charged particle in the field of a magnetic dipole to the geometrical problem of finding the geodesics of a surface called the characteristic surface. This transformation has the advantage of eliminating the time variable from the problem. Thus the analysis of the geometry of the orbits is more easily effected from the differential equation of the geodesics than from the dynamical equations of motion.

The transformation is obtained at once from the Principle of Least Action<sup>1</sup>. Let  $h$  be the constant of energy,  $V$  the potential energy and  $T$  the kinetic energy of a dynamical problem in a two-dimensional, euclidean space with the cartesian coordinates  $x$  and  $\lambda$ . The Principle of Least Action is then expressed by

$$(1) \quad \delta \int_A^B \sqrt{(h-V) \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \right]} dt = 0$$

Equation (1) can be used without using the parameter  $t$ .

$$(2) \quad \delta \int_A^B \sqrt{(h-V)(dx^2 + d\lambda^2)} = 0$$

Since  $h$  is a constant and  $V$  is a function of  $x$  and  $\lambda$ , we can express (2) in the form

$$(3) \quad \delta \int_A^B \sqrt{f(x, \lambda)(dx^2 + d\lambda^2)} = 0$$

But equation (3) can be considered as the variational equation of the geodesics on a surface whose  $ds^2$  is defined by

$$(4) \quad ds^2 = f(x, \lambda)(dx^2 + d\lambda^2)$$

Expressing  $ds^2$  in terms of the constant of energy  $h$  and of the

potential energy  $V$ , we get

$$(5) \quad ds^2 = (h - V)(dx^2 + d\lambda^2)$$

In our problem<sup>a</sup>  $h = 0$  and  $V = -\frac{1}{2}P$ , hence

$$(6) \quad ds^2 = \frac{1}{2}P(dx^2 + d\lambda^2)$$

Multiplying (6) by 2, we obtain

$$(7) \quad 2 ds^2 = P(dx^2 + d\lambda^2)$$

It is convenient to measure distances on the surface with another unit of length, which is smaller by the factor  $1/\sqrt{2}$  than the original one. The elementary arc length is then

$$(8) \quad ds^2 = P(dx^2 + d\lambda^2)$$

Equation (8) defines a surface called the characteristic surface of the dynamical problem.

The differential equation of the geodesics of the characteristic surface is the same as the differential equation of the trajectories of the cosmic ray particles in the meridian plane.

Let us determine this differential equation<sup>b</sup>. For a general  $ds^2$  of the form

$$(9) \quad ds^2 = E dx^2 + 2F dx d\lambda + G d\lambda^2$$

the geodesics are given by

$$(10) \quad \frac{d^2\lambda}{dx^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^3 + \left[ \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left[ 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \frac{d\lambda}{dx} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

In our case

$$(11) \quad E = P, \quad F = 0, \quad G = P$$

3.

Using the subscript  $x$  to indicate partial derivation with respect to  $x$ , and the subscript  $\lambda$  to indicate partial derivation with respect to  $\lambda$ , the Christoffel symbols<sup>4</sup> are

$$(12) \quad \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{P_x}{2P} & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= -\frac{P_x}{2P} & \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{P_x}{2P} \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{P_x}{2P} & \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= -\frac{P_\lambda}{2P} & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{P_\lambda}{2P} \end{aligned}$$

From (10) and (12)

$$(13) \quad \frac{d^2 \lambda}{dx^2} + \frac{1}{2P} \left[ P_x \left( \frac{d\lambda}{dx} \right)^3 - P_\lambda \left( \frac{d\lambda}{dx} \right)^2 + P_x \left( \frac{d\lambda}{dx} \right) - P_\lambda \right] = 0$$

Writing an accent for the total derivative with respect to  $x$ , we can simplify (13) to

$$(14) \quad \lambda'' = \frac{1}{2P} (1 + \lambda'^2) (P_\lambda - P_x \lambda')$$

#### Conclusions:

Equation (14) is the geometrical differential equation of the trajectories of the dynamical problem given by

$$(15) \quad \frac{d^2 x}{d\sigma^2} = \frac{1}{2} P_x, \quad \frac{d^2 \lambda}{d\sigma^2} = \frac{1}{2} P_\lambda, \quad \left( \frac{dx}{d\sigma} \right)^2 + \left( \frac{d\lambda}{d\sigma} \right)^2 = P$$

Equation<sup>(14)</sup> is also the differential equation of the geodesics of the surface defined by

$$(8) \quad ds^2 = P(x, \lambda) (dx^2 + d\lambda^2)$$

So far nothing special has been assumed about the function  $P$ ; our conclusions hold for any function of  $x$  and  $\lambda$ .

For the purpose of clarity we refer to the plane with  $x$  and  $\lambda$  as cartesian coordinates as the  $x, \lambda$  plane, and to the characteristic surface with  $x$  and  $\lambda$  as curvilinear coordinates as the  $x, \lambda$  surface. The curves defined by (14) in the  $x, \lambda$  plane we refer to as "trajectories" and the ones de-

4.  
fined by the same differential equation in the  $x, \lambda$  surface we refer to as "geodesics".

The trajectories form a "natural family", in the sense of Painlevé<sup>5</sup>, in the  $x, \lambda$  plane; thus the allowed region of the  $x, \lambda$  plane with its cartesian net of coordinates and its trajectories is a conformal picture of the characteristic surface with its  $x, \lambda$  net of curvilinear coordinates and its geodesics.

REFERENCES:

1. A.J.McConnell, Applications of the Absolute Differential Calculus. Pages 228-230. London, 1931.
2. See Appendix I.
3. Luigi Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale. Volume I, Page 277. Pisa, 1922.
4. Luigi Bianchi, locus citatus. Page 122.
5. Edward Kassner, Differential Geometric Aspects of Dynamics. Pages 34-37, and footnote p. 37. American Mathematical Society, New York, 1913.

5.

CHAPTER II. THE SYSTEM OF COORDINATES  $\xi, \eta$ .

From the equations which define the characteristic surface

$$(1) \quad ds^2 = [ae^{2x} - (e^{-x} \cos \lambda - \sec \lambda)^2] [dx^2 + d\lambda^2]$$

$$(2) \quad ds^2 = P(x, \lambda) (dx^2 + d\lambda^2)$$

it is evident that any transformation of coordinates

$$(3) \quad x = x(\xi, \eta)$$

$$(4) \quad \lambda = \lambda(\xi, \eta)$$

that transforms

$$(5) \quad (dx^2 + d\lambda^2)$$

into

$$(6) \quad f(\xi, \eta) (d\xi^2 + d\eta^2)$$

will transform the  $ds^2$  above into

$$(7) \quad ds^2 = M(\xi, \eta) (d\xi^2 + d\eta^2)$$

which leaves the  $ds^2$  in terms of isometric parameters.

The most general expression of this transformation is given with the help of the analytic functions

$$(8) \quad \xi + i\eta = \Phi(x + i\lambda)$$

or

$$(9) \quad x + i\lambda = \Psi(\xi + i\eta) = \Psi_1(\xi, \eta) + i\Psi_2(\xi, \eta)$$

From (9)

$$(10) \quad dx = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} d\eta$$

$$(11) \quad d\lambda = \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta} d\eta$$

$$(12) \quad dx^2 + d\lambda^2 = \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi^2 + 2 \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta + \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta^2$$

For an analytic function

$$(13) \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta} \quad , \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} = - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi}$$

Hence

$$(14) \quad dx^2 + d\lambda^2 = \left[ \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] [d\xi^2 + d\eta^2]$$

In the special problem of this thesis it is convenient to use the particular transformation

$$(15) \quad \begin{cases} x + i\lambda = \frac{1}{2} \ln(\xi^2 + \eta^2) + i \tan^{-1} \frac{\eta}{\xi} \\ x = \frac{1}{2} \ln(\xi^2 + \eta^2) = \Psi_1(\xi, \eta) \\ \lambda = \tan^{-1} \frac{\eta}{\xi} = \Psi_2(\xi, \eta) \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \quad , \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \end{cases}$$

Hence

$$(16) \quad dx^2 + d\lambda^2 = \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} [d\xi^2 + d\eta^2]$$

The  $ds^*$  becomes then

$$(17) \quad ds^2 = \left[ a - \left( \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \right)^{3/2} - \frac{1}{\xi} \right] [d\xi^2 + d\eta^2]$$

7.

Throughout this thesis we shall use, for the sake of brevity,

$$(18) \quad r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

hence

$$(19) \quad ds^2 = \left[ a - \left( \frac{\xi}{F\xi} - \frac{1}{\xi} \right)^2 \right] [d\xi^2 + d\eta^2]$$

For later purposes, we introduce the notation

$$(20) \quad U = \left( \frac{\xi}{F\xi} - \frac{1}{\xi} \right)$$

$$(21) \quad M = a - U^2 = a - \left( \frac{\xi}{F\xi} - \frac{1}{\xi} \right)^2$$

$$(22) \quad ds^2 = M(d\xi^2 + d\eta^2)$$

$$(23) \quad ds^2 = (a - U^2)(d\xi^2 + d\eta^2)$$

When the characteristic surface is expressed in terms of  $\xi$  and  $\eta$ , equation (23), we shall refer to it as the  $\xi, \eta$  surface; the plane having  $\xi$  and  $\eta$  as cartesian coordinates is then a conformal transformation of this characteristic surface.

The  $(\xi, \eta)$  plane is obtained from the real meridian plane by a homothetic transformation; since, if  $x$  and  $y$  are the cartesian coordinates of a point on the real meridian plane with the  $x$ -axis along the equator and the  $y$ -axis along the dipole axis, then<sup>2</sup>

$$(24) \quad \begin{cases} \xi = 2f_1 x \\ \eta = 2f_1 y \end{cases}$$

From (23) it is clear that the dynamical problem whose characteristic surface is

$$ds^2 = (a - U^2)(d\xi^2 + d\eta^2)$$

is defined by the equations

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = -U \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = -U \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = a - U^2 \end{cases}$$

The two first equations of motion are completely independent of  $J_1$  since  $U$  itself does not depend on this parameter. Thus  $J_1$  plays the role of a constant of energy. The equi-potential lines are the same for all values of  $J_1$  although the value of the potential itself changes by a constant amount when passing from one  $J_1$  to another. Figs. 1, 2, 3, 4, 5 show the equi-potential lines for different values of  $U$  in the valley. Fig. 6 shows the potential field in the  $(\xi, \eta)$  plane with less detail but over a greater area.

The advantages of the coordinate system  $(\xi, \eta)$  for the method of attack used here are:

- 1.) There is only one potential diagram. The different potential fields are obtained by changing the labelling of the individual equi-potential lines.
- 2.) One of the purposes of this thesis is to explore the complete valley, and these coordinates make the valley a finite region.

#### REFERENCE:

1. Störmer mentions these coordinates in "Programme for the Quantitative Discussion of Electron Orbits in the Field of a Magnetic Dipole, with Application to Cosmic Rays and Kindred Phenomena". Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens. Tome I, page 65. Oslo, 1936.

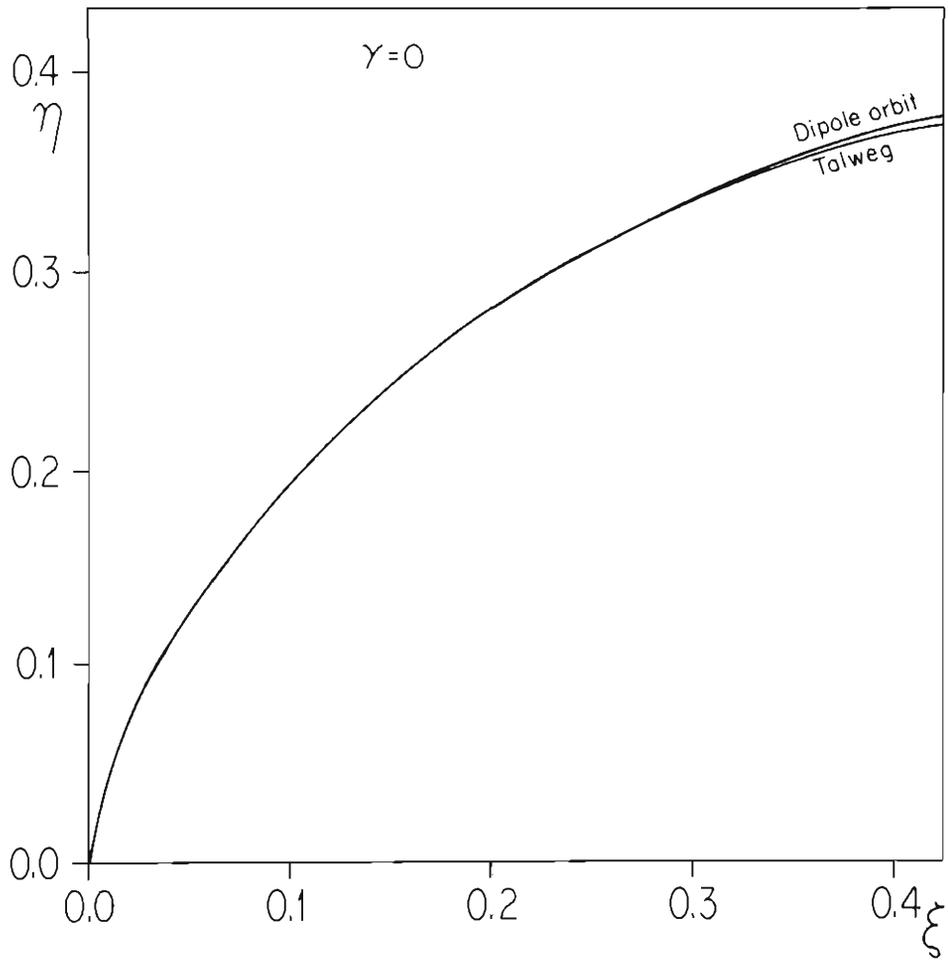




Fig.6. Detailed potential field  $M = \text{const.}$  at larger distances from the dipole. Reproduced from C. Stürmer, *Terrestrial Magnetism*, 37, 381, 1932.

CHAPTER III. CURVATURE AND SINGULARITIES OF THE CHARACTERISTIC SURFACE.

A. The Curvature.

The Gaussian curvature of the surface whose  $ds^2$  is

$$(1) \quad ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

is given by<sup>1</sup>

$$(2) \quad K = \frac{-1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\}$$

In our case

$$(3) \quad E = G = M, \quad u = \xi, \quad v = \eta$$

From (3) and (2) we obtain

$$(4) \quad K = -\frac{1}{M} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\partial \sqrt{M}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\partial \sqrt{M}}{\partial \eta} \right) \right\}$$

To express the curvature in a compact form it is convenient to use the following notation:

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta M = \frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} \\ (\nabla M)^2 = \left( \frac{\partial M}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial M}{\partial \eta} \right)^2 \end{cases}$$

From (4) and (5) we have

$$(6) \quad K = \frac{(\nabla M)^2 - M \Delta M}{2M^3}$$

In chapter VIII we have tabulated the partial derivatives of  $M$  up to the fourth order in terms of the partial derivatives of  $u$ , and then those of  $u$  in terms of  $\xi$  and  $\eta$ . With the help of these tables (6) becomes

$$(7) \quad K = \frac{(a+U^2)(U_1^2+U_2^2) + U(a-U^2)(U_{11}+U_{22})}{(a-U^2)^3}$$

There are properties of the geodesics on a surface that depend essentially on the sign of the Gaussian curvature<sup>8</sup>. Let us analyze the sign of  $K$ . Consider  $K$  as a function of position in the allowed region of the  $\xi, \eta$  plane. From (7) one can immediately see that  $K$  becomes infinite only at the line  $(a - u^2) = M = 0$ . The region beyond this line is forbidden and hence the sign of  $K$  does not interest us there. This means that  $K$  may change sign in the allowed region only by passing through the value 0. Therefore the locus  $K = 0$  is an important line and we proceed to obtain it.

Putting  $K = 0$  in (7) and solving for "a" we obtain

$$(8) \quad a = U^2 \frac{U(U_{11}+U_{22}) - (U_1^2+U_2^2)}{U(U_{11}+U_{22}) + (U_1^2+U_2^2)}$$

The parameter  $a$  is an essentially positive quantity<sup>9</sup>.

The locus  $K = 0$  can exist if either of the two pairs of the following inequalities are satisfied:

$$\begin{array}{l} (9) \quad U(U_{11}+U_{22}) - (U_1^2+U_2^2) < 0 \\ (10) \quad U(U_{11}+U_{22}) + (U_1^2+U_2^2) < 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (9) \\ (10) \end{array}} \right\} \text{first pair.}$$

$$\begin{array}{l} (11) \quad U(U_{11}+U_{22}) - (U_1^2+U_2^2) > 0 \\ (12) \quad U(U_{11}+U_{22}) + (U_1^2+U_2^2) > 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (11) \\ (12) \end{array}} \right\} \text{second pair}$$

In the first pair of inequalities only the inequality (10) is essential, for when (10) is satisfied (9) is automatically satisfied. In the second pair of inequalities only the inequality (11) is essential, for when (11) is satisfied (12) is also.

In order that (11) be satisfied  $u(u_{11} + u_{22})$  has to be positive; then from equation (7)  $K$  must be positive

11.

and different from zero. The result is that inequalities (11) and (12) must be discarded.

To analyze the inequality (10) of the first pair of inequalities let us write it in cartesian coordinates; with the help of equations (8) of chapter VIII we obtain

$$(13) \left( \frac{\xi}{r^3} - \frac{1}{\xi} \right) \left( \frac{3r^2\xi}{r^2} - \frac{2}{\xi^3} \right) + \left[ \frac{r^4 - 6r^2\xi^2 + 9\xi^4}{r^{10}} + \frac{2r^2 - 6\xi^2}{r^2\xi^2} \right] < 0$$

Introducing in (13) polar coordinates with the transformation

$$(14) \quad \xi = r \cos \lambda, \quad \eta = r \sin \lambda$$

we obtain

$$(15) \quad 3r^2 - 9\cos^4\lambda r + (6\cos^6\lambda + \cos^4\lambda) < 0$$

It can be immediately observed that the left hand side of inequality (15) is positive for large values of  $r$ .

The locus

$$(16) \quad 3r^2 - 9\cos^4\lambda r + (6\cos^6\lambda + \cos^4\lambda) = 0$$

separates the regions where inequality (15) holds from the regions where it does not. If we solve (16) for  $r$

$$(17) \quad r = \frac{9\cos^4\lambda \pm \sqrt{81\cos^8\lambda - 72\cos^4\lambda - 12\cos^4\lambda}}{6}$$

From the inequality

$$(18) \quad \cos \lambda \leq 1$$

follows  $\cos^6\lambda \leq \cos^4\lambda \leq \cos^2\lambda$

(19)

and

$$(20) \quad 81 \cos^6 \lambda - 72 \cos^4 \lambda - 12 \cos^2 \lambda \leq 81 - 72 - 12 = -3$$

Hence the locus (16) does not exist in the real plane; this means that inequality (15) is nowhere satisfied, since for large  $r$ 's the left-hand side of (15) is obviously positive.

Thus the inequalities (9), (10), (11) and (12) are nowhere satisfied in the allowed region of the meridian plane.

There is one other possible case that may give a positive value for "a", namely, when the two following equations are satisfied:

$$(21) \quad u^2 [u(u_{11} + u_{22}) - (u_1^2 + u_2^2)] = 0$$

$$(22) \quad u(u_{11} + u_{22}) + (u_1^2 + u_2^2) = 0$$

These two equations simultaneously define the following loci :

$$\text{locus 1.} \quad u = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0$$

$$\text{locus 2.} \quad u_{11} + u_{22} = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0$$

Figures 1. and 2. respectively show the curves  $u = 0, u_1 = 0, u_2 = 0$  and  $u_{11} + u_{22} = 0, u_1 = 0, u_2 = 0$ .

From Fig. 1. one can see that locus 1. is the origin. Fig. 2. shows that locus 2. also is the origin. Thus the pair of equations (21) and (22) is satisfied only at the origin, or dipole. (It is usual to call the origin the "dipole", because the magnetic dipole of the earth is located there in the dynamical problem. See Appendix I.)

The dipole also belongs to the locus  $M = 0$  of the  $\xi, \eta$  plane. The points of this locus belong to a singularity which will be discussed in the second part of this chapter.

13.

Conclusion:

The Gaussian curvature of the characteristic surface is everywhere positive.

B. The Singularity.

In the equation (7) for the Gaussian curvature  $K \rightarrow \infty$  when  $(a - u^2) = M \rightarrow 0$ . Hence the locus  $M = 0$  is a singularity on the  $\xi, \eta$  surface. To analyze this singularity of the characteristic surface we have to compare the  $\xi, \eta$  plane with the  $\xi, \eta$  surface. Let us denote corresponding points on both two-dimensional manifolds with the same capital letter and let us mark the points on the  $\xi, \eta$  plane with an accent. Consider the orthogonal trajectories to the  $M = \text{constant}$  lines, both on the  $\xi, \eta$  surface and on the  $\xi, \eta$  plane. Each of these families is connected to the other by the same conformal transformation that transforms the trajectories of the  $\xi, \eta$  plane into the geodesics of the  $\xi, \eta$  surface. Thus one family is the image of the other.

Consider two points  $A'$  and  $B'$  on the line  $M = 0$  of the plane and the two orthogonal trajectories of the  $M = \text{const.}$  lines through  $A'$  and  $B'$ . Let us call  $A''$  and  $B''$  the intersections of these orthogonal trajectories with the line  $M = \xi$  in the  $\xi, \eta$  plane. See Fig. 3. Consider the image of Fig. 3. on the  $\xi, \eta$  surface. Let us call  $s'_\xi$  the length of the arc  $A''B''$  measured along the  $M = \xi$  line in the  $\xi, \eta$  plane and let  $s_\xi$  be the length of the corresponding arc in the surface. These arc lengths are related by the equation

$$(23) \quad s_\xi = \varepsilon \int_{A'}^{B'} (d\xi^2 + d\eta^2)^{1/2} = \varepsilon s'_\xi$$

along  $M = \xi$

Let  $\xi$  go to zero; geometrically speaking, move  $A'$  and  $B'$  along the orthogonal trajectories until they reach the  $M = 0$  line, and in such a way that during the motion both are always on the same  $M = \xi$  line. From (23) we obtain

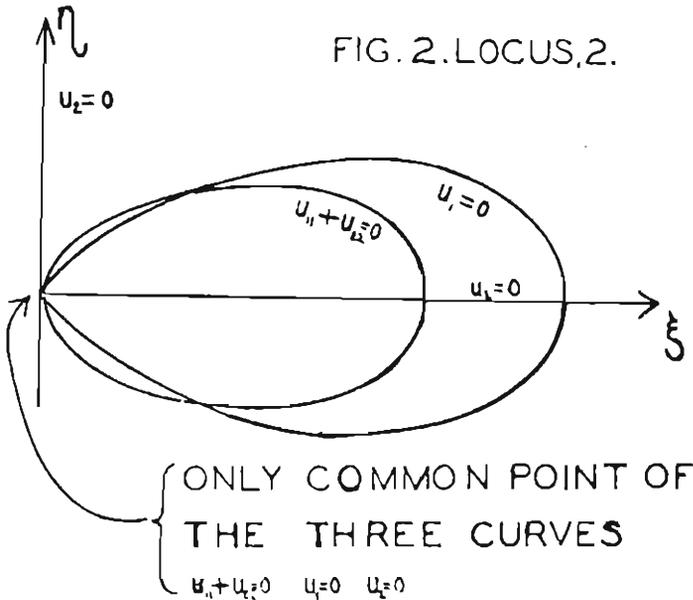
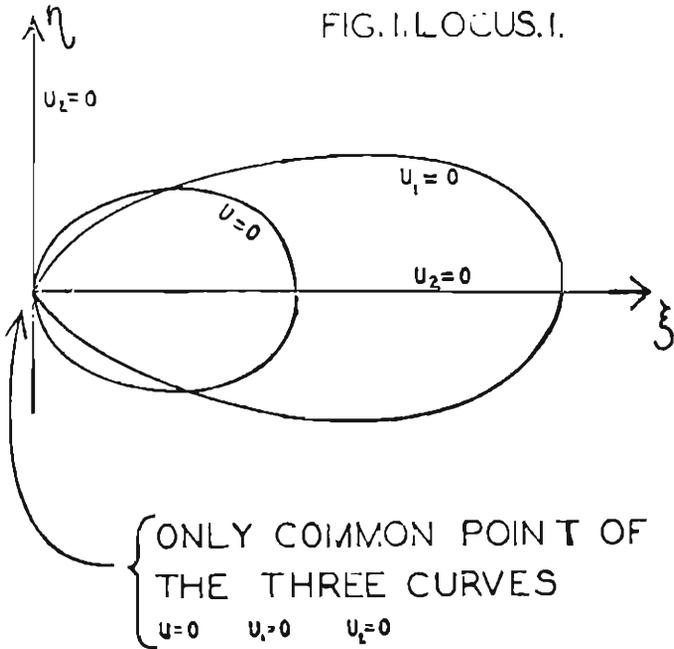


FIG. 3.

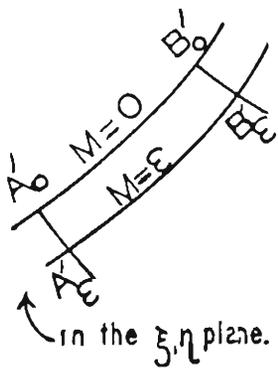


FIG. 4.

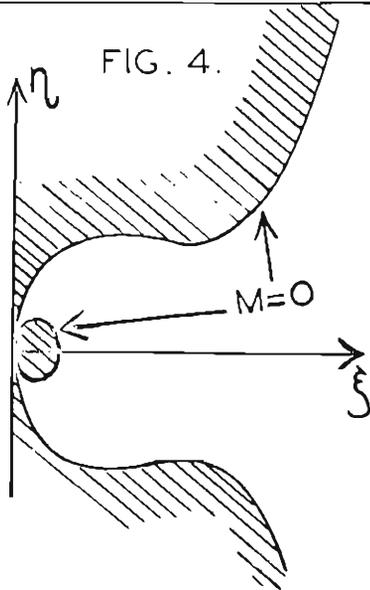


FIG. 5.

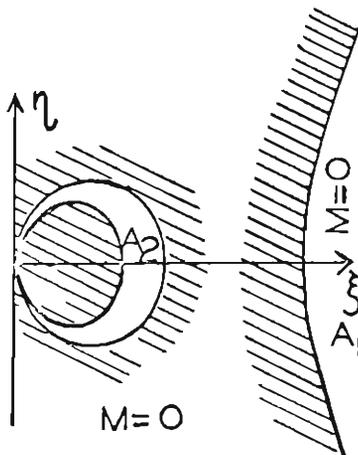
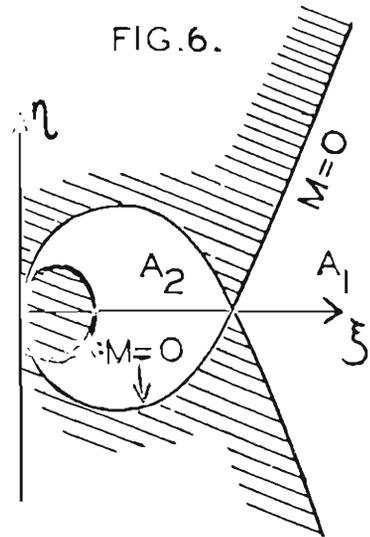


FIG. 6.



$$(24) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon = 0$$

Thus any two points  $A'_\varepsilon$  and  $B'_\varepsilon$  of the  $\xi, \eta$  plane that are connected by an arc of the locus  $M = 0$  have only one image on the  $\xi, \eta$  surface.

The locus  $M = 0$  on the  $\xi, \eta$  plane consists of several "curves". We shall say that two points belong to the same  $M = 0$  "curve" if they can be connected by an arc of the locus  $M = 0$ . To every "curve" of the locus  $M = 0$  in the  $\xi, \eta$  plane there corresponds one point on the  $\xi, \eta$  surface. We shall denote with "m" these points of the  $\xi, \eta$  surface that are the images of lines of the  $\xi, \eta$  plane. There are two different types of m-points: m-points representing a finite curve and m-points representing an infinite curve. Both types occur in our problem.

First let us consider an m-point representing a finite curve. Every finite  $M = 0$  curve has in its neighborhood finite  $M = \varepsilon$  lines. If the total length of the finite  $M = \varepsilon$  line is  $L'$  in the  $\xi, \eta$  plane, the length of the corresponding line on the  $\xi, \eta$  surface is  $L = \varepsilon L'$ . When  $\varepsilon$  approaches zero,  $L$  approaches zero, i. e., on the  $\xi, \eta$  surface the length of the finite lines  $M = \varepsilon$  goes to zero as  $\varepsilon$  goes to zero.

The singularity of the m-points of the first type (type just described) is similar to the singularity at the vertex of a cone. The connectivity of the  $\xi, \eta$  surface at such a point is the same as the connectivity at the vertex of a cone of a finite number of sheets, the first and last of which are connected like the sheets of a Riemann surface.

The m-points of the second type, the ones corresponding to infinite  $M = 0$  curves of the  $\xi, \eta$  plane, are of a much more complicated type. To analyze them consider again Fig. 3. Let us assume that  $\varepsilon$  is a fixed small quantity and that  $A'_\varepsilon$  and  $B'_\varepsilon$  lie on an infinite curve of the locus  $M = 0$  of the  $\xi, \eta$  plane. Assume further that,  $A'_\varepsilon$  being fixed,  $B'_\varepsilon$  can be moved along the  $M = \varepsilon$  line so that the arc  $s'_\varepsilon$  can become as large as one likes. Thus from  $s'_\varepsilon = \varepsilon s'_c$  one can immediately

15.

see that  $s_\epsilon$  can be made larger than any quantity  $N$  given beforehand by choosing  $B'_\epsilon$  sufficiently far from  $A'_\epsilon$ . One has only to choose  $B'_\epsilon$  so that  $s'_\epsilon > \frac{N}{\epsilon}$  in order that  $s_\epsilon > N$ . Expressing this result in a simple way we can say that the lines  $M = \epsilon$  on the surface which are images of infinitely long lines on the plane are infinitely long themselves. Only for  $\epsilon = 0$  is the image a single point, the m-point.

Still referring to the second type m-points, consider the length of the arc,  $m A_\epsilon$ , of the orthogonal trajectory on the  $\xi, \eta$  surface corresponding to the arc  $A'_0 A'_\epsilon$  of the  $\xi, \eta$  plane.

$$(25) \quad m A_\epsilon = \int_{A'_0}^{A'_\epsilon} [M(d\xi^2 + d\eta^2)]^{1/2}$$

$M$  varies from 0 at  $A'_0$  to  $\epsilon$  at  $A'_\epsilon$  without exceeding  $\epsilon$  in the arc, thus

$$(26) \quad m A_\epsilon < \sqrt{\epsilon} A'_0 A'_\epsilon$$

Observe in Fig. 6, chapter II, that the distance in the plane along the orthogonal trajectories between the lines  $M = 0$  and  $M = \epsilon$  remains finite.

We can summarize our conclusions for the m-point of the second type in the following statements:

- 1.) The lines  $M = \epsilon$  which are infinite curves in the  $\xi, \eta$  plane have infinitely long images in the  $\xi, \eta$  surface.
- 2.) These images are completely enclosed in a small sphere constructed around the corresponding m-point and having a radius  $\sqrt{\epsilon} d$ , where  $d$  is the maximum distance along the orthogonal trajectories in the  $\xi, \eta$  plane between the lines  $M = 0$  and  $M = \epsilon$ .

Assume that one wants to construct the surface starting at an m-point of the second type. Consider small arcs of a large number of orthogonal trajectories emerging from the m-point. Calculate the distances from the m-point to the points of the  $M = \epsilon$  line along the orthogonal trajectories

in the  $\xi, \eta$  surface. On each small arc of orthogonal trajectory mark the point of the  $M = \epsilon$  line. Connect the small arcs of orthogonal trajectories with the arcs of the  $M = \epsilon$  line. The complete  $M = \epsilon$  line is infinitely long and is wound around the m-point cutting all the orthogonal trajectories only once at a small distance from it. Thus the connectivity of the surface at an m-point of the second type is like the connectivity of a cone of an infinite number of sheets at its vertex. At an m-point of the second type the surface resembles a Riemann surface with an infinite number of sheets of conical form with the vertex as the branching point.

Let us apply the previous analysis to the three essentially different axes that we have to consider.

Case 1.  $0 < \gamma_1 < 1$

The locus  $M = 0$  is shown in Fig. 4. The characteristic surface consists of a single surface with an m-point of the second type.

Case 2.  $1 < \gamma_1$

The locus  $M = 0$  is shown in Fig. 5. The characteristic surface consists of two separate surfaces. One has an m-point of the second type and has an infinite area. It is the image of the allowed region marked  $A_1$  in Fig. 5. The second surface has everywhere positive Gaussian curvature and is closed; it has a finite area and an m-point of the first type.

Case 3.  $\gamma_1 = 1$

The locus  $M = 0$  is shown in Fig. 6. The characteristic surface consists of two surfaces topologically equal to the ones described for  $\gamma_1 > 1$  but osculating one another at their m-points.

#### REFERENCES:

1. Luigi Bianchi, Loc. cit. ref. 3, chap. I. Page 124.
2. Henri Poincaré, Sur les Lignes Géodésiques des Surfaces Convexes. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 6, page 237. New York, 1905.
3. See Appendix I.

17.

CHAPTER IV. THE REGION FAR AWAY FROM THE DIPOLE.

A. The Trajectories.

If  $r^3$  is very large compared with  $\xi$  then  $\frac{\xi}{r^3} \doteq 0$   
and

$$(1) \quad ds^2 \doteq \left[ a - \frac{1}{\xi^2} \right] [d\xi^2 + d\eta^2]$$

The surface defined by (1) is a surface of revolution, as proved later, and the finite equations of the geodesics as well as the equations of the surface in space are easily found. Surface (1) is of the type

$$(2) \quad ds^2 = [\alpha(u) + \beta(v)] [du^2 + dv^2]$$

and hence a Liouville Surface. The geodesics are given by

$$(3) \quad \int \frac{du}{\sqrt{\alpha(u) + a}} \mp \int \frac{dv}{\sqrt{\beta(v) - a}} = b$$

Equation (3) defines a double infinity of curves: one for each pair of values of  $a$  and  $b^2$ .

In our special case

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{a - k_1^2 - \frac{1}{\xi^2}}} \mp \int \frac{d\eta}{k_1} = k_2 \quad k_1 \neq 0$$

$$(4) \quad \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(a - k_1^2)\xi^2 - 1}} \mp \int \frac{d\eta}{k_1} = k_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{a - k_1^2}} \sqrt{(a - k_1^2)\xi^2 - 1} \mp \frac{\eta}{k_1} = k_2$$

$$(5) \quad \frac{\xi^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a - k_1^2}}\right)^2} - \frac{(\eta - k_1 k_2)^2}{\left(\frac{k_1}{\sqrt{a - k_1^2}}\right)^2} = 1$$

Equation (5) is the equation of a family of hyperbolæ, with their centers on the  $\eta$  axis.

Writing for brevity

$$(6) \frac{1}{(a - k_1 \eta)^2} = \alpha$$

equation (5) becomes

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\left(\eta - \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{\alpha} k_2\right)^2}{a^2 \alpha^2 - 1} = 1$$

And since  $k_2$  is completely arbitrary

$$(7) \frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{(\eta - \beta)^2}{a^2 \alpha^2 - 1} = 1$$

where  $\beta = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{\alpha} k_2$

Thus in the  $\xi, \eta$  plane the orbits are hyperbolae with their centers on the points of the  $\eta$ -axis  $(0, \beta)$  and with their real semi-axes equal to  $\alpha$  (arbitrary) and their imaginary semi-axes equal to  $\sqrt{a^2 - 1}$ . These hyperbolae include as a degenerate case straight lines parallel to the equator. This can be shown by multiplying (7) by  $(a^2 \alpha^2 - 1)$  and then equating  $\alpha^2$  to  $1/a$ . We obtain

$$\begin{aligned} \eta - \beta &= 0 \\ \eta &= \beta \end{aligned}$$

which are horizontal straight lines.

The region far away from the dipole can be called the "Hyperbolic Region". Fig. 1.

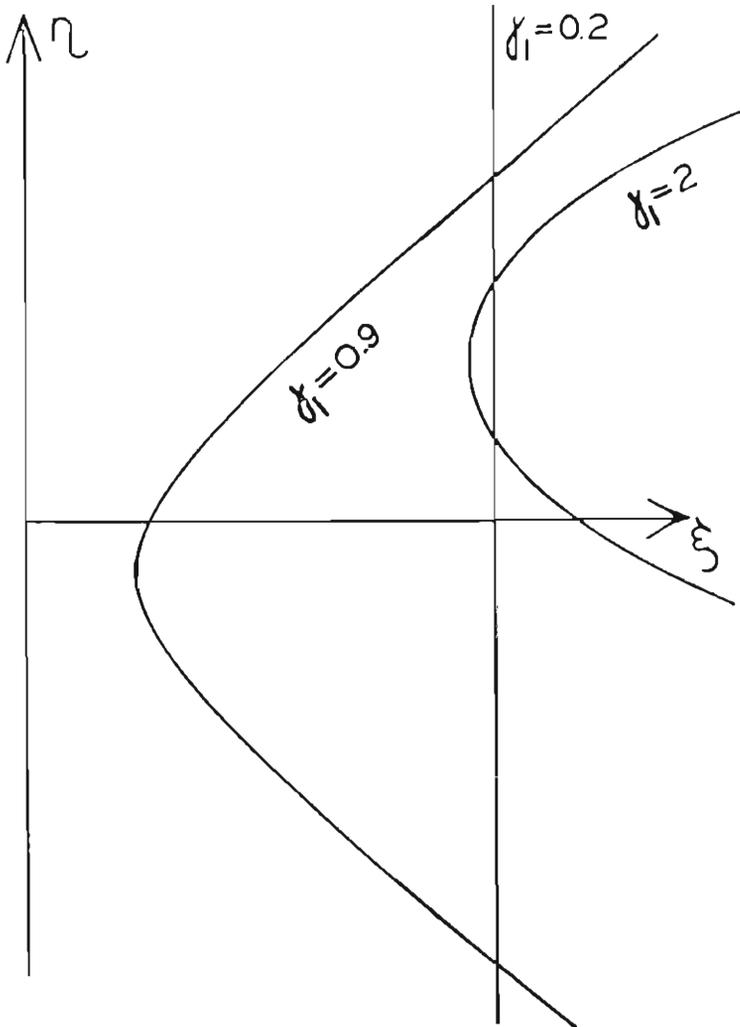
Theorem: All orbits of the hyperbolic region cross the equator once and only once.

### B. The Characteristic Surface.

To find out what kind of a surface the equation (1) defines, it is convenient to make a change of coordinates

$$(8) \quad \xi = k v \quad \eta = k v$$

FIG.1. ORBITS IN THE  
HYPERBOLIC REGION.



The new parametric lines  $u = \text{const.}$  and  $v = \text{const.}$  are the same as  $\xi = \text{const.}$  and  $\eta = \text{const.}$ , but the value marked on each one has changed. The  $ds^2$  becomes

$$(9) \quad ds^2 = \left[ ak^2 - \frac{1}{u^2} \right] [du^2 + dv^2]$$

Choosing  $k = 1/\sqrt{a}$  the equations (8) become

$$(10) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{a}} u \quad , \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{a}} v$$

and (9) changes to

$$(11) \quad ds^2 = \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) (du^2 + dv^2)$$

The surface defined by (11) is of course the same as that defined by (1); even the parametric lines on both are the same, the only thing changed being the value of the parameter corresponding to each parametric line.

Notice that  $ds^2$  in (11) does not depend anymore on  $\eta$ .

To show that (11) defines a surface of revolution and to find its space equations let us start with the general equations of a surface of revolution

$$(12) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \psi \\ y = \rho \sin \psi \\ z = f(\rho) \end{cases}$$

The z-axis is the axis of rotation. The  $ds^2$  is

$$(13) \quad ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{df}{d\rho} \right)^2 \right] d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2$$

Equation (13) can also be written as

$$(14) \quad ds^2 = \rho^2 \left[ \frac{1 + \left( \frac{df}{d\rho} \right)^2}{\rho^2} d\rho^2 + d\psi^2 \right]$$

20.

Defining a new variable  $\Psi$  as follows:

$$(15) \quad \Psi = \int \left[ \frac{1 + \left(\frac{df}{dg}\right)^2}{g^2} \right]^{1/2} dg$$

equation (14) becomes

$$ds^2 = g^2 [d\Psi^2 + d\varphi^2]$$

or

$$(16) \quad ds^2 = [g(\Psi)]^2 [d\Psi^2 + d\varphi^2]$$

since  $g$  depends only on  $\Psi$ . Comparing (16) with (11)

$$(17) \quad g = \left[ 1 - \frac{1}{u^2} \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u}$$

From (15) and (11)

$$(18) \quad u = \int \frac{\left[ 1 + \left(\frac{df}{dg}\right)^2 \right]^{1/2}}{g} dg$$

If in (18) one writes  $g = \sqrt{u^2 - 1}/u$  and expresses  $df/dg$  by means of  $df/du$  one obtains

$$(19) \quad u = \int \frac{\sqrt{1 + u^2(u^2 - 1)(df/du)^2}}{u(u^2 - 1)} du$$

From (19) one obtains by differentiating and solving for  $df/du$

$$(20) \quad \frac{df}{du} = \frac{\sqrt{u^2(u^2 - 1)^2 - 1}}{u^2 \sqrt{u^2 - 1}}$$

Solving for  $f$

$$(21) \quad f(u) = \int \frac{\sqrt{u^2(u^2 - 1)^2 - 1}}{u^2 \sqrt{u^2 - 1}} du$$

This integral is of Abelian type. The equations of the surface of revolution with a  $ds^2$  given by (11) are then

$$(22) \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u} \cos v \\ y = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u} \sin v \\ z = \int \frac{u \sqrt{u^2 (u^2 - 1)^2 - 1}}{u^2 \sqrt{u^2 - 1}} du \end{cases}$$

The lines  $u = \text{const.}$  or  $\xi = \text{const.}$  are the parallels on the surface of revolution, the lines  $v = \text{const.}$  are the meridians.

In equations (22)  $x$ ,  $y$  and  $z$  are periodic functions of  $v$  with the period  $2\pi$ . Since  $v$  is proportional to  $\eta$  and  $\eta$  may vary from  $-\infty$  to  $+\infty$  one has to imagine an infinite number of sheets forming the surface of revolution (22). Each of the different sheets has the same form and they are superposed like the sheets of an infinitely long, infinitesimally thin paper band wrapped around a cylinder. In this way, to every point  $(\xi, \eta)$  on the  $(\xi, \eta)$  plane there corresponds only one point on one of the infinite number of sheets that form the surface of revolution and to every point on the surface of revolution there corresponds only one point on the  $\xi, \eta$  plane.

In (22)  $z$  can also be expressed as

$$(23) \quad z = \int \left[ \frac{\xi^4}{(1-\xi^2)^3} - 1 \right]^{1/2} d\xi$$

From (23)

$$(24) \quad \frac{\xi^4}{(1-\xi^2)^3} \geq 1$$

And from (24) the limits of  $\xi$  are  $0.6559 \leq \xi < 1$ .  $\xi = 1$  corresponds to  $u = \infty$ , or to  $\xi = \infty$  for  $\delta_1 \neq 0$ .  $\xi = 0.6559$  corresponds to  $u = 1.3247$ . The space equations of the surface have to be expressed with the restriction stated above, i.e., either

$$(24) \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u} \cos v \\ y = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u} \sin v \\ z = \int \frac{u \sqrt{u^2 (u^2 - 1)^2 - 1}}{u^2 \sqrt{u^2 - 1}} du \end{cases} \quad 1.3247 \leq u < \infty$$

22.

Or

$$(25) \quad \begin{cases} x = \rho \cos v \\ y = \rho \sin v \\ z = \int \left[ \frac{\rho^4}{(1-\rho^4)^3} - 1 \right]^{1/2} d\rho \end{cases}$$

For the critical value of  $u$ ,  $u_c = 1.3247$ , the surface has a singular edge consisting of a parallel circle. On all the singular points of the edge, tangent planes can be defined. All these tangent planes coincide in one plane and this is perpendicular to the axis of revolution, since  $dz/d\rho = 0$  for the critical value. This singular edge is the singularity of the "cheese-shaped surfaces of revolution" studied by Blaschke<sup>8</sup>.

As in Blaschke's example the non-existence of points of the surface defined by (24) for  $1 \leq u < 1.3247$  does not mean that the surface defined by the  $ds^2$  (11) or (1) does not exist for such values of  $u$ . The surface defined by (11) exists as long as

$$(26) \quad 1 - \frac{1}{u^2} > 0.$$

that is for

$$(27) \quad u \geq 1.$$

Since a  $ds^2$  defines a surface except for flexures, one can always change the shape of the surface (24) in space without altering the  $ds^2$  so that a greater portion of the surface defined by

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) (du^2 + dv^2)$$

is represented by the space equations of the surface of revolution. In order to change the shape in space of the surface of revolution, we shall make the following transformations:

$$(28) \quad u = A\mu, \quad v = A\nu$$

where  $A$  is a constant. Equation (11) becomes

$$(29) \quad ds^2 = \left[ A^2 - \frac{1}{\mu^2} \right] [d\mu^2 + dy^2]$$

From (29) one obtains with the same method followed above a surface of revolution a part of which (namely, for  $u > 1.3247$ ) is intrinsically the same as that defined by equation (24).

This surface is

$$(30) \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{A^2\mu^2 - 1}}{\mu} \cos y \\ y = \frac{\sqrt{A^2\mu^2 - 1}}{\mu} \sin y \\ z = \int \frac{[A^2\mu^2(A^2\mu^2 - 1)^2 - 1]^{1/2}}{\mu^2\sqrt{A^2\mu^2 - 1}} d\mu \end{cases}$$

It is easy to see that the critical value  $\mu_c$  of  $\mu$ , i.e. the one that makes

$$(31) \quad \mu_c^2 (A^2 \mu_c^2 - 1)^2 - 1 = 0$$

is greater than

$$(32) \quad \mu = \frac{1}{A}$$

which makes the integrand infinite. This critical value  $\mu_c$  is smaller than  $\frac{u_0}{A}$ , because

$$(32) \quad u_0^2 (u_0^2 - 1)^2 - 1 = 0$$

Calling  $\mu'$  the value of  $\mu$  corresponding to  $u_0$ , one obtains from (28) and (32)

$$A^2 \mu'^2 (A^2 \mu'^2 - 1)^2 - 1 = 0$$

$$(33) \quad \mu'^2 (A^2 \mu'^2 - 1) - \frac{1}{A^2} = 0$$

Comparing (33) with (31) one sees that for

$$(34) \quad \begin{cases} A < 1, \text{ then } \mu' > \mu_c; \\ \text{and for } A > 1, \text{ then } \mu' < \mu_c. \end{cases}$$

To express these results in a geometrical way it is

24.

convenient to use in (30)  $u$  and  $v$  instead of  $\mu$  and  $\nu$  and then to compare the equations (35) so obtained with equations (24).

$$(35) \quad \begin{cases} x = \frac{A\sqrt{u^2-1}}{u} \cos\left(\frac{v}{A}\right) \\ y = \frac{A\sqrt{u^2-1}}{u} \sin\left(\frac{v}{A}\right) \\ z = \int \frac{\sqrt{u^2(u^2-1)^2 - A^2}}{u^2\sqrt{u^2-1}} du \end{cases} \quad \bar{u}_c \leq u \leq \infty$$

We call  $\bar{u}_c$  the critical  $u$  in (35). We can see that for  $A$  smaller than 1,  $\bar{u}_c$  is smaller than  $u_c$ , and for  $A$  greater than 1,  $\bar{u}_c$  is greater than  $u_c$ .

$$(24) \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{u^2-1}}{u} \cos v \\ y = \frac{\sqrt{u^2-1}}{u} \sin v \\ z = \int \frac{\sqrt{u^2(u^2-1)^2 - 1}}{u^2\sqrt{u^2-1}} du \end{cases} \quad 1.3247 \leq u \leq \infty$$

Equations (35) and (24) are the spatial equations of parts of the surface defined by

$$(11) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) (du^2 + dv^2)$$

For  $A < 1$  equation (35) represents a larger part than (24). For  $A > 1$  equation (35) represents a smaller part than (24). If  $A_1 < A_2$  then (35), for  $A = A_1$ , represents a larger part of (11) than for  $A = A_2$ . In fact the surface (35) for  $A = A_2$  is obtained by cutting the surface for  $A = A_1$  along the parallel corresponding to the critical value  $u_c$  belonging to  $A_2$ , and by opening up the surface of revolution in the same way that Blaschke generates his "cheese-shaped" surfaces. He starts from a sphere, cuts off two identical polar caps, breaks the remaining surface along a meridian, and opens it up until the tangent planes at the points of the

circular edge collapse into one plane perpendicular to the axis of revolution.

If  $A$  approaches zero, the part of (11) represented by (35) approaches the total surface but never reaches it since  $A$  cannot equal zero. The region in the neighborhood  $u = 1$ , which is the singular point on the surface, cannot be represented as a part of a surface of revolution.

### C. Approximate Calculation of the Asymptotic Directions of Cosmic Ray Orbits.

Let us solve for  $\eta$  from equation (7)

$$(36) \quad \eta = \frac{\sqrt{a\alpha^2 - 1}}{\alpha} \sqrt{\xi^2 - \alpha^2} + \beta$$

and by derivation we get

$$(37) \quad \eta' = \frac{\sqrt{a\alpha^2 - 1}}{\alpha} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2}}$$

From (37)

$$(38) \quad \alpha = \left[ \frac{|\sqrt{(a-\eta'^4)\xi^4 + 4\xi^2\eta'^2} - (a-\eta'^4)\xi^2}{2\eta'^2} \right]^{1/2}$$

In order to find the slope of the asymptote let  $\xi \rightarrow \infty$  in equation (37). Then

$$(39) \quad \eta' = \frac{\sqrt{a\alpha^2 - 1}}{\alpha} = \tan \Psi$$

where  $\Psi$  is the angle between the equator and the asymptote.

By substituting the value of  $\alpha$  from (38) in (39) we obtain

$$(40) \quad \tan \Psi = \left[ \frac{a \left[ \sqrt{(a-\eta'^4)\xi^4 + 4\xi^2\eta'^2} - (a-\eta'^4)\xi^2 \right] - 2\eta'^2}{\sqrt{(a-\eta'^4)\xi^4 + 4\xi^2\eta'^2} - (a-\eta'^4)\xi^2} \right]^{1/2}$$

Equation (40) defines the asymptotic direction for a given set of values,  $\xi$ ,  $\eta$  and  $\eta'$ , of an orbit at a point sufficiently far from the dipole.

26.

References:

1. Luigi Bianchi, loc.cit. ref.3, chap.I. Page 304.
2. W. Blaschke, Kreis und Kugel. Page 142. Leipzig, 1916.

CHAPTER V. THE IMMEDIATE VICINITY OF THE EQUATOR.

Let us examine the  $ds^2$  of the characteristic surface in the immediate vicinity of the equator.

$$(1) \quad ds^2 = \left[ a - \left( \frac{\zeta}{\zeta^2 + \eta^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{\zeta} \right]^2 [d\zeta^2 + d\eta^2]$$

In this region  $\eta$  can be neglected, so that the  $ds^2$  becomes

$$(2) \quad ds^2 = \left[ a - \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} \right) \right]^2 [d\zeta^2 + d\eta^2]$$

The surface defined by (2) is a Liouville Surface. The geodesics on this surface are given by<sup>2</sup>

$$(3) \quad \int \frac{d\zeta}{\sqrt{a-k - \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} \right)^2}} \pm \int \frac{d\eta}{\sqrt{k}} = \beta$$

From (3)

$$(4) \quad \int \frac{\zeta^2 d\zeta}{[(a-k)\zeta^4 - (\zeta-1)^2]^{1/2}} \pm \frac{\eta}{\sqrt{k}} = \beta$$

Writing

$$(5) \quad c^2 = a - k$$

equation (4) transforms into

$$(6) \quad \int \frac{\zeta^2 d\zeta}{[(c^2\zeta^2 + \zeta - 1)(c^2\zeta^2 - \zeta + 1)]^{1/2}} \pm \frac{\eta}{\sqrt{k}} = \beta$$

The term dependent on  $\zeta$  in (6) is an elliptic integral

$$(7) \quad I = \int \frac{\zeta^2 d\zeta}{[(c^2\zeta^2 + \zeta - 1)(c^2\zeta^2 - \zeta + 1)]^{1/2}}$$

It is more convenient to leave  $c^2$  as parameter, and hence to express  $k$  in terms of  $c^2$  and  $a$

$$(8) \quad k = a - (c^2)^2$$

Equation (6) becomes then

$$(9) \int \frac{\xi^2 d\xi}{[(c^2 \xi^2 + \xi - 1)(c^2 \xi^2 - \xi + 1)]^{1/2}} \pm \frac{\eta}{\sqrt{a-c^4}} = \beta$$

Solving for  $\eta$  we obtain

$$(10) \quad \eta = \pm \sqrt{a-c^4} I(\xi, c) + \text{const.}$$

We wrote  $I(\xi, c)$  to emphasize the fact that  $I$  depends only on the variable  $\xi$  and the parameter  $c$ . From (10) several properties of the trajectories in the immediate vicinity of the equator can be obtained without integrating  $I$ .

Theorem 1: If  $G_1$  is an orbit in the immediate vicinity of the equator corresponding to  $a = a_1$  and  $c = c_1$ , then an orbit for  $a = a_2$  and  $c = c_1$  is obtained by multiplying all ordinates of  $G_1$  by  $\sqrt{a_2 - c_1^4} / \sqrt{a_1 - c_1^4}$ , provided  $c_1$  be smaller than both  $\sqrt{a_1}$  and  $\sqrt{a_2}$ .

A change in  $\beta_1$  acts in the immediate vicinity of the equator as an affine transformation.

Theorem 2: A translation in the direction of the  $\eta$ -axis transforms an orbit of a special  $\beta_1$  into another orbit for the same  $\beta_1$ , provided both are in the immediate vicinity of the equator.

To be able to carry out the integration of  $I$  in equation (7) we must consider two cases for the value of  $c^2$ , namely,  $c^2 > 1/4$  and  $c^2 < 1/4$ . The finite equation for  $\eta$  in each of these two cases is given in Tables 1. and 2.

The notation used in Tables 1. and 2. and the bibliography of tabulated values of the functions used are given below.

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

is Legendre's elliptic integral of the first kind.

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

# TABLE I. Case I. $c^2 > 1/4$ .

$$\pm \eta = \sqrt{a-c} \frac{\sqrt{c^2\xi^2 - (\xi-1)^2}}{c^2\xi^2} - \frac{\sqrt{a-c^2}}{2c^2} m - \frac{(16c^4-1)\sqrt{a-c^2}}{2c^2} \ell - 24\sqrt{a-c^2} n$$

where

$$m = \sqrt{8c} \left[ \frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}} \sin^{-1} \sqrt{2c(\xi-2)} \right] - \frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}} F \left( \frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}}, \sin^{-1} \sqrt{2c(\xi-2)} \right)$$

$$- \frac{\xi-2}{5} \frac{c^2\xi^2 + \xi - 1}{\sqrt{2\xi^2 - \xi + 1}}$$

$$\ell = -\frac{1}{\sqrt{8c}} F \left( \frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}}, \cos^{-1} \frac{\xi-2}{5\sqrt{4c^2+1}} \right)$$

$$n = \frac{1}{4\sqrt{2}c^2} F \left( \frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}}, \sin^{-1} \sqrt{2c(\xi-2)} \right) \left[ -\sqrt{8c} Z \left\{ F \left( \frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}}, \sin^{-1} \sqrt{2c(\xi-2)} \right) \right\} \right]$$

$$+ \frac{1}{8c^2} \ln \frac{\xi\sqrt{c^2\xi^2 + \xi - 1} + (\xi-2)\sqrt{2\xi^2 - \xi + 1}}{\xi\sqrt{c^2\xi^2 - (\xi-1)^2} - (\xi-2)\sqrt{c^2\xi^2 - \xi + 1}}$$

$$+ \frac{1}{8c^2} \ln \left\{ \frac{\frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}} \sin^{-1} \sqrt{2c(\xi-2)}}{\frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}} \sin^{-1} \sqrt{2c(\xi-2)}} - F \left( \frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}}, \sin^{-1} \sqrt{2c(\xi-2)} \right) \right\}$$

$$\left. + F \left( \frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}}, \sin^{-1} \sqrt{2c(\xi-2)} \right) + F \left( \frac{\sqrt{4c^2+1}}{\sqrt{8c}}, \sin^{-1} \sqrt{2c(\xi-2)} \right) \right\}$$

## TABLE 2.

Case 2.  $c^2 < 1/4$ 

$$\pm \eta = \sqrt{a-c} \sqrt{\frac{c^2\xi^2 - (\xi-1)^2}{c^2\xi^2}} - \frac{\sqrt{a-c^4}}{2c^4} m - \frac{(16c^4-1)\sqrt{a-c^4}}{2c^4} \ell - 24\sqrt{a-c^4} n + C$$

where

$$m = \sqrt{1+4c^2} E\left(\frac{\sqrt{8}c}{\sqrt{1+4c^2}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+4c^2\sqrt{c^2\xi^2-\xi+1}}{\sqrt{2}c(\xi-2)}}\right) - \frac{4\sqrt{c^2\xi^2-(1-\xi)^2}}{\xi(\xi-2)}$$

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{1+4c^2}} F\left(\frac{\sqrt{8}c}{\sqrt{1+4c^2}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+4c^2\sqrt{c^2\xi^2-\xi+1}}{\sqrt{2}c(\xi-2)}}\right)$$

$$n = \left[ \frac{1}{\sqrt{1+4c^2}} - \frac{1}{4c^2} Z\left\{ F\left(\frac{\sqrt{8}c}{\sqrt{1+4c^2}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+4c^2}{\sqrt{2}c(\xi-2)}}\right) \right\} F\left(\frac{\sqrt{8}c}{\sqrt{1+4c^2}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+4c^2(c^2\xi-\xi+1)}{\sqrt{2}c(\xi-2)}}\right) \right]$$

$$+ \frac{1}{8c^2} \ln \frac{\xi\sqrt{c^2\xi^2-\xi+1} + (\xi-2)\sqrt{c^2\xi^2-1}}{\xi\sqrt{c^2\xi^2-\xi+1} - (\xi-2)\sqrt{c^2\xi^2-1}} \\ - \frac{1}{8c^2} \ln \left\{ F\left(\frac{\sqrt{8}c}{\sqrt{1+4c^2}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+4c^2\sqrt{c^2\xi^2-\xi+1}}{\sqrt{2}c(\xi-2)}}\right) - F\left(\frac{\sqrt{8}c}{\sqrt{1+4c^2}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+4c^2}{\sqrt{2}c(\xi-2)}}\right) \right\} \\ + F\left(\frac{\sqrt{8}c}{\sqrt{1+4c^2}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+4c^2\sqrt{c^2\xi^2-\xi+1}}{\sqrt{2}c(\xi-2)}}\right) + F\left(\frac{\sqrt{8}c}{\sqrt{1+4c^2}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+4c^2}{\sqrt{2}c(\xi-2)}}\right) \right\}$$

is Legendre's elliptic integral of the second kind.

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \frac{\pi}{2})$$

is Legendre's complete elliptic integral of the first kind.

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(k, \frac{\pi}{2})$$

is Legendre's complete elliptic integral of the second kind.

Tables: Legendre A. M. Tables of the Complete and Incomplete Elliptic Integrals. 1934.

$$\zeta(k, u) = \zeta(u) = \int dn^2 u du - u \frac{E}{K}$$

is the Zeta function of Jacobi.

Tables: L. M. Milne-Thomson. The Zeta Function of Jacobi. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 52, 239-250, 1931.  
(Note  $m = k^2$ )

$$\Theta(k, u) \text{ or } \Theta(u) \text{ is defined by}$$

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = e^{\int \zeta(u) du}$$

It is the Theta function of Jacobi.

Tables: Smithsonian Mathematical Formulae and Tables of Elliptic Functions. Washington, D.C., 1922.

Concerning the use of the tables:

To find  $\Theta(k, u)$ , where  $k = \sin \theta$  and hence

$\Theta(\sin \theta, u)$ , in the tables, which are given in steps of  $5^\circ$  for  $\theta$ ,

- 1) find  $\theta$  from  $\sin \theta = k$ ,
- 2) find  $\Theta(0)$  for that particular  $\theta$ , ) At head of
- 3) find  $K$  for that particular  $\theta$  ) the tables
- 4)  $r = \frac{2Ou}{K}$
- 5) find  $D(r)$  on the page of the particular  $\theta$ .
- 6)  $\Theta(k, u) = \Theta(0) D(r)$

It is more convenient to use the angle  $\psi$  itself if possible.

30.

(iv)  $(\sin \theta, F(\sin \theta, \psi))$  is given directly as a function of  $\psi$  and  $\theta$ .

Reference:

1. Luigi Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig, 1899. Page 172..

CHAPTER VI. THE DIPOLE ORBIT<sup>1</sup>.

For each value of  $\gamma_1$  there is one orbit starting at the dipole, called a "dipole orbit". A series expansion which is valid in the neighborhood of the dipole is given in this chapter.

Let  $P(\xi, \eta)$  be any point in the valley, i.e., the allowed region on the dipole side of the pass, and  $P_T(\xi_T, \eta_T)$  be the point on the talweg<sup>o</sup>, i.e., the line  $u = 0$ , the latter point being on the straight line  $OP$ . The coordinates of  $P$  and  $P_T$  are related by a homothetic transformation. Fig. 1.

$$(1) \quad \xi = \frac{\xi_T}{A}$$

$$(2) \quad \eta = \frac{\eta_T}{A}$$

By definition

$$(3) \quad u = \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} - \frac{1}{\xi}$$

As coordinates of the point  $P$  we are going to introduce

$$m = \sqrt[3]{\xi_T} \quad \text{and} \quad u.$$

Note that  $u$  is positive in the area inclosed by the talweg and negative outside that area. Substituting (1) and (2) in (3) we get

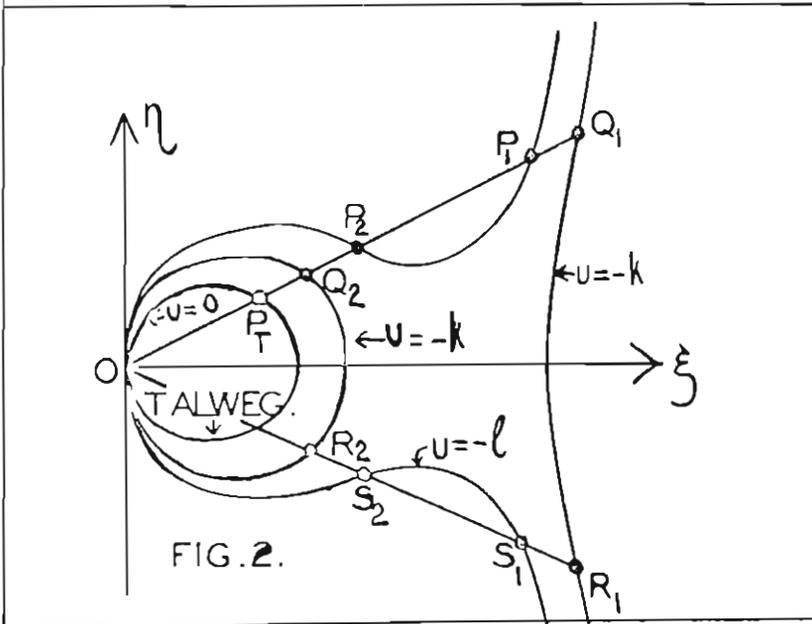
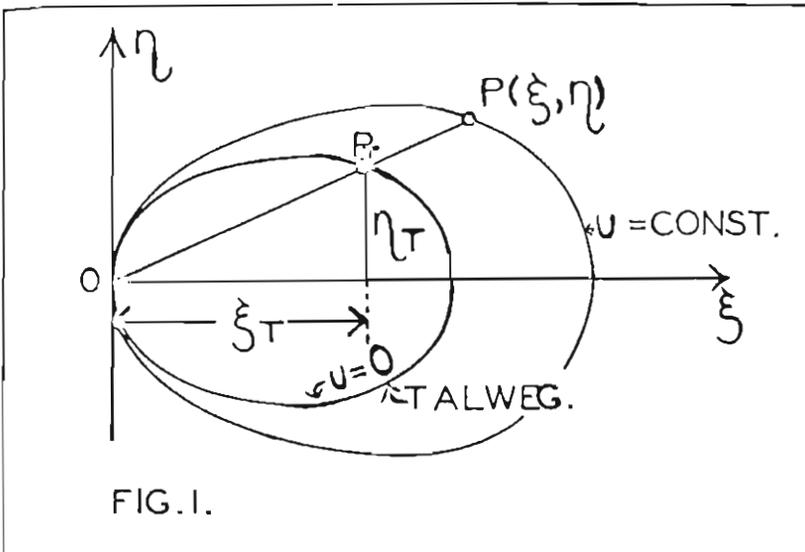
$$(4) \quad u = \frac{A^2 \xi_T}{(\xi_T^2 + \eta_T^2)^{3/2}} - \frac{A}{\xi_T}$$

Solving (4) for  $1/A$

$$(5) \quad \frac{1}{A} = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 + 4u \xi_T}}$$

From (5), (1) and (2)

$$(6) \quad \xi = \frac{2 \xi_T}{1 \pm \sqrt{1 + 4u \xi_T}} \quad ) \quad \eta = \frac{2 \eta_T}{1 \pm \sqrt{1 + 4u \xi_T}}$$



To decide on which sign to use in equations (6) consider Fig. 2., where the lines  $u = \text{const.}$  have the form shown. In the region outside of the talweg, the points  $P_1, Q_1, R_1, S_1$  are given by taking the negative signs in (6); while the points  $P_2, Q_2, R_2, S_2$  are given by taking the positive signs in (6). In the region inside the talweg  $u$  is positive and the points are given by taking the positive signs in (6). Thus in the valley

$$(7) \quad \xi = \frac{2 \zeta_T}{1 + \sqrt{1 + 4u \zeta_T}} \quad , \quad \eta = \frac{2 \eta_T}{1 + \sqrt{1 + 4u \zeta_T}}$$

Writing

$$(8) \quad F = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4u \zeta_T}} = \frac{1}{A}$$

and

$$(9) \quad \zeta_T = m^3$$

we obtain

$$(10) \quad \xi = m^3 F \quad , \quad \eta = \eta_T F$$

The purpose of these substitutions is to introduce as new variables  $m$  and  $u$ .

$\zeta_T$  and  $\eta_T$  are related by the equation

$$(11) \quad \frac{\zeta_T}{(\zeta_T^2 + \eta_T^2)^{3/2}} - \frac{1}{\zeta_T} = 0$$

hence

$$(12) \quad \eta_T = \sqrt{\zeta_T^{4/3} - \zeta_T^2}$$

From (12) and (9)

$$(13) \quad \zeta_T = m^3 \quad , \quad \eta_T = m^2 \sqrt{1 - m^2}$$

From (9) and (8)

$$(14) \quad F = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4um^3}}$$

33.

From (10), (13) and (14)

$$(15) \quad \xi = \frac{2m^3}{1 + \sqrt{1 + 4um^3}}, \quad \eta = \frac{2m^2 \sqrt{1 - m^2}}{1 + \sqrt{1 + 4um^3}}$$

$$(16) \quad \xi = m^3 F, \quad \eta = m^2 \sqrt{1 - m^2} F$$

The differential equation of the trajectories expressed in terms of  $\xi$  and  $\eta$  is

$$(17) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{1}{2M} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \left[ M_\eta - M_\xi \frac{d\eta}{d\xi} \right]$$

This equation is derived in precisely the same way as equation (14) of chapter I. was obtained, but starting with  $ds^2 = M(d\xi^2 + d\eta^2)$ .

Since  $\xi$  and  $\eta$  can be expressed as functions of  $m$  and  $u$  every quantity appearing in (17) can be calculated in terms of these new variables. Let the primes denote derivatives with respect to  $m$ .

$$(18) \quad M = a - u^2$$

$$(19) \quad M_\xi = -2u \frac{1 - 3m^2 + F}{m^4 F^3}$$

$$(20) \quad M_\eta = \frac{6m\sqrt{1 - m^2} u}{m^4 F^3}$$

$$(21) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta'}{\xi'}$$

$$(22) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{\xi' \eta'' - \eta' \xi''}{(\xi')^3}$$

In (21) and (22)  $\xi$  and  $\eta$  are to be considered as functions of  $u$  and  $m$ .

The differential equation becomes

$$(23) \quad m^6 F^3 (a-u^2) [\zeta' \eta'' - \zeta'' \eta'] = \\ u [3m\sqrt{1-m^2} \zeta' + (1-3m^2+F)\eta'] [\zeta'^2 + \eta'^2]$$

To solve (23) consider  $u$  as a function of  $m$ , given as a series with undetermined coefficients.

$$(24) \quad u = \sum_0^{\infty} A_k m^k$$

From (24) and (14)  $F$  can be expressed in terms of  $m$ . From (24) and (15)  $\zeta$  and  $\eta$  can be expressed in terms of  $m$ , hence we can obtain  $\zeta' = d\zeta/dm$ ,  $\eta' = d\eta/dm$ ,  $\zeta'' = d^2\zeta/dm^2$  and  $\eta'' = d^2\eta/dm^2$ . Both sides of (23) are obtained as series in  $m$  with the undetermined coefficients  $A_k$ . By equating the coefficients of equal powers it is possible to determine the  $A$ 's.

From (23) it can be seen that  $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ ;

hence

$$(25) \quad u = \sum_5^{\infty} A_k m^k$$

By actually carrying out the substitutions it is found that

$$(26) \quad 0 = A_5 = A_8 = A_{10} = A_{12} = A_{14} = A_{16} = \dots$$

The partial results and the end result are given in the table below, after suppressing the coefficients that turn out to be zero.

Coefficients:

$$A_5 = -\frac{3}{8} a = -0.375a \\ A_7 = -\frac{3}{8} a = -0.375a \\ A_9 = -\frac{45}{128} a = -0.351563 a \\ A_{11} = -\frac{81}{256} a = -0.316406 a$$

## TABLE PART. I. PARTIAL RESULTS.

Variable	Expansion in powers of $m$ .
$v$	$A_5 m^5 + A_7 m^7 + A_9 m^9 + A_{11} m^{11} + A_{13} m^{13} + A_{15} m^{15} + A_{17} m^{17} + \dots$
$f$	$\frac{1}{15} A_5 m^{10} - A_7 m^{12} - A_{11} m^{14} + \frac{1}{15} (2A_5^2) m^{16} - (A_5 A_7) m^{18} + \frac{1}{17} (4A_5 A_9 + 2A_7^2) m^{20} + \dots$
$\xi$	$m^3 - A_5 m^{11} - A_7 m^{13} - A_9 m^{15} - A_{11} m^{17} + (A_{13} + 2A_5^2) m^{19} + (A_{15} + 4A_5 A_7) m^{21} + (A_{17} + 4A_5 A_9 + 2A_7^2) m^{23} + \dots$
$\eta$	$m^2 - \frac{1}{2} m^4 - \frac{1}{8} m^6 - \frac{1}{16} m^8 + (-\frac{5}{123} - A_5) m^{10} + (-\frac{7}{256} + \frac{1}{2} A_5 - A_7) m^{12} +$ $\frac{(-21)}{1024} + \frac{1}{8} A_5 + \frac{1}{2} A_7 - A_9) m^{14} + (-\frac{23}{2048} + \frac{1}{16} A_5 + \frac{1}{8} A_7 + \frac{1}{2} A_9 - A_{11}) m^{16} +$ $\frac{(-429)}{32768} + \frac{5}{128} A_5 + \frac{1}{16} A_7 + \frac{1}{8} A_9 + \frac{1}{2} A_{11} - A_{13} + 2A_5^2) m^{18} +$ $\frac{(-715)}{163856} + \frac{7}{256} A_5 + \frac{5}{123} A_7 + \frac{1}{16} A_9 + \frac{1}{8} A_{11} + \frac{1}{2} A_{13} - A_5^2 - A_{15} + 4A_5 A_7) m^{20} +$ $\frac{(-271)}{264774} + \frac{21}{1024} A_5 + \frac{7}{256} A_7 + \frac{5}{123} A_9 + \frac{1}{16} A_{11} + \frac{1}{8} A_{13} - \frac{1}{4} A_5^2 + \frac{1}{2} A_{15} - 2A_5 A_7) m^{22} + \dots$

## PART 2. FINAL RESULTS.

### TABLE

Variable	Expansion in powers of $m$ .
$v$	$-\frac{3}{8}am^5 - \frac{3}{8}am^7 - \frac{45}{128}am^9 - \frac{91}{256}am^{11} + \left[ \frac{557}{2048}a + \frac{661}{128}a^2 \right]m^{13} +$ $+ \left[ \frac{243}{1024}a + \frac{155}{32}a^2 \right]m^{15} + \left[ -\frac{6561}{32768}a + \frac{12753}{2048}ca^2 \right]m^{17} \dots$
$\xi$	$m^3 + \frac{3}{8}am^{11} + \frac{3}{8}am^{13} + \frac{45}{128}am^{15} + \frac{91}{256}am^{17} + \frac{557}{1024}a - \frac{661}{128}a^2]m^{19} +$ $\left[ \frac{243}{1024}a - \frac{117}{32}a^2 \right]m^{21} + \left[ \frac{6561}{32768}a - \frac{11097}{2048}a^2 \right]m^{23} \dots$
$\eta$	$m^2 - \frac{1}{2}m^4 - \frac{1}{8}m^6 - \frac{1}{16}m^8 + \left[ \frac{5}{128} + \frac{3}{8}a \right]m^{10} + \left[ \frac{7}{256} + \frac{3}{16}ca \right]m^{12} +$ $\left[ \frac{21}{1024} + \frac{15}{128}ca \right]m^{14} + \left[ \frac{33}{2048} + \frac{19}{256}ca \right]m^{16} + \left[ \frac{429}{32768} + \frac{75}{2048}a - \frac{225}{128}a^2 \right]m^{18} +$ $\left[ \frac{715}{65536} + \frac{51}{4096}a - \frac{711}{256}a^2 \right]m^{20} + \left[ \frac{2431}{262144} - \frac{147}{32768}a - \frac{6903}{2048}a^2 \right]m^{22}$

35.

$$A_{13} = -\frac{567}{2048} a + \frac{261}{128} a^2 = -0.276855a + 2.039063a^2$$

$$A_{16} = -\frac{243}{1024} a + \frac{135}{32} a^2 = -0.237305a + 4.21875a^2$$

$$A_{17} = -\frac{6561}{32768} a + \frac{12753}{2048} a^2 = -0.200226a + 6.227050a^2$$

For the convenience of the numerical computations write  $\xi$  and  $\eta$  as follows:

$$(27) \quad \xi = m^3 + af + a^2g$$

$$(28) \quad \eta = m^3 - \frac{1}{2}m^4 - \frac{1}{8}m^6 - \frac{1}{16}m^8 - \frac{5}{128}m^{10} - \dots \\ + ah + a^2k$$

From (13), (27) and (28)

$$(29) \quad \xi = \xi_T + af + a^2g, \quad \Delta\xi = af + a^2g$$

$$(30) \quad \eta = \eta_T + ah + a^2k, \quad \Delta\eta = ah + a^2k$$

$$(31) \quad f = \frac{3}{8}m^{11} + \frac{3}{8}m^{13} + \frac{45}{128}m^{15} + \frac{81}{256}m^{17} + \frac{567}{2048}m^{19} \\ + \frac{243}{1024}m^{21} + \frac{6561}{32768}m^{23} + \dots$$

$$(32) \quad g = -\frac{225}{128}m^{19} - \frac{117}{32}m^{21} - \frac{11097}{2048}m^{23} - \dots$$

$$(33) \quad h = \frac{3}{8}m^{10} + \frac{3}{16}m^{12} + \frac{15}{128}m^{14} + \frac{9}{128}m^{16} + \frac{75}{2048}m^{18} + \frac{51}{4096}m^{20} \\ - \frac{147}{32768}m^{22} + \dots$$

$$(34) \quad k = -\frac{225}{128}m^{18} - \frac{711}{256}m^{20} - \frac{6903}{2048}m^{22} - \dots$$

The following theorems can be obtained from equations (29) and (30):

Theorem 1: As  $j_1$  increases the dipole orbit lies closer to the talweg and coincides with the talweg for  $j_1 = \infty$ .

Theorem 2: For small values of the abscissa ( $\xi$ ) the distance between the dipole orbit and the talweg is of the order of  $\xi^{1/3}$ .

One of these dipole orbits, the one for  $j_1 = 0.7$ , is shown in Fig. 3.

CHAPTER VII. THE MAXIMA AND MINIMA OF THE TRAJECTORIES.

The trajectories are given by the differential equations

$$(1) \quad \frac{d^2 \eta}{d\zeta^2} = \frac{1}{2M} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\zeta} \right)^2 \right] \left[ M_2 - M_1 \frac{d\eta}{d\zeta} \right]$$

$$(2) \quad \frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} = \frac{1}{2M} \left[ 1 + \left( \frac{d\zeta}{d\eta} \right)^2 \right] \left[ M_3 - M_2 \frac{d\zeta}{d\eta} \right]$$

When  $d\eta/d\zeta = 0$ , the sign of  $d^2\eta/d\zeta^2$  determines whether there is a maximum or a minimum in  $\eta$ , which we shall call  $\eta$ -maximum and  $\eta$ -minimum, respectively; and when  $d\zeta/d\eta = 0$ , it is the sign of  $d^2\zeta/d\eta^2$  that discriminates between a  $\zeta$ -maximum and a  $\zeta$ -minimum.

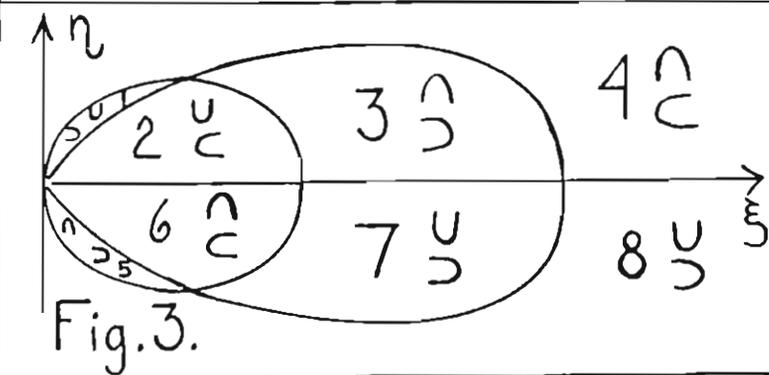
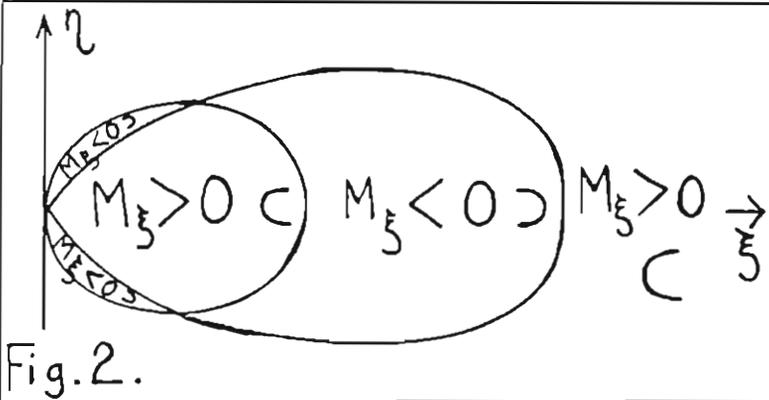
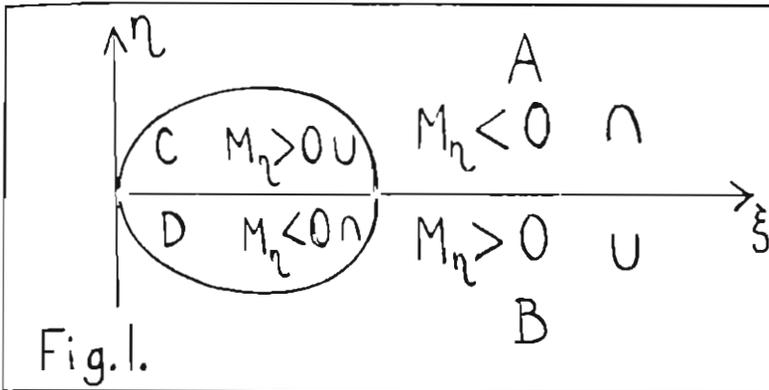
From (1) we see that the sign of  $d^2\eta/d\zeta^2$  when  $d\eta/d\zeta = 0$  is the same as the sign of  $M_2$ , since  $M$  is positive all over the allowed region. The locus  $M_2 = 0$  separates the regions where  $d^2\eta/d\zeta^2 > 0$  from the regions where  $d^2\eta/d\zeta^2 < 0$ , when  $d\eta/d\zeta = 0$ .

$$(3) \quad M_2 = \frac{6\zeta\eta}{r^5} \left( \frac{\zeta}{r^3} - \frac{1}{\zeta} \right)$$

From (3) the locus  $M_2 = 0$  consists of the  $\zeta$ -axis ( $\eta = 0$ ), the  $\eta$ -axis ( $\zeta = 0$ ) and the talweg ( $\zeta/r^3 - 1/\zeta = 0$ ).

Fig. 1. shows this locus  $M_2 = 0$ , and the four regions into which it divides the right hand side of the meridian plane. In regions A and D  $d^2\eta/d\zeta^2 < 0$  when  $d\eta/d\zeta = 0$  and therefore there can be only  $\eta$ -maxima (denoted by  $\cap$ ). In regions B and C  $d^2\eta/d\zeta^2 > 0$  when  $d\eta/d\zeta = 0$ , and therefore there can be only  $\eta$ -minima (denoted by  $\cup$ ).

From (2) we see that the sign of  $d^2\zeta/d\eta^2$  when  $d\zeta/d\eta = 0$  is the same as the sign of  $M_3$ , since  $M$  is positive all over the allowed region. The locus  $M_3 = 0$  separates



the regions where  $d^2\zeta/d\eta^2 > 0$  from the regions where  $d^2\zeta/d\eta^2 < 0$ , when  $\frac{d\zeta}{d\eta} = 0$

$$(4) \quad M_{\zeta} = -2\left(\frac{\zeta}{r^3} - \frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{r^2 - 3\zeta^2}{r^5} + \frac{1}{\zeta^2}\right)$$

From (4) the locus  $M_{\zeta} = 0$  consists of the talweg,  $\zeta/r^3 - 1/\zeta = 0$ , and the curve

$$(5) \quad \frac{r^2 - 3\zeta^2}{r^5} + \frac{1}{\zeta^2} = 0$$

The equation of this curve in polar coordinates is

$$(6) \quad r = -\cos^2\lambda + 3\cos^4\lambda$$

In (6)  $r$  is equal to zero for  $\lambda = 54^{\circ}44'$  and is positive for  $\lambda < 54^{\circ}44'$ . The maximum of  $r$  is  $r = 2$  for  $\lambda = 0^{\circ}$ . The maximum of  $\eta$ ,  $\eta = 0.51061$ , on curve (5) is for  $\zeta = 1.1771$ .

Fig. 2. shows the locus  $M_{\zeta} = 0$  and the five regions into which it divides the right hand side of the meridian plane. The signs of  $M_{\zeta}$  in the different regions are indicated; for a  $\zeta$ -maximum the symbol  $\supset$  is used, while for a  $\zeta$ -minimum  $\subset$  is used.

The loci  $M_{\zeta} = 0$  and  $M_{\eta} = 0$  divide the right hand half of the meridian plane into eight "zones" according to the type of extrema possible in each zone. We can characterize each zone by the correct pair of symbols denoting maxima and minima. Fig. 3. shows the eight zones with their respective symbols; it is convenient to assign a number to each zone. We will analyze later what happens at the boundaries of the zones.

It is possible to prove the following theorem:

Theorem: No orbit is completely contained in the interior of one zone.

Since an orbit cannot have both a maximum and a minimum in the same coordinate in the same zone, it is clear that it cannot always remain in one finite zone. In the case of each of the two infinite zones there is still the possi-

39.

bility of an orbit with two asymptotes. In zone 4 such an orbit would have to have a minimum or a horizontal asymptote both of which are impossible in this zone, since a horizontal asymptote is equivalent to a minimum at infinity. By symmetry a corresponding argument holds for zone 8.

CHAPTER VIII. TRAJECTORIES EMERGING FROM A POINT.

The trajectories are given by the differential equation

$$(1) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{2M} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \left[ M_\eta - M_\xi \frac{d\eta}{d\xi} \right]$$

where  $M$  is positive over all the allowed region,  $1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2$  is always positive, and the sign of  $d^2\eta/d\xi^2$  is the same as the sign of  $M_\eta - M_\xi \frac{d\eta}{d\xi}$ .

Let

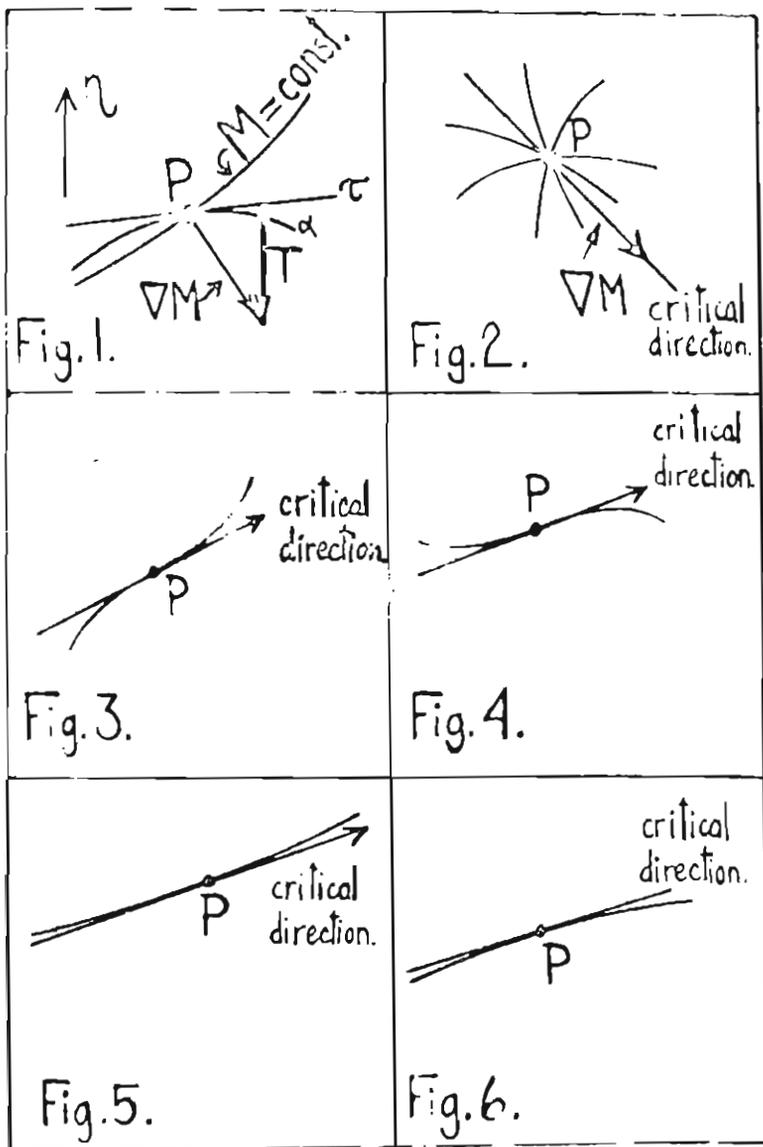
$$(2) \quad T = M_\eta - M_\xi \frac{d\eta}{d\xi}$$

For the geometrical interpretation of  $T$  consider a point  $P(\xi, \eta)$  on a trajectory  $\alpha$ . See Fig. 1. Consider the tangent  $\mathcal{T}$  to the trajectory at  $P$ , the line  $M = \text{const.}$  through  $P$  and the gradient of  $M$  at  $P$ .  $T$  is then the vertical distance from the tangent  $\mathcal{T}$  to the head of the vector  $\nabla M$ . The sign of  $T$  is obvious from Fig. 1.  $T$  points toward the concave side of the trajectory.

Considering now all trajectories through  $P$ , or, what is equivalent, rotating  $\mathcal{T}$  with  $P$  as a center one finds that there is a critical trajectory through  $P$  for which the concavity is not defined; this is the trajectory tangent to  $\text{grad } M$  at  $P$ . For all other directions the concavity is either upwards or downwards as can be seen in Fig. 2.

In Fig. 2. the orbit tangent to  $\nabla M$  is missing; it will be analyzed later.

In order to describe the configuration of the trajectories through  $P$ , certain expressions will be introduced in connection with the directions of the critical vector  $\nabla M$ . The side of the configuration to which the vector  $\nabla M$  points will be called the "pincer side", since  $\nabla M$  seems to be held by pincers; while the opposite side will be called the



"funnel side", since it resembles a funnel.

Consider the funnel-pincer sense as the positive sense along the critical direction. Then, the positive sense of the critical direction is the sense of  $\nabla M$ .

A double infinity of points in the allowed region are of the type described above for the point P, while there is only a single infinity of exceptional points, which will be discussed later.

For a complete description of the configuration at P we have still to consider the critical orbit, the one tangent to  $\nabla M$ . For this orbit  $d^2\eta/d\zeta^2 = 0$ , which means that it has either a point of inflection or a flat point according to the following criterion: when

$$\frac{d^3\eta}{d\zeta^3} = 0 \dots \dots \frac{d^{n-1}\eta}{d\zeta^{n-1}} = 0 \quad \frac{d^n\eta}{d\zeta^n} \neq 0$$

the trajectory has a point of inflection for n an odd number, and a flat point for n an even number.

#### Points of Inflection:

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} = 0 \quad \frac{d^3\eta}{d\zeta^3} = 0 \quad \dots \dots \quad \frac{d^{2k}\eta}{d\zeta^{2k}} = 0 \quad \frac{d^{2k+1}\eta}{d\zeta^{2k+1}} = A$$

If  $A > 0$  the inflection is of the type shown in Fig.3. If  $A < 0$  the inflection is of the type shown in Fig.4. That shown in Fig.3. we shall call an inflection of the type 2 or 2-inflection, because it resembles the form of the number 2. On the other hand, the type shown in Fig.4. shall be called an inflection of the type S or S-inflection, since it resembles the letter S. We are going to call S-points the points of the allowed region that have a critical trajectory with an S-inflection, and those with a critical trajectory having a 2-inflection 2-points.

#### Flat Points:

$$n = 2k$$

42.

$$\frac{d^1 \eta}{d\xi^2} = 0 \quad \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = 0 \quad \dots \quad \frac{d^{2k-1} \eta}{d\xi^{2k-1}} = 0 \quad \frac{d^{2k} \eta}{d\xi^{2k}} = A$$

If  $A > 0$  the flat point has its concavity upwards as shown in Fig.5. If  $A < 0$  the flat point has its concavity downwards as shown in Fig.6.

The flat point of Fig.5. we shall call a "bowl flat point" and the flat point of Fig.6. a "hill flat point". The points of the allowed region in which the critical trajectory has a bowl flat point we are going to call "bowl points" and the ones in which the critical trajectory has a hill flat point we are going to call "hill points".

There is a double infinity both of S-points and of 2-points; but only a single infinity of the bowl points and of the hill points. Our next task is to divide the right hand side of the meridian plane into regions of these types of points.

Fig.7. shows all four different types of points. To obtain the distribution of these points one has to calculate the loci where the third derivative,  $\eta'''$ , is zero when  $\eta'' = 0$ , and the points where the fourth derivative,  $\eta^{IV}$ , is zero when  $\eta'' = \eta''' = 0$ .

### The Third Derivatives:

From (1)

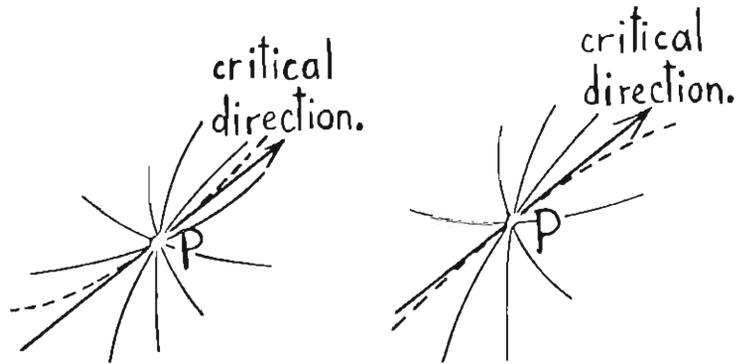
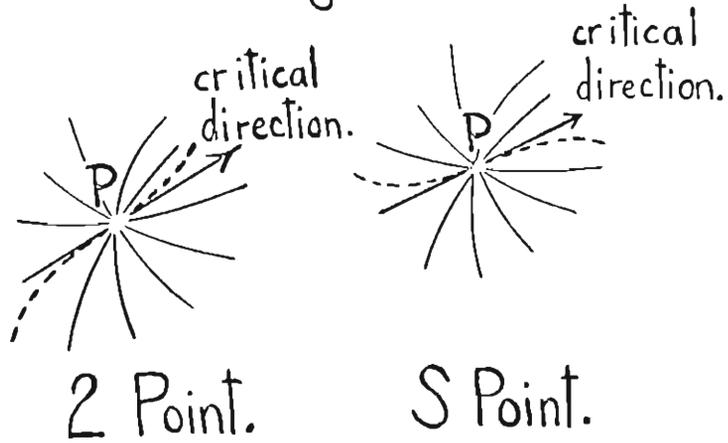
$$(3) \quad 2M\eta'' = (1 + \eta'^2)(M_2 - M_3\eta')$$

Differentiate both sides with respect to  $\xi$ .

$$(4) \quad 2M_3\eta'' + 2M_2\eta'\eta'' + 2M\eta''' = 2\eta'\eta''(M_2 - M_3\eta') + (1 + \eta'^2)[M_{32} + M_{22}\eta' - M_{33}\eta' - M_{32}\eta'^2 - M_3\eta'']$$

Putting  $\eta'' = 0$  and  $\eta' = M_2/M_3$ , which is the critical direction, one obtains

Fig. 7.



Bowl Point. Hill Point.  
 -----critical orbit.

$$(5) \quad 2M\eta'' = \left[1 + \left(\frac{M_{\eta}}{M_{\xi}}\right)^2\right] \left[M_{\xi\eta} + \frac{M_{\eta\eta}M_{\eta}}{M_{\xi}} - \frac{M_{\xi\xi}M_{\eta}}{M_{\xi}} - M_{\xi\eta} \frac{M_{\eta}}{M_{\xi}}\right] \quad 43.$$

Multiplying (5) by  $M_{\xi}^2$

$$(6) \quad 2MM_{\xi}^2\eta'' = [M_{\xi}^2 + M_{\eta}^2] [M_{\xi\eta}(M_{\xi}^2 - M_{\eta}^2) + M_{\xi}M_{\eta}(M_{\eta\eta} - M_{\xi\xi})]$$

From (6) the sign of the third derivative is the same as the sign of

$$(7) \quad U = M_{\xi\eta}(M_{\xi}^2 - M_{\eta}^2) + M_{\xi}M_{\eta}(M_{\eta\eta} - M_{\xi\xi})$$

The locus  $U = 0$  is the same as the locus defined by the pair of equations  $\eta'' = 0$  and  $\eta''' = 0$ .

To express the equation of the locus explicitly in terms of the coordinates, the partial derivatives,  $M_{\xi}$ ,  $M_{\eta}$ ,  $M_{\xi\xi}$ ,  $M_{\eta\eta}$ , must first be obtained in terms of these coordinates. In the following table, Table 1., of partial derivatives we include also the ones of a higher order than the second because they are necessary in computing  $\eta^{IV}$  and  $\eta^V$ . We use the subscript 1 to express a partial derivative with respect to  $\xi$  and the subscript 2 for the partial derivative with respect to  $\eta$ .

Let us express  $U$  in terms of  $u$  and its partial derivatives, using for this purpose the Table 1.

$$(9) \quad U = 8u^3 [u_{12}(u_2^2 - u_1^2) + u_1u_2(u_{11} - u_{22})]$$

From (9), the talweg is one of the branches of the locus  $U = 0$ . Since for all points and for all directions at the talweg  $\eta'' = 0$  and  $\eta''' = 0$  the orbits have at the points of intersection with the talweg either a flat point, when  $\eta^{IV} = 0$ , or a higher inflection, when  $\eta^{IV} = 0$  and  $\eta^V \neq 0$ .

The locus  $U = 0$  has another branch besides the talweg.

$$(10) \quad u_{12}(u_2^2 - u_1^2) + u_1u_2(u_{11} - u_{22}) = 0$$

TABLE I. TABLE OF PARTIAL DERIVATIVES OF M.

M	$a - u^2$
$M_1$	$-2uu_1$
$M_2$	$-2uu_2$
$M_{11}$	$-2u_1^2 - 2uu_{11}$
$M_{12}$	$-2u_1u_2 - 2uu_{12}$
$M_{22}$	$-2u_2^2 - 2uu_{22}$
$M_{111}$	$-6u_1u_{11} - 2uu_{111}$
$M_{112}$	$-4u_1u_{12} - 2u_2u_{11} - 2uu_{112}$
$M_{122}$	$-4u_2u_{12} - 2u_1u_{22} - 2uu_{122}$
$M_{222}$	$-6u_2u_{22} - 2uu_{222}$
$M_{1111}$	$-6u_{11}^2 - 8u_1u_{111} - 2uu_{1111}$
$M_{1112}$	$-6u_{11}u_{12} - 6u_1u_{112} - 2u_2u_{111} - 2uu_{1112}$
$M_{1122}$	$-4u_{12}^2 - 4u_2u_{112} - 2u_{11}u_{22} - 4u_1u_{122} - 2uu_{1122}$
$M_{1222}$	$-6u_{12}u_{22} - 6u_2u_{122} - 2u_1u_{222} - 2uu_{1222}$
$M_{2222}$	$-6u_{22}^2 - 8u_2u_{222} - 2uu_{2222}$

The explicit expressions of the partial derivatives of u are given in equations (8), Fig. 8.

Equations . 8.

Fig. 8.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\xi}{r^3} - \frac{1}{\xi} \\
 U_1 &= \frac{r^2 - 3\xi^2}{r^6} + \frac{1}{\xi^2} \\
 U_2 &= -\frac{3\xi\eta}{r^6} \\
 U_{11} &= \frac{-9r^2\xi + 15\xi^3}{r^7} - \frac{2}{\xi^3} \\
 U_{12} &= \frac{-3r^2\eta + 15\xi^2\eta}{r^7} \\
 U_{22} &= \frac{-3r^2\xi + 15\xi\eta^2}{r^7} \\
 U_{111} &= \frac{90r^2\xi^2 - 9r^4 - 105\xi^4}{r^9} + \frac{6}{\xi^4} \\
 U_{112} &= \frac{45r^2\xi\eta - 105\xi^3\eta}{r^9} \\
 U_{122} &= \frac{12r^4 - 105\xi^2\eta^2}{r^9} \\
 U_{222} &= \frac{45r^2\xi\eta - 105\xi\eta^3}{r^9} \\
 U_{1111} &= \frac{225r^4\xi - 1050r^2\xi^3 + 945\xi^5}{r^{11}} - \frac{24}{\xi^5} \\
 U_{1112} &= \frac{-630r^2\xi^2\eta + 45r^4\eta + 945\xi^4\eta}{r^{11}} \\
 U_{1122} &= \frac{-60r^4\xi - 210r^2\xi\eta^2 + 945\xi^3\eta^2}{r^{11}} \\
 U_{1222} &= \frac{-60r^4\eta - 210r^2\xi^2\eta + 945\xi^2\eta^3}{r^{11}} \\
 U_{2222} &= \frac{-630r^2\xi\eta^2 + 45r^4\xi + 945\xi\eta^4}{r^{11}}
 \end{aligned}$$

Substituting the values of  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_{11}$ ,  $u_{12}$  and  $u_{22}$  in terms of  $\xi$  and  $\eta$  from equations (8), we get

$$(11) \left( \frac{-3r^2\eta + 15\xi^2\eta}{r^7} \right) \left[ \frac{9\xi^2\eta^2}{r^{10}} - \left( \frac{r^2 - 3\xi^2}{r^5} + \frac{1}{\xi^2} \right)^2 \right] \\ + \left[ \frac{r^2 - 3\xi^2}{r^5} + \frac{1}{\xi^2} \right] \left[ -\frac{3\xi\eta}{r^5} \right] \left[ \frac{-9r^2\xi + 15\xi^3}{r^7} - \frac{2}{\xi} - \frac{-3r^2\xi + 15\xi^3\eta^2}{r^7} \right] = 0$$

The locus given by (11) consists of

$$(12) \quad \eta = 0$$

$$(13) \quad \xi = 0$$

and

$$(14) \quad (r^2\xi^2 - 3\xi^4 + r^5)(r^4\xi^2 + 13r^2\xi^4 - 15\xi^6 + 3r^2 - 5r^5\xi^2) = \\ 9\xi^6\eta^2(r^2 - 5\xi^2)$$

It is convenient to introduce polar coordinates to express the equation of locus (14).

$$(15) \quad \xi = r \cos \lambda, \quad \eta = r \sin \lambda$$

From (14) and (15)

$$(16) \quad r = \cos^2 \lambda \frac{4 - \cos^2 \lambda \pm \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda}}{2(5 \cos^2 \lambda - 3)}$$

Since  $r$  has only positive values the locus (16) is real only for

$$(17) \quad \frac{4 - \cos^2 \lambda \pm \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda}}{2(5 \cos^2 \lambda - 3)} \geq 0$$

For the positive sign of the square root, (17) is satisfied by either

$$(18) \quad \begin{cases} 4 - \cos^2 \lambda + \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda} \geq 0 \\ 5 \cos^2 \lambda - 3 > 0 \end{cases}$$

45.

$$\text{or } (19) \begin{cases} 4 - \cos^2 \lambda + \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda} \leq 0 \\ 5 \cos^2 \lambda - 3 < 0 \end{cases}$$

The first inequality of (18) is always satisfied because

$$\sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda} > \sqrt{21} \cos^2 \lambda$$

and hence

$$(20) \quad 4 - \cos^2 \lambda + \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda} > (\sqrt{21} - 1) \cos^2 \lambda + 4 > 0$$

Since the first inequalities of each of (18) and (19) are mutually exclusive both cannot be satisfied at the same time, and (19) can be discarded.

The second inequality of (18) is satisfied for

$$(21) \quad |\cos \lambda| > \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Hence the locus

$$(22) \quad r = \cos^2 \lambda \frac{4 - \cos^2 \lambda + \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda}}{2(5 \cos^2 \lambda - 3)}$$

exists for

$$(23) \quad |\cos \lambda| > \sqrt{\frac{3}{5}}$$

For  $|\cos \lambda| = \sqrt{3/5}$  the locus has asymptotes which correspond to

$$(24) \quad \begin{aligned} \lambda &= 39^\circ 13' 53'' \\ \lambda &= -39^\circ 13' 53'' \end{aligned}$$

For the negative sign of the square root (17) is satisfied by

$$(25) \quad \begin{cases} 4 - \cos^2 \lambda - \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda} \geq 0 \\ 5 \cos^2 \lambda - 3 > 0 \end{cases}$$

or by

$$(26) \begin{cases} 4 - \cos^2 \lambda - \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda} \leq 0 \\ 5 \cos^2 \lambda - 3 < 0 \end{cases}$$

The system of inequalities (25) can never be satisfied, since the first inequality is satisfied for  $|\cos \lambda| < \sqrt{3/5}$  and the second inequality for  $|\cos \lambda| > \sqrt{3/5}$ . The system (26) is also inconsistent, the first inequality being satisfied for  $|\cos \lambda| > \sqrt{3/5}$  and the second for  $|\cos \lambda| < \sqrt{3/5}$ .

It remains to examine the value of  $r$  for  $|\cos \lambda| = \sqrt{3/5}$ . Fortunately  $r$  is negative for this critical value.

#### Conclusions:

The locus ( $\eta'' = 0$ ,  $\eta''' = 0$ ) consists of  
 the } -axis,  $\eta = 0$   
 the talweg,  $u = 0$   
 the curve (third branch)  $r = \cos^2 \lambda \frac{4 - \cos^2 \lambda + \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda}}{2(5 \cos^2 \lambda - 3)}$

where  $-39^\circ 13' 53'' \leq \lambda \leq +39^\circ 13' 53''$

The two asymptotes are  $\lambda = \pm 39^\circ 13' 53''$ .

The  $\eta$ -axis also belongs to the locus but is not essential because we use only the right hand side of the meridian plane.

Fig.9. shows the three branches of the locus ( $\eta'' = \eta''' = 0$ ), the } -axis, the talweg, and the third branch. Table 2. gives the coordinates of several points on the third branch.

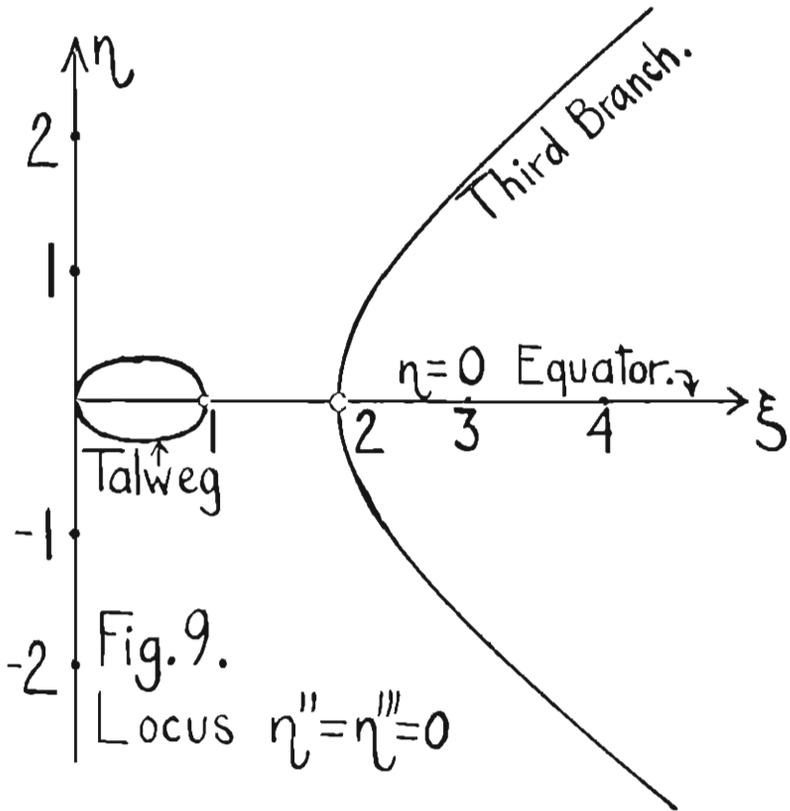
The locus  $\eta'' = \eta''' = 0$  divides the plane into six regions in which  $\eta''$  is alternately positive and negative provided  $\eta''' = 0$ . Fig.10. gives the six regions, the sign of the third derivative in them and the type of points in each one, using 2 for the 2-points and S for the S-points.

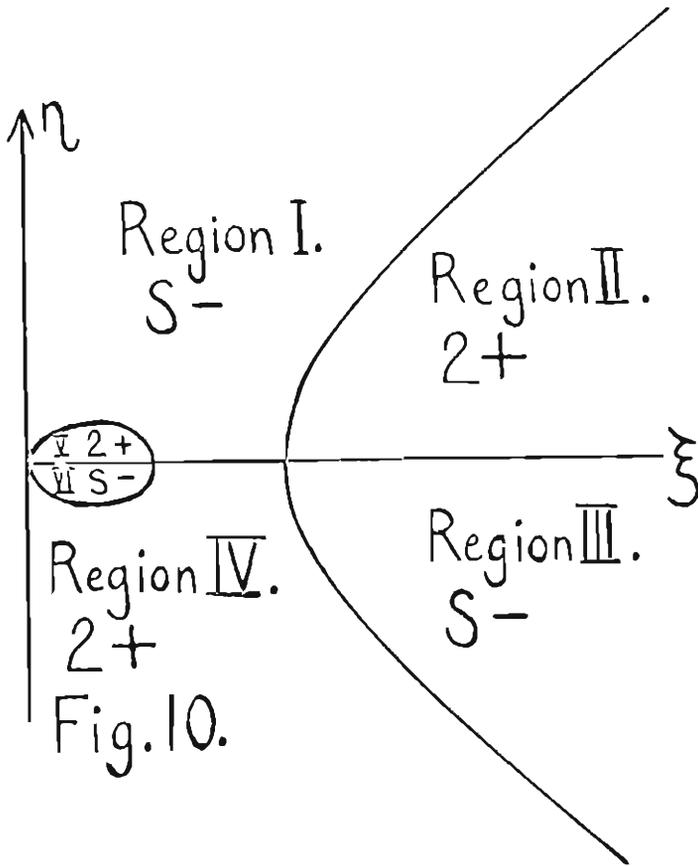
#### The Fourth Derivative:

Since the third derivative  $\eta'''$  is zero in the critical direction for points on the equator, the talweg and the

TABLE 2:Third Branch of  $\eta'' = \eta''' = 0.$ 

$\xi$	$\eta$
2.0000	0.0000
2.0903	0.5212
2.4315	1.0826
3.1292	1.8067
4.0460	2.6275
5.4169	3.7930
6.7504	4.9045
9.2939	7.0035
11.6857	8.9668
16.0083	12.5071
26.2532	20.8825
80.7254	65.3698





third branch we must analyze the sign of the fourth derivative to determine the character of the critical orbit.

Differentiating (4) we obtain

$$\begin{aligned}
 (27) \quad & 2M_{\xi\xi}\eta'' + 2M_{\xi\eta}\eta'\eta'' + 2M_{\xi}\eta''' + 2M_{\xi\eta}\eta'\eta'' + 2M_{\eta\eta}\eta'^2\eta'' \\
 & + 2M_{\eta}\eta''^2 + 2M_{\eta}\eta'\eta''' + 2M_{\xi}\eta''' + 2M_{\eta}\eta'\eta''' + 2M_{\eta}\eta''^2 \\
 & = 2\eta''^2(M_{\eta} - M_{\xi}\eta') + 2\eta'\eta'''(M_{\eta} - M_{\xi}\eta') \\
 & + 2\eta'\eta''(M_{\xi\eta} + M_{\eta\eta}\eta' - M_{\xi}\eta'' - M_{\xi\xi}\eta' - M_{\xi\eta}\eta'^2) \\
 & + 2\eta'\eta''(M_{\xi\eta} + M_{\eta\eta}\eta' - M_{\xi\xi}\eta' - M_{\xi\eta}\eta'^2 - M_{\xi}\eta''^2) \\
 & + [1 + \eta'^2] [M_{\xi\xi\eta} + M_{\xi\eta\eta}\eta' + M_{\xi\eta\eta}\eta' + M_{\eta\eta\eta}\eta'^2 \\
 & + M_{\eta\eta}\eta'' - M_{\xi\xi\xi}\eta' - M_{\xi\xi\eta}\eta'^2 - M_{\xi\xi}\eta'' \\
 & - M_{\xi\xi\eta}\eta'^2 - M_{\xi\eta\eta}\eta'^3 - 2M_{\xi\eta}\eta'\eta'' \\
 & - M_{\xi\xi}\eta'' - M_{\xi\eta}\eta'\eta'' - M_{\xi}\eta''^2]
 \end{aligned}$$

Putting in (27)  $\eta' = M_{\eta}/M_{\xi}$  which is the critical direction, and  $\eta'' = \eta''' = 0$ , we obtain  $\eta^{IV}$  for the points on the locus  $\eta'' = \eta''' = 0$ .

$$\begin{aligned}
 (28) \quad 2M_{\eta}\eta^{IV} &= [1 + \eta'^2] [M_{\xi\xi\eta} + \frac{M_{\eta}}{M_{\xi}}(2M_{\xi\eta\eta} - M_{\xi\xi\xi}) \\
 & + \frac{M_{\eta}^2}{M_{\xi}^2}(M_{\eta\eta\eta} - 2M_{\xi\xi\eta}) - M_{\xi\eta\eta}\frac{M_{\eta}^3}{M_{\xi}^3}
 \end{aligned}$$

Since  $M$  and  $(1 + \eta'^2)$  are positive all over the allowed region, the sign of  $\eta^{IV}$  is the same as that of  $W$ .

$$\begin{aligned}
 (29) \quad W &= M_{\xi\xi\eta} + \frac{M_{\eta}}{M_{\xi}}(2M_{\xi\eta\eta} - M_{\xi\xi\xi}) + \frac{M_{\eta}^2}{M_{\xi}^2}(M_{\eta\eta\eta} - 2M_{\xi\xi\eta}) \\
 & - M_{\xi\eta\eta}\frac{M_{\eta}^3}{M_{\xi}^3}
 \end{aligned}$$

From (29) and the Table 1. of the partial derivatives

48.

$$\begin{aligned}
 (30) \quad W = & -4u_1u_{112} - 2u_2u_{111} - 2uu_{112} + \frac{u_2}{u_1}(6u_1u_{111} + 2uu_{111}) \\
 & - 8u_2u_{112} - 4u_1u_{222} - 4uu_{122} + \frac{u_2^2}{u_1^2}(8u_1u_{112} + 4u_2u_{111}) \\
 & + 4uu_{112} - 6u_2u_{222} - 2uu_{222} + \frac{u_2^3}{u_1^3}(4u_2u_{112} + 2u_1u_{222}) \\
 & + 2uu_{122}
 \end{aligned}$$

Simplifying (30) we obtain

$$\begin{aligned}
 (31) \quad u_1^2 W = & 4u_1u_2(u_2^2 - u_1^2) + 4u_1u_2(u_1^2 + u_2^2)(u_{111} - u_{222}) \\
 & + 2u(-u_1^2u_{112} + u_1^2u_2(u_{111} - 2u_{122}) + u_1u_2^2(u_{112} \\
 & - u_{222}) + u_2^2u_{122})
 \end{aligned}$$

From (31)

$$\begin{aligned}
 (32) \quad u_1^2 W = & 4(u_1^2 + u_2^2)(u_1u_2(u_2^2 - u_1^2) + u_1u_2(u_{111} - u_{222})) \\
 & + 2u(-u_1^2u_{112} + u_1^2u_2(u_{111} - 2u_{122}) + u_1u_2^2(u_{112} \\
 & - u_{222}) + u_2^2u_{122})
 \end{aligned}$$

The sign of  $\gamma''$  when  $\gamma'' = \gamma''' = 0$  is the same as the sign of  $W$ . We have therefore to analyze the sign of  $W$  for all points of the locus ( $\gamma'' = \gamma''' = 0$ ). In this chapter we consider only the case of the third branch, leaving the talweg and the equator for two separate chapters.

From equations (10) and (32) we have for the third branch

$$\begin{aligned}
 (33) \quad u_1^2 W = & 2u(-u_1^2u_{112} + u_1^2u_2(u_{111} - 2u_{122}) + u_1u_2^2(u_{112} \\
 & - u_{222}) + u_2^2u_{122})
 \end{aligned}$$

The sign of  $W$  is hence the same as the sign of

$$\begin{aligned}
 (34) \quad \omega = & uu_1(-u_1^2u_{112} + u_1^2u_2(u_{111} - 2u_{122}) + u_1u_2^2(u_{112} \\
 & - u_{222}) + u_2^2u_{122})
 \end{aligned}$$

Substituting in (34) the coordinates of points of the third branch we see that  $\omega$  is positive for the upper side of the third branch and negative for the lower part.

49.

Theorem: The points on the upper side of the third branch are all "bowl points", and the points on the lower side are all "hill points". The isolated point  $(2,0)$  will be analyzed later.

CHAPTER IX. THE POINTS ON THE LINES  $M = 0$ .

In the  $\xi, \eta$  plane the points on the line  $M = 0$  are singular points, which fact can be seen from the differential equation of the trajectories.

$$(1) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{1}{2M} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \left[ M_\eta - M_\xi \frac{d\eta}{d\xi} \right]$$

To find out what kind of singularity these points are, we will follow the method of H. Poincaré<sup>2</sup>.

In order to apply Poincaré's method one has to transform equation (1) into an equivalent system of equations of the first order. This can be done by introducing a new auxiliary variable  $\xi$ . The system in question has to be of the following form:

$$(2) \quad \frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\varepsilon}{E}$$

where  $X$ ,  $Y$  and  $E$  are functions of  $\xi$ ,  $\eta$  and  $\varepsilon$ .

A convenient way to perform the transformation consists in establishing the partial differential equation of the geodesic parallels. Assume  $c$  is any curve in the allowed region. Consider the family of orthogonal geodesics to the line  $c$ . The orthogonal trajectories of this family of geodesics form a family of geodesic parallels. All families of geodesic parallels satisfy the same partial differential equation<sup>3</sup>. For the surface defined by

$$(3) \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

the geodesic parallels are given by

$$(4) \quad E \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 - 2F \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) + G \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^2 = EG - F^2$$

Hence in our case, in which

$$(5) \quad E = G = M, \quad F = 0$$

$$(6) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 = M$$

equation (6) is nothing else than the Hamilton-Jacobi equation of the dynamical problem, and the lines  $\Phi = \text{const.}$  are the geodesic parallels.

From Fig. 1. and equation (6)

$$(7) \quad |\nabla \Phi| = \sqrt{M}$$

If we define the auxiliary variable  $\varepsilon$  by

$$(8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \sqrt{M} \cos \varepsilon$$

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \sqrt{M} \sin \varepsilon$$

$\varepsilon$  is the inclination of the geodesic going through P orthogonal to  $\Phi = \text{const.}$

By differentiating (8) and (9) with respect to  $\eta$  and

} respectively, we have

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = -\sqrt{M} \sin \varepsilon \varepsilon_{\eta} + \frac{M_{\eta}}{2\sqrt{M}} \cos \varepsilon$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = \sqrt{M} \cos \varepsilon \varepsilon_{\xi} + \frac{M_{\xi}}{2\sqrt{M}} \sin \varepsilon$$

From (10) and (11)

$$(12) \quad \sqrt{M} \cos \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \sqrt{M} \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = \frac{M_{\eta}}{2\sqrt{M}} \cos \varepsilon - \frac{M_{\xi}}{2\sqrt{M}} \sin \varepsilon$$

This partial differential equation can be transformed\* immediately into a system of the type of equation (2).

$$(13) \quad \frac{d\xi}{\sqrt{M} \cos \varepsilon} = \frac{d\eta}{\sqrt{M} \sin \varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{\frac{M_{\eta}}{2\sqrt{M}} \cos \varepsilon - \frac{M_{\xi}}{2\sqrt{M}} \sin \varepsilon}$$

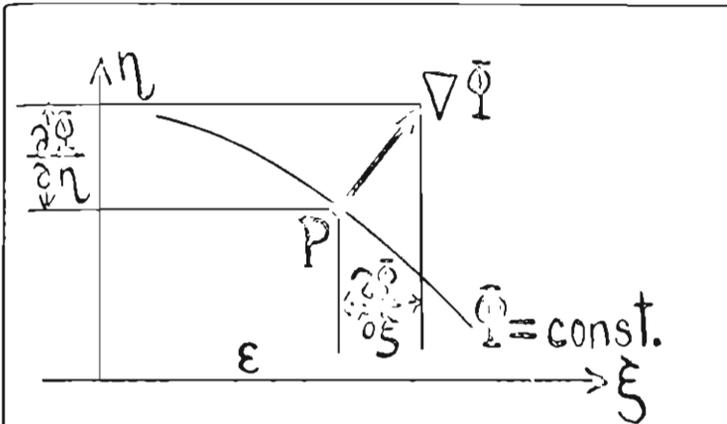


Fig. 1.

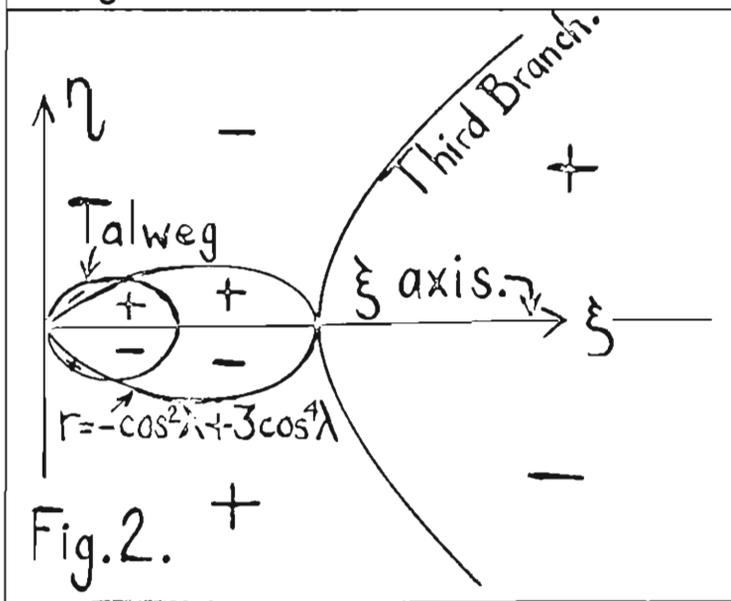


Fig. 2.

Simplifying (13), we have

$$(14) \quad \frac{d\xi}{2M \cos \varepsilon} = \frac{d\eta}{2M \sin \varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{M_\eta \cos \varepsilon - M_\zeta \sin \varepsilon}$$

One can apply to (14) Poincaré's criteria for singular points, although it is to be remembered that Poincaré uses only polynomials for denominators. Comparing (14) and (2)

$$(15) \quad \begin{cases} X = 2M \cos \varepsilon \\ Y = 2M \sin \varepsilon \\ E = M_\eta \cos \varepsilon - M_\zeta \sin \varepsilon \end{cases}$$

Poincaré establishes a determinantal equation

$$(16) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} - S & \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} - S & \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial E}{\partial \xi} & \frac{\partial E}{\partial \eta} & \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} - S \end{vmatrix} = 0$$

In our case

$$(17) \quad \begin{vmatrix} 2M_\zeta \cos \varepsilon - S & 2M_\eta \cos \varepsilon & -2M \sin \varepsilon \\ 2M_\zeta \sin \varepsilon & 2M_\eta \sin \varepsilon - S & 2M \cos \varepsilon \\ M_\eta \cos \varepsilon - M_\zeta \sin \varepsilon & M_\eta \cos \varepsilon - M_\zeta \sin \varepsilon & -M_\eta \sin \varepsilon - M_\zeta \cos \varepsilon - S \end{vmatrix} = 0$$

The singular points are given according to Poincaré by

$$(18) \quad X = Y = E = 0$$

From (15) and (18)

$$(19) \quad M = 0 \quad \text{and} \quad \tan \varepsilon = \frac{M_\eta}{M_\zeta}$$

53.

From (19) the orbits starting at  $M = 0$  have the direction of  $\nabla M$ , i.e., they are perpendicular to  $M = 0$ . At each point of the  $M = 0$  line there is only one such orbit.

The roots of the determinantal equation (17) give the nature of the singularities. For  $M = 0$  equation (17) becomes

$$(20) S[S - 2M_3 \cos \varepsilon - 2M_2 \sin \varepsilon][S + M_3 \cos \varepsilon + M_2 \sin \varepsilon] = 0$$

From (20)

$$(21) \begin{cases} S_1 = 0 \\ S_2 = 2(M_3 \cos \varepsilon + M_2 \sin \varepsilon) \\ S_3 = -(M_3 \cos \varepsilon + M_2 \sin \varepsilon) \end{cases}$$

Except at a few special points, treated later, the determinantal equation has two roots,  $S_2$  and  $S_3$ , of opposite signs. When a point satisfies this condition, it has been called by Poincaré a "col". He has established the fact that there is only one isolated trajectory reaching the "col", all other trajectories remaining at finite distances from it\*.

Thus the lines  $M = 0$  are composed of "cols" except when  $S_2 = S_3 = 0$ . This last equation is equivalent to

$$(22) M_3 \cos \varepsilon + M_2 \sin \varepsilon = 0$$

Recall that

$$(23) M_2 \cos \varepsilon - M_3 \sin \varepsilon = 0$$

at the line  $M = 0$ . Equations (22) and (23) are compatible only for  $M = M_3 = M_2 = 0$ .

This condition is satisfied at the dipole for all  $j_1$ 's. The orbits emerging from the dipole have been studied in detail in Chapter VI.

This condition is also fulfilled by all points of the talweg for  $\gamma_1 = \infty$ . For this special  $\gamma_1$  the allowed region consists entirely of the talweg and there is only one possible orbit, namely, the talweg itself.

There is one other case in which  $S_2 = S_3 = 0$  which occurs for  $\gamma_1 = 1$  at the point (2,0). In this case there is a single orbit passing through this point, i.e., the equatorial orbit.

With the above mentioned exceptions, all of the points of the lines  $M = 0$  are "cols". The isolated trajectory which reaches the "col" on the line  $M = 0$  is called in the theory of cosmic radiation a "self-reversing orbit".

It is necessary to find the sense of the concavity of the self-reversing trajectories at the line  $M = 0$ . From equation (4) of chapter VIII for  $M = 0$ , and  $\eta' = M_2/M_3$  we obtain

$$(24) \quad \eta'' = \frac{1}{3M_3^3} [M_{32}\eta (M_3^2 - M_2^2) + M_3 M_2 \eta (M_{22} - M_{33})]$$

On the lines  $M = 0$ ,  $\eta''$  has the same sign as

$$(25) \quad \mu = M_3 [M_{32}\eta (M_3^2 - M_2^2) + M_3 M_2 \eta (M_{22} - M_{33})]$$

The locus  $\mu = 0$  separates on the lines  $M = 0$  the points at which the concavity is directed upwards from those at which it is directed downwards. This locus consists of the lines  $M_3 = 0$  and  $U = 0$ ; the latter is discussed in detail in chapter VIII, page 43.

The locus  $\mu = 0$  consists therefore of:

- 1)  $r = -\cos^2 \lambda + 3 \cos^4 \lambda$
  - 2) the talweg
  - 3) the  $\xi$ -axis,  $\eta = 0$
  - 4) the third branch,
- $$r = \cos^2 \lambda \frac{4 - \cos^2 \lambda + \sqrt{4 + 21 \cos^4 \lambda}}{2(5 \cos^2 \lambda - 3)}$$
- }  $U = 0$

55.

Fig.2. shows this locus and the sign of  $\mu$  in the ten regions into which the right-hand side of the meridian plane is divided. This figure shows that the talweg does not separate regions where the sign of  $\mu$  changes.

Fig.3. gives the sign of  $\eta''$  on the lines  $M = 0$  and the sense of the concavity of the orbits at the points of self-reversal; the talweg has been omitted because it is unnecessary. We shall refer to the locus of Fig.3. as the essential part of the locus of  $\mu = 0$ .

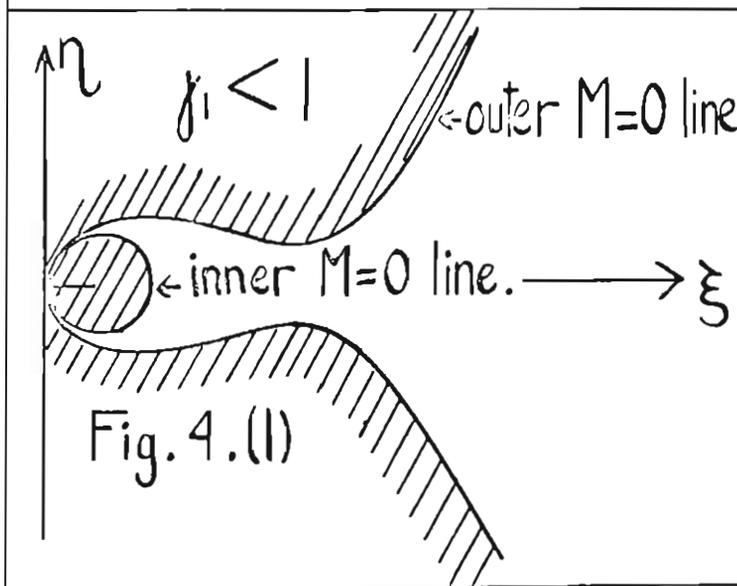
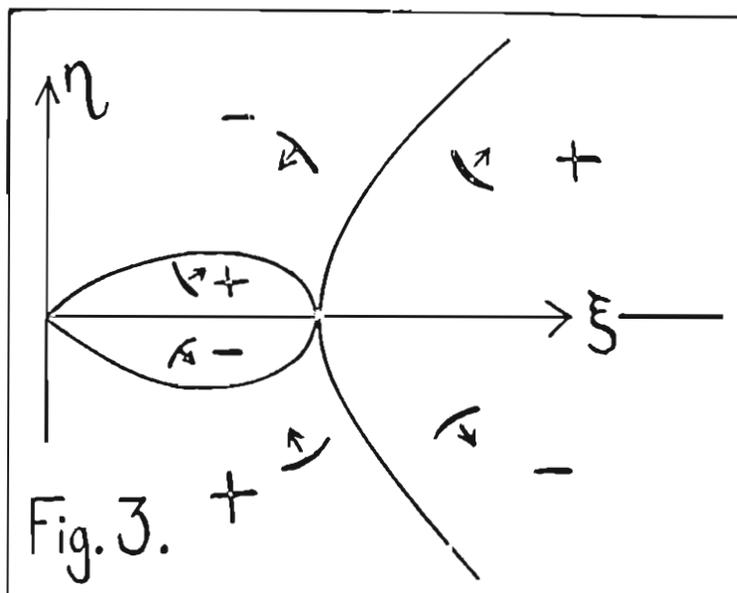
The line  $M = 0$  consists for all  $\beta_i$ 's of three branches. Fig.4. gives the three different possible cases and the designations that we are going to use. The inner  $M = 0$  line cuts the locus of Fig.3 four times for all  $\beta_i$ 's.

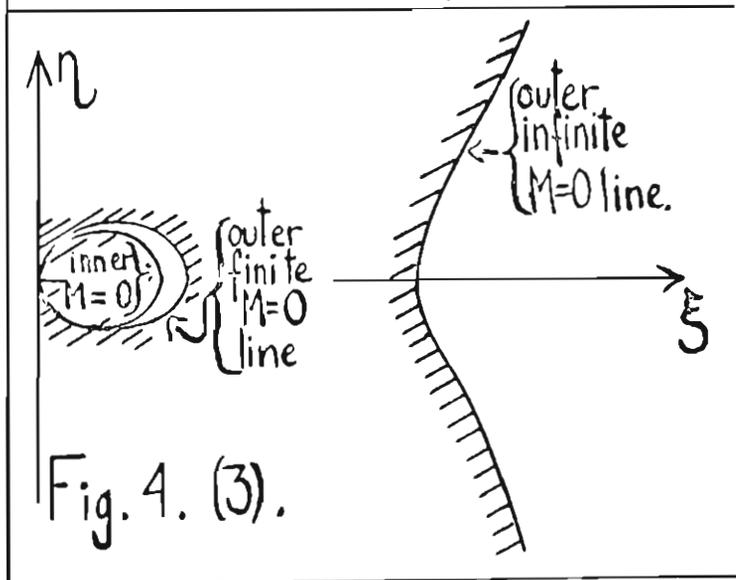
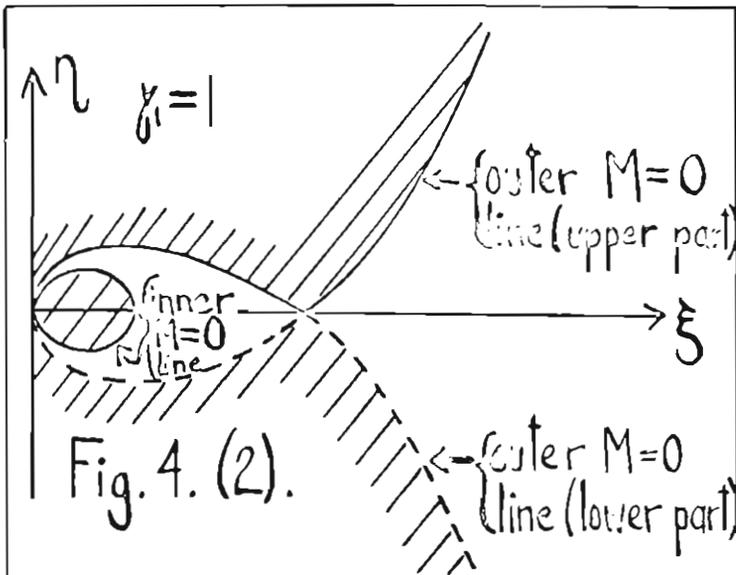
Fig.5. shows the sense of the concavity at the points of self-reversal for this line. The points of intersection  $M_1$  and  $M_2$  are the  $\eta$ -maximum and the  $\eta$ -minimum of the inner  $M = 0$  line; and the points O and E are its  $\xi$ -minimum and  $\xi$ -maximum.

The sense of the concavity of the self-reversing orbits starting from any point between E and  $M_1$  is upwards, and for those between  $M_1$  and O downwards. At  $M_1$  the sense of the concavity is not defined by the sign of  $\eta''$ , but can be obtained from the sign of  $\xi''$ . The change of the concavity at  $M_1$  and  $M_2$  from upwards to downwards is not essential, as can be seen if we refer the concavity to the outwardly directed normal of the line  $M = 0$ . On analysis we find that above the equator the sense of the concavity is always to the left of the normal, and below the equator to the right.

From O there starts only one orbit, the dipole orbit, which has been studied in chapter VI. The orbit that starts from E is the equatorial orbit, which is a straight line along the  $\xi$ -axis.

As  $\beta_i$  is varied there are seven different cases of the relative position of the  $M = 0$  line with respect to the essential part of  $\mu = 0$ . These are shown in Fig.6. The maxima and minima of the outer  $M = 0$  lines lie on the line





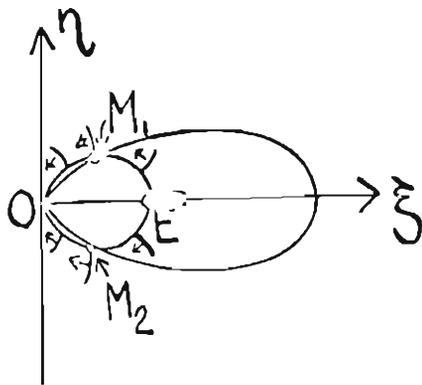
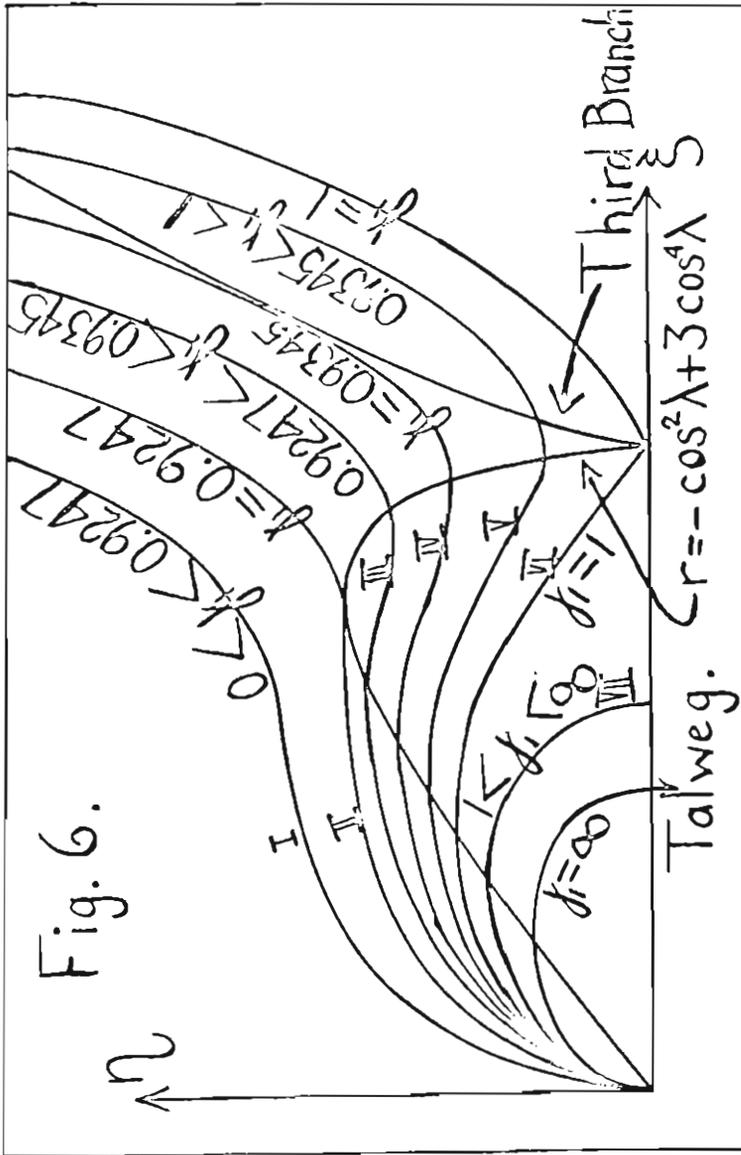


Fig. 5.



$$r = -\cos^2 \lambda + 3\cos^4 \lambda$$

which is shown by the oval part of the dashed line in Fig.6. We have numbered the cases from 1 to 7, and will consider each one separately.

From Figs. 3. and 6. we find the sense of the concavity for the self-reversing orbits at the line  $M = 0$  for all seven different cases. Figs. 7., 8., 9., 10., 11., 12. and 13. show each one separately.

In Fig.8. C is an inflection point with a horizontal tangent. The sense of the concavity in C suffers no real discontinuity.

Again, in Fig.9., the sense of the concavity suffers no discontinuity in  $C_1$  and  $C_2$ , the critical points. The concavity is directed downwards from 0 to  $C_1$ , upwards from  $C_1$  to  $C_2$  and downwards again from  $C_2$  to  $\infty$ . But one can say that the concavity is always directed towards the origin when going along the line  $M = 0$ .

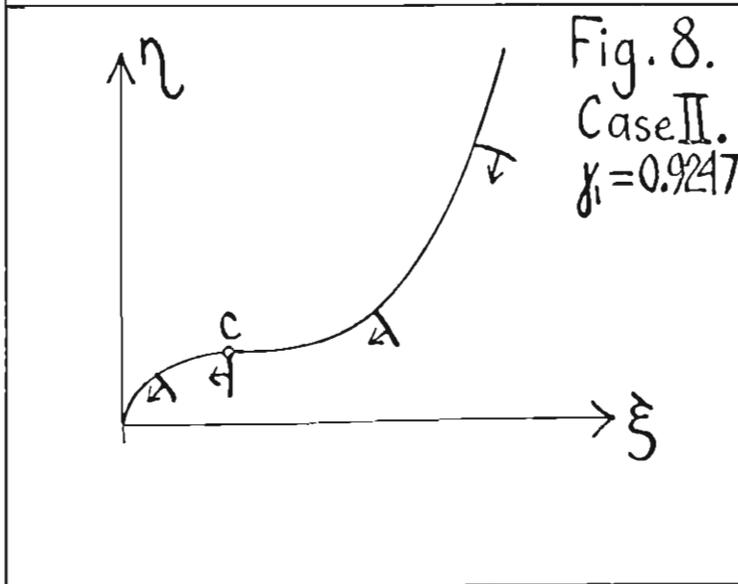
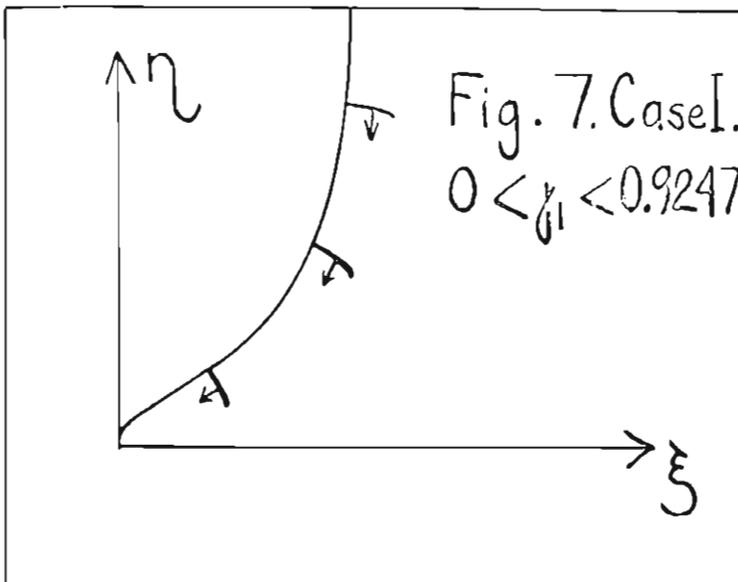
At  $C_3$  in Fig.10.  $\eta'' = 0$  and the tangent to the self-reversing trajectory at that point is not vertical as in  $C_1$  and  $C_2$ . The trajectory has a higher contact with its tangent at  $C_3$  than the other self-reversing trajectories; the contact is of the third order like that between a curve and its tangent at a point of inflection.

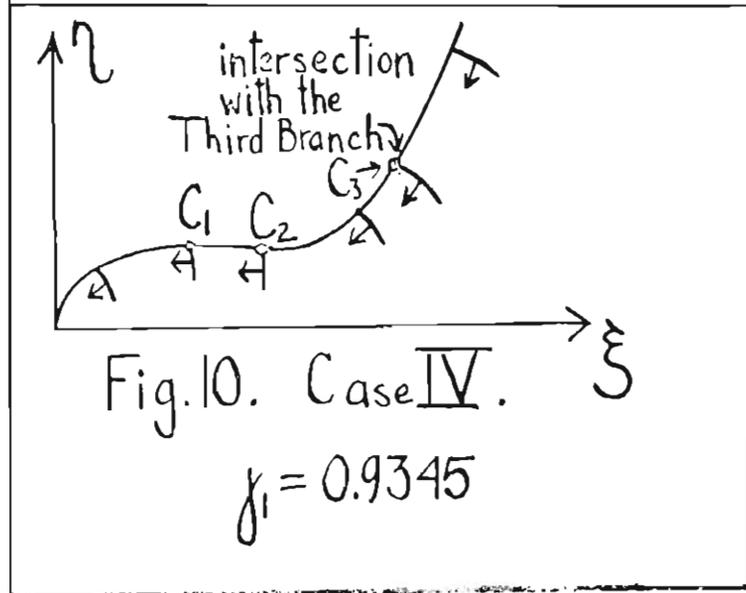
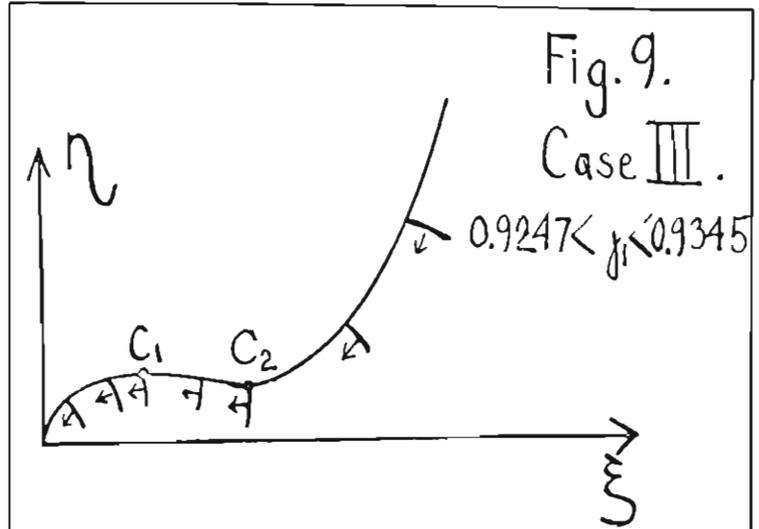
To analyze what happens in Fig.11. at  $C_3$  and  $C_4$  it is necessary to calculate the third derivative at  $M = 0$ . From equation (27), page 47, and considering that at  $C_3$  and  $C_4$

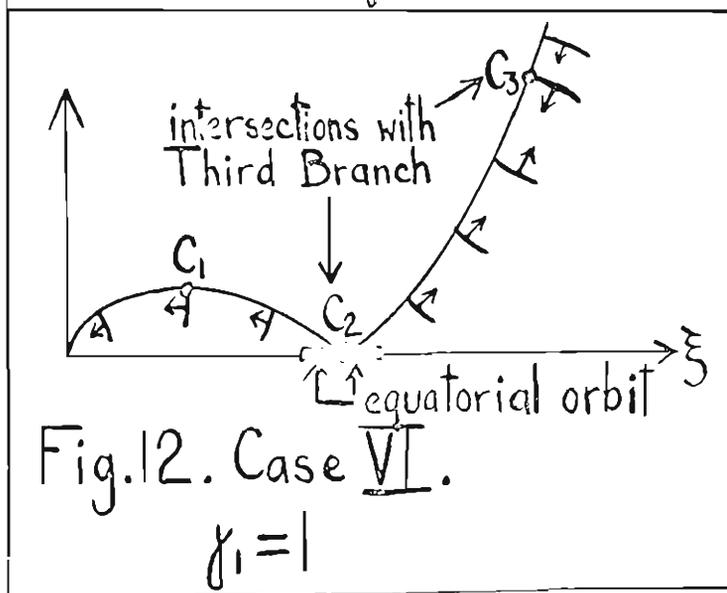
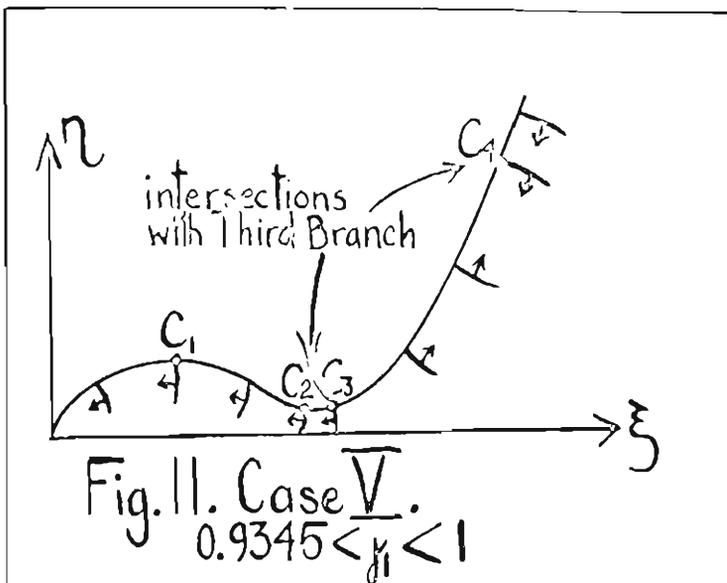
$$\eta'' = 0, \quad M = 0, \quad \text{and} \quad \eta' = M_{\eta} / M_{\xi} \quad \text{we obtain}$$

$$(26) \quad 5 \eta''' (M_{\xi}^2 + M_{\eta}^2) = \frac{1}{M_{\xi}^2} \left[ -M_{\xi\xi\xi} M_{\xi}^5 + M_{\xi}^4 M_{\eta} (-2M_{\xi\xi\eta} + M_{\xi\xi\xi}) \right. \\ \left. + M_{\xi}^3 M_{\eta}^2 (-M_{\eta\eta\eta} + M_{\xi\xi\eta}) + M_{\xi}^2 M_{\eta}^3 (M_{\xi\xi\xi} - M_{\xi\eta\eta}) + M_{\xi} M_{\eta}^4 (2M_{\xi\xi\eta} - M_{\eta\eta\eta}) \right. \\ \left. + M_{\eta}^3 M_{\eta}^5 \right]$$

The sign of  $\eta'''$  is the same as the sign of







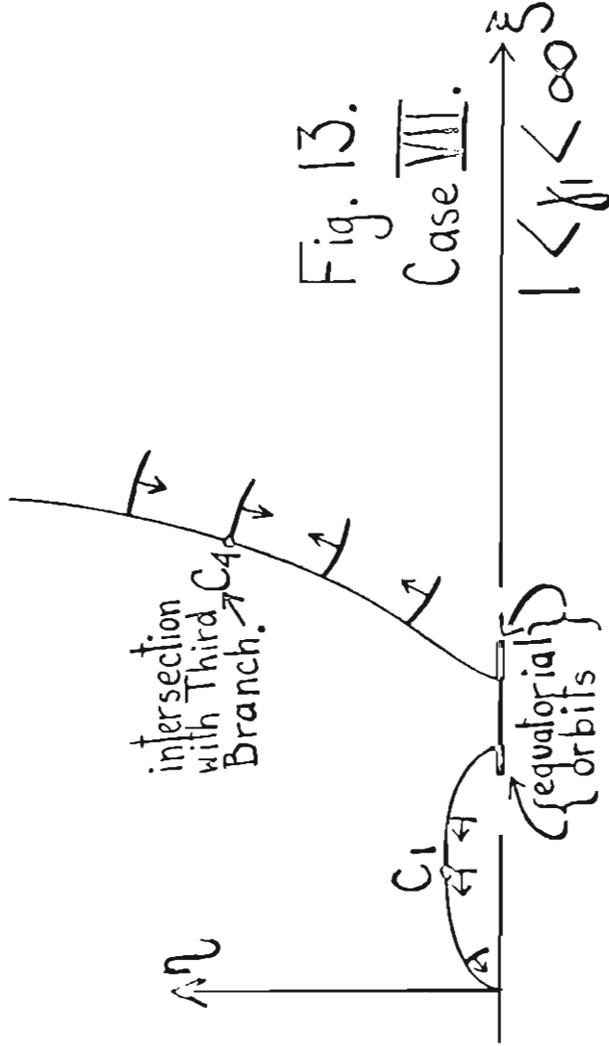


Fig. 13.

Case VII.

57.

$$(27) \quad T = -M_3 \left( M_{557} + \frac{M_7}{M_3} (2M_{577} - M_{555}) + \frac{M_9}{M_3} (M_{777} - 2M_{557}) - M_{377} \frac{M_9}{M_3} \right)$$

The parenthesis in equation (27) is the expression W of equation (29), page 47. Hence

$$(28) \quad T = -M_3 W$$

For all points on the upper side of the third branch, and hence for  $C_3$  and  $C_4$ , W is positive, as shown on page 48. From Fig.2., chapter VII, one can see that  $M_3$  is positive for the upper side of the third branch. Hence  $\eta''$  is negative at  $C_3$  and  $C_4$ . The sense of the concavity of the self-reversing trajectories starting from  $C_3$  and  $C_4$  is as shown in Fig.11.; the radius of curvature of these two trajectories at  $C_3$  and  $C_4$  is infinite, whereas it is finite for the other self-reversing trajectories.

The analysis made for  $C_3$  and  $C_4$  of Fig.11. holds also for  $C_3$  of Fig.12.

#### References:

1. Oeuvres de Henri Poincaré. Tome I, pages 167-181. Paris, 1928.
2. L. Bianchi, loc.cit., ref.3, chapter I. Page 287.
3. George Boole, A Treatise on Differential Equations. Pages 324-325. New York, 1931.

CHAPTER X. THE POINTS ON THE TALWEG.

The points on the talweg are peculiar in that they do not belong to any of the four classes of points, i.e., 3-points, 2-points, bowl points or hill points. It is to be remembered that for the latter types of points the second derivative vanishes in one direction only, i.e., the critical direction; but in the case of the talweg the second derivative vanishes in all directions, making it necessary to analyze the third derivative more completely.

We have already seen that it is zero in a direction perpendicular to the talweg.

From equation (4), page 42, for the points on the talweg

$$(1) \quad 2a\eta''' = (1 + \eta'^2) [M_{3\eta} + (M_{\eta\eta} - M_{33})\eta' - M_{3\eta}\eta'^2]$$

The sign of  $\eta'''$  is therefore the same as the sign of

$$(2) \quad J = M_{3\eta} + (M_{\eta\eta} - M_{33})\eta' - M_{3\eta}\eta'^2$$

$J$  or  $\eta'''$  is zero for the directions defined by the equation.

$$(3) \quad M_{3\eta} + (M_{\eta\eta} - M_{33})\eta' - M_{3\eta}\eta'^2 = 0$$

In order to find these directions we solve (3) for

$$(4) \quad \eta' = \frac{M_{\eta\eta} - M_{33} \pm \sqrt{(M_{\eta\eta} - M_{33})^2 + 4M_{3\eta}^2}}{2M_{3\eta}}$$

Let us express equation (4) in terms of the derivatives of  $u$  by means of Table 1. of chapter VIII.

$$(5) \quad \eta'_1 = \frac{u_2}{u_1} \qquad \eta'_2 = -\frac{u_1}{u_2}$$

Since the equation of the talweg is  $u = 0$ , from (5) we know that the two directions for which  $\eta''$  is zero for points on the talweg are the directions of the talweg itself and the normal to it.

It is interesting to find the sign of the third derivative for the other directions. Express (2) in terms of the derivatives of  $u$

$$(6) \quad J = -2u_1u_2 + 2(-u_2^2 + u_1^2)\eta' + 2u_1u_2\eta'^2$$

$J$  has therefore the same sign as

$$(7) \quad K = u_1u_2\eta'^2 + (u_1^2 - u_2^2)\eta' - u_1u_2$$

and as

$$(8) \quad L = u_1u_2 + (u_1^2 - u_2^2)\frac{1}{\eta'} - u_1u_2\left(\frac{1}{\eta'}\right)^2$$

Consider Fig. 1. where  $M_1$  and  $M_2$  are the  $\eta$ -maximum and  $\eta$ -minimum respectively of the talweg, and  $E$  and  $O$  its  $\xi$ -maximum and  $\xi$ -minimum. Consider the tangent and the normal to the talweg as the coordinate axes of a system of coordinates whose origin goes along the talweg from  $O$  to  $M_1$ ,  $E$ ,  $M_2$  and to  $O$  again. There are four regions to be considered, e.g.,  $OM_1$ ,  $M_1E$ ,  $EM_2$ ,  $M_2O$ . The symmetry of the problem with respect to the  $\xi$ -axis enables one to deduce the configurations of the orbits at the points of  $OM_2$  and  $M_2E$  from their behavior in  $OM_1$  and  $M_1E$ . In the case of  $OM_1$ , from (7), (8) and Fig. 1. it is easily seen that  $\eta'''$  has in the first and third quadrants the sign of  $u_1u_2$ , and in the second and fourth quadrants that of  $-u_1u_2$ . In  $M_1E$ , where the opposite is true,  $\eta'''$  has the sign of  $-u_1u_2$  in the first and third quadrants while in the second and fourth quadrants its sign is that of  $u_1u_2$ . Since the sign of  $-u_1u_2$  is the same as the sign of  $-u_1/u_2$  and since this quotient is the slope of the talweg and hence positive in  $OM_1$  and negative in  $M_1E$ , one can infer that  $\eta'''$  is positive in the second and fourth quadrants and negative in the first and third on the two

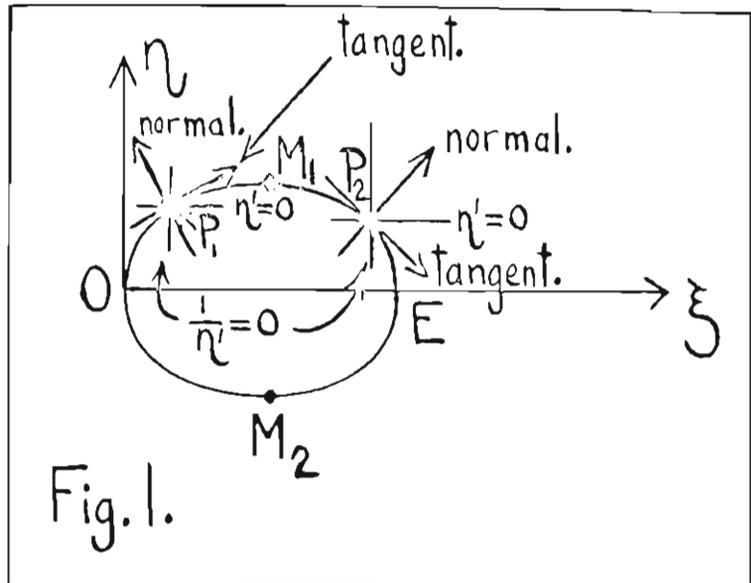


Fig. 1.

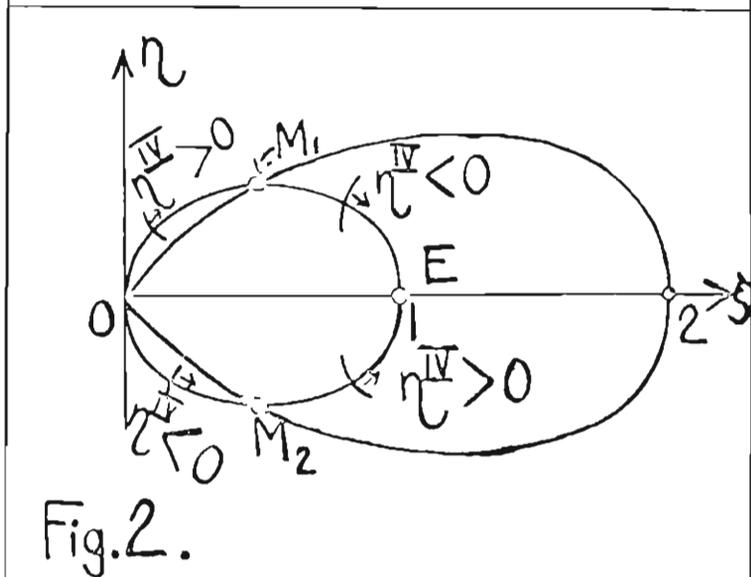


Fig. 2.

60.

arcs  $OM_1$  and  $M_1E$ .

Since  $\eta'''$  is equal to zero along the tangential and normal directions to the talweg, it is necessary to find out the sign of the fourth derivative in the two critical directions.

For the direction of the normal the sign of  $W$  of equation (31), page 48, is the same as the sign of  $\eta^{IV}$ . Since at the talweg  $u = 0$ , then

$$(9) \quad u_1^2 W = 4(u_1^2 + u_2^2) [u_{1s}(u_2^2 - u_1^2) + u_1 u_2 (u_{11} - u_{22})]$$

Since  $u_1^2 + u_2^2$  is always positive,  $W$  has always the same sign as

$$(10) \quad R = u_1 [u_{1s}(u_2^2 - u_1^2) + u_1 u_2 (u_{11} - u_{22})]$$

The locus  $R = 0$  consists of different branches given by

$$(11) \quad u_1 = 0$$

$$(12) \quad u_{1s}(u_2^2 - u_1^2) + u_1 u_2 (u_{11} - u_{22}) = 0$$

The branch (11) is the curve whose equation is (5) or (6), page (38), chapter VII; it is drawn in Fig.2. of the same chapter, where it is shown that it cuts the talweg three times.

Curve (12), which is the locus (10), page 43, chapter VIII, has only one interesting branch for the sign of  $\eta^{IV}$  at the talweg, namely,  $\eta = 0$ .

Conclusions: There are four regions on the talweg where  $\eta^{IV}$  is alternately positive and negative for the orbits normal to the talweg. These four regions are delimited by the four intersections of  $\eta = 0$  and  $u_1 = 0$  with the talweg, namely, the four extrema of the talweg. See Fig.2.

For the normal orbits to the talweg  $\eta^{IV}$  is positive

along  $OM_2$  and  $EM_2$  and negative along  $EM_1$  and  $OM_1$ . The sign of  $\eta^{IV}$  determines the concavity of the normal orbits, which concavity is indicated in Fig.2. for the four arcs.

One has to find the sign of  $\eta^{IV}$  for the tangential orbits also, for which  $\eta' = -M_3/M_2$ . From equation (27), page 47, chapter VIII, and for  $\eta'' = \eta''' = 0$  and  $\eta' = -M_3/M_2$

$$(13) \quad 2M\eta^{IV} = (1 + \eta'^2) \left[ M_{333}\eta - \frac{M_3}{M_2} (2M_{322}\eta - M_{333}) \right. \\ \left. + \frac{M_3^2}{M_2^2} (M_{222} - 2M_{333}) + M_{322} \frac{M_3^3}{M_2^3} \right]$$

The sign of  $\eta^{IV}$  is the same as that of

$$(14) \quad N = M_{333}\eta - \frac{M_3}{M_2} [2M_{322}\eta - M_{333}] + \frac{M_3^2}{M_2^2} [M_{222} - 2M_{333}] \\ + M_{322} \frac{M_3^3}{M_2^3}$$

Using Table 1. of chapter VIII and putting  $u = 0$ , since we are dealing with the talweg, we find that equation (14) transforms into

$$(15) \quad N = \frac{2}{u_2^2} (u_1^2 + u_2^2) (-u_{11}u_2^2 - u_{22}u_1^2 + 2u_1u_2u_{12})$$

If we suppress the parts of (15) which do not contribute, we find that the sign of the fourth derivative is determined by the sign of

$$(16) \quad Q = u_2(-u_{11}u_2^2 - u_{22}u_1^2 + 2u_1u_2u_{12})$$

The locus  $u_2 = 0$  consists of the two coordinate axes.

$\xi = 0$  and  $\eta = 0$ . The expression in (16) can be written as

$$(17) \quad \frac{3(2 - m^2)}{m^4}$$

in terms of a new variable  $m$  defined by

$$(18) \quad \xi = m^3, \quad r = m^2, \quad \eta' = m^2 \sqrt{1 - m^2}$$

62.

This gives

$$(19) \quad Q = \frac{3\sqrt{1-m^2}}{m^5} \frac{3(2-m^2)}{m'^4}$$

for the upper part of the talweg, and

$$(20) \quad Q = + \frac{3\sqrt{1-m^2}}{m^5} \frac{3(2-m^2)}{m'^4}$$

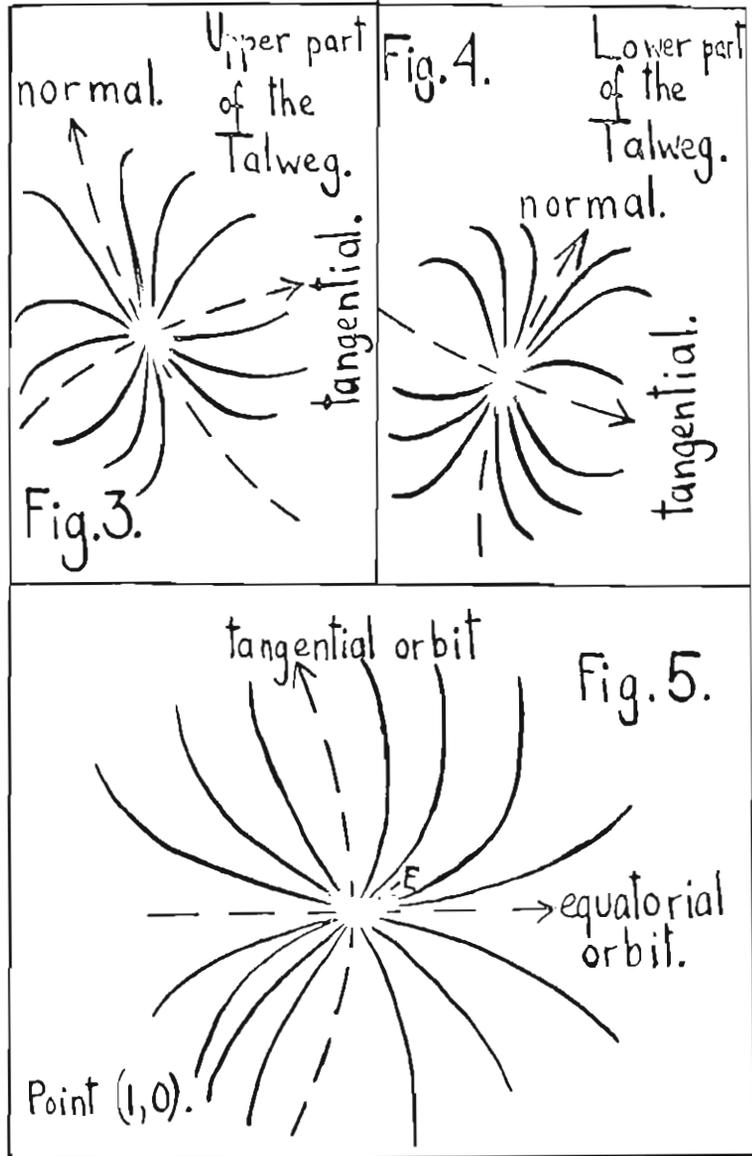
for the lower part.

The latter two equations lead to the conclusion that for the tangential orbits to the talweg the fourth derivative is negative at the upper part of the talweg and positive at the lower part.

Figs.3. and 4. show two different types of points that exist on the talweg both of which we shall call "pinwheel" points.

All orbits except two going through a pinwheel point have a point of inflection there; the two exceptions are the critical directions tangent and normal to the talweg, along which directions the orbits have flat points. In the tangential critical direction the concavity of the orbit is toward the interior of the talweg, while along the normal critical direction the concavity is away from the dipole. Using the same notation that was introduced in page 40, chapter VIII, we can say that at the pinwheel points of Figs.3. and 4. the tangential direction is the "pincer direction" and the normal direction is the "funnel direction".

The analysis given above does not include the points O, M<sub>1</sub>, E and M<sub>2</sub>. The case of O has been treated in Chapter VI. The discontinuity in M<sub>1</sub> and M<sub>2</sub> is only apparent, because the configurations of the orbits are exactly the same as for the neighboring points on the talweg. At the point E the orbit normal to the talweg is the equatorial orbit, a straight line. The orbit tangential to the talweg is concave toward the talweg as shown in Fig.5.



CHAPTER XI. THE POINTS AT THE EQUATOR.

For each  $j_1$  the equator can be divided into three segments for the analysis of the configuration of the orbits at its points.

A.  $j_1$  smaller than 1: Fig.1.

The three segments are:

- 1) from the inner  $M = 0$  line to the point (1,0) at the talweg;
- 2) from the point (1,0) to the point (2,0), i.e., the intersection with the third branch, chapter VIII;
- 3) from the point (2,0) to infinity.

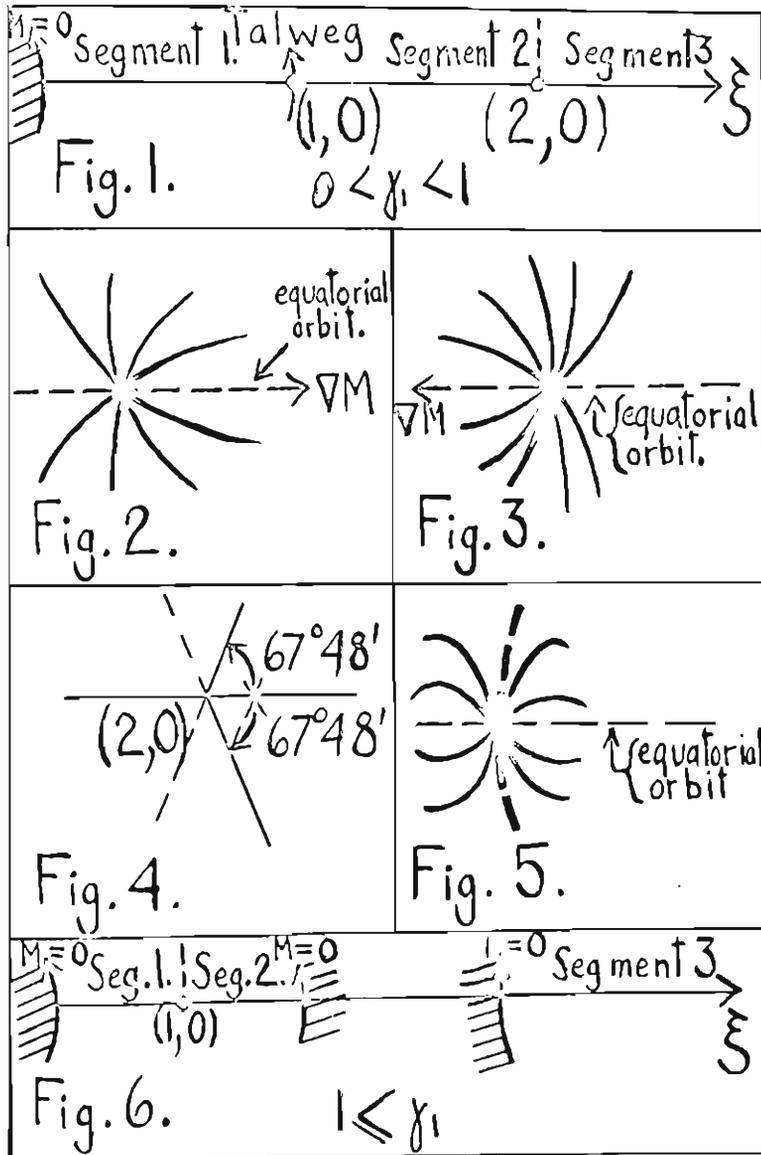
The initial point of segment 1, the point  $M = 0$ , where an equatorial self-reversing orbit occurs, is a "col". In this case the "col" trajectory is a straight line. At the interior points of segment 1 the trajectories have the configuration shown in Fig.2.

The critical orbit, in the sense of chapter VIII, is the equatorial orbit. These points are neither S-points nor 2-points; we shall call them "straight points". As before, let the positive sense along the critical direction be the "funnel-pincer" direction. Point (1,0) is a pinwheel point as proved in chapter X, Fig.5.

The interior points of segment 2 are straight points directed towards the left as shown in Fig.3.

The end point, (2,0), has two critical directions, because  $\text{grad } M$  has two values at this point. These two vectors of  $\text{grad } M$  form with the  $\xi$ -axis the two angles  $\pm 67^\circ 47' 41''$ . Fig.4. shows these two critical directions. At the point (2,0)  $M_{\xi} = 0$ ,  $M_{\eta} = 0$  and consequently  $\eta'' = 0$ . From equation (4), page 42, chapter VIII,

$$(1) \quad 2M \eta''' = (1 + \eta'^2) [M_{\xi\xi} \eta + (M_{\eta\xi} - M_{\xi\xi}) \eta' - M_{\xi\eta} \eta'^2]$$



64.

At  $(2,0)$   $\eta''''$  has the same sign as

$$(2) \quad N = M_{32} + (M_{12} - M_{35})\eta' - M_{52}\eta'^2$$

Evaluating  $N$  by means of Table 1., chapter VIII, for the point  $(2,0)$ , we have

$$(3) \quad N = -\frac{5}{32}\eta'$$

$N$  and therefore the third derivative have at the point  $(2,0)$  the opposite sign to  $\eta'$ . The third derivative changes sign both at  $\eta' = 0$  and at  $1/\eta' = 0$ , as is evident from equation (3).

$\eta' = 0$  corresponds to the equatorial orbit where all  $\eta^{(n)}$  are zero since this orbit is a straight line.

$1/\eta' = 0$  corresponds to the orbit perpendicular to the equator at  $(2,0)$ . To analyse this orbit more closely it is convenient to calculate  $\xi'' = d^2\xi/d\eta^2$ ,  $\xi''' = d^3\xi/d\eta^3$ , and  $\xi^{IV} = d^4\xi/d\eta^4$ . The results are the following:  $\xi'' = 0$ ,  $\xi''' = 0$ ,  $2M_{35} = M_{125}$ .  $\xi^{IV}$  has at  $(2,0)$  the same sign as  $M_{125}$ .

From Table 1., chapter VIII,

$$(5) \quad M_{125} = -4u_2u_{12} - 2u_1u_{22} - 2uu_{122}$$

For the point  $(2,0)$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_{122} = \frac{3}{8}$ ,  $u = -\frac{1}{4}$ .

The result is that  $\xi^{IV}$  is positive for the orbit orthogonal to the equator at the point  $(2,0)$ . Thus the configuration of the orbits through this point is the same as that shown in Fig.5.

It is remarkable that the two directions of  $\text{grad } M$  play absolutely no part in this configuration.

B.  $\eta_1$  greater than or equal to 1:

The three segments are:

1) from the inner  $M = 0$  line to the intersection with the

talweg  $(1,0)$ ;

2) from the talweg to the outer finite  $M = 0$  line;

3) from the outer infinite  $M = 0$  line to infinity.

Fig.6. shows these different regions. The three points at  $M = 0$  are "cols". The interior points on segment 1 are "straight points" directed towards the right. The configuration at point  $(1,0)$  is exactly the same as for the case  $\beta_i < 1$ , see Fig.5., chapter X. The points on segment 2 are "straight points" directed towards the left. The points on segment 3 are "straight points" directed towards the right.

For  $\beta_i = 1$  the two "cols" at the right-hand end point of segment 2 and at the left-hand end point of segment 3 coalesce, but except for that the configurations are the same as those described for  $\beta_i > 1$ .

CHAPTER XII. THE POINTS AT INFINITY.

In order to have a complete picture of the behavior of the orbits at each point it is necessary to study the points at infinity.

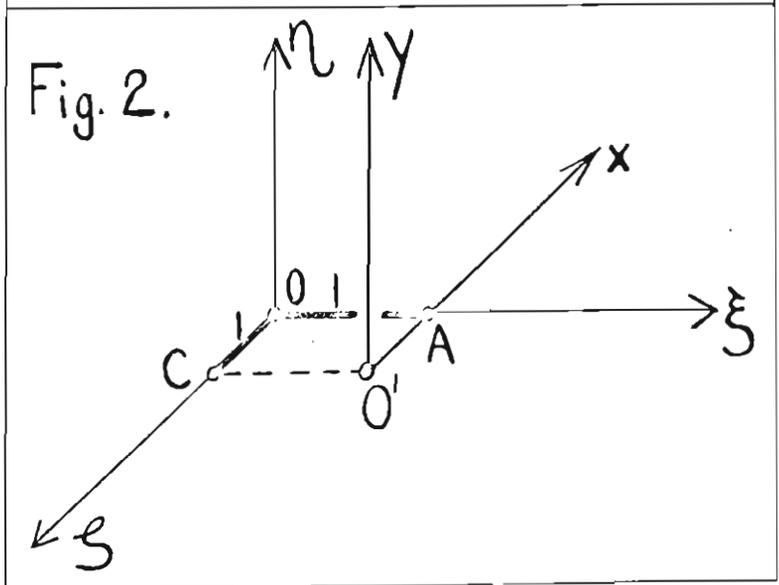
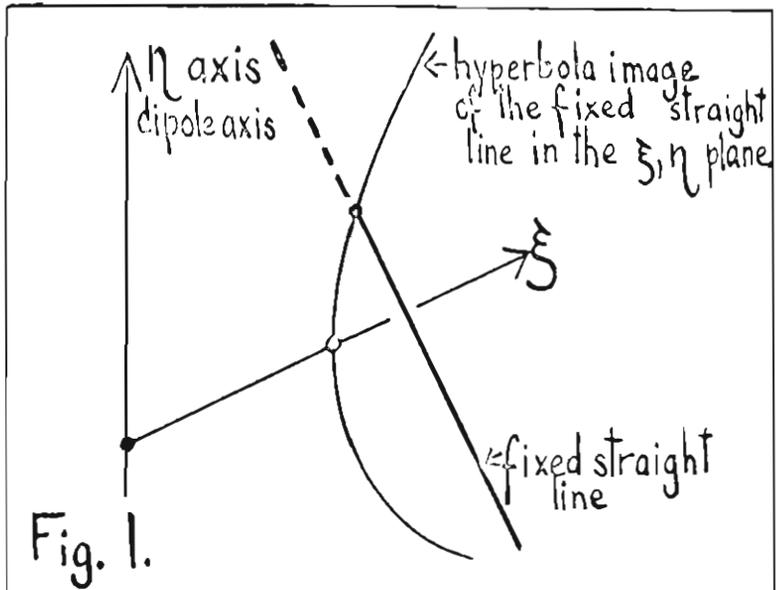
From the physical aspect of the problem we can predict that the charged particles will move in straight lines at large distances from the dipole. We have first to find out what are the images of these straight lines in the  $\xi, \eta$  plane.

To find this image consider a fixed straight line in space and let the  $\xi, \eta$  plane rotate around the dipole axis, i.e., the  $\eta$ -axis. See Fig.1. Consider the trace of the fixed straight line in the  $\xi, \eta$  plane. This trace describes a hyperbola during the rotation. It is perhaps easier to think of the  $\xi, \eta$  plane as fixed and to turn the straight line around the  $\eta$ -axis. This is the classical way of generating the hyperboloid of revolution of one sheet. The intersection of the hyperboloid with the  $\xi, \eta$  plane is a hyperbola. Thus a straight line in space is a hyperbola in the  $\xi, \eta$  plane.

The hyperbola degenerates into a straight line parallel to the  $\eta$ -axis when the original straight line in space is itself parallel to this axis. Particles moving in such a straight line at large distances from the dipole have a  $\delta_1$  equal to zero, since their moment of momentum is perpendicular to the dipole axis and  $\delta_1$  itself is the component along the dipole axis of the moment of momentum of the particle at infinity. This special case  $\delta_1 = 0$  will be treated in a special chapter.

For  $\delta_1$  greater than zero and at large distances from the dipole the orbits in the  $\xi, \eta$  plane are hyperbolae and therefore have asymptotes; though the asymptotes parallel to the dipole axis do not exist for these  $\delta_1$ 's.

Let us find out from which side of the asymptote the



67.

orbit approaches it in the  $\xi, \eta$  plane. To state this problem in non-rigorous but geometrically descriptive language, find the concavity of the trajectories at infinity. In this form the problem is but a completion of the study of the concavity of the orbits done in the previous chapters.

To bring the points at infinity to a finite distance it is convenient to perform the projective transformation defined below.

Consider the  $\xi, \eta$  plane and a third axis, namely, the  $\zeta$ -axis, perpendicular to this plane at the origin. See Fig. 2. The point C, (0,0,1), is the center of projection. The line ( $\xi = 1, \eta = 0$ ) is the x-axis and the line ( $\xi = 1, \zeta = 1$ ) is the y-axis of the new system of coordinates. To project the  $\xi, \eta$  plane on the x,y plane we must use the following transformation equations:

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= \frac{1}{\xi} \\ (2) \quad y &= \frac{\eta}{\xi} \\ (3) \quad \xi &= \frac{1}{x} \\ (4) \quad \eta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

The differential equation of the trajectories in the  $\xi, \eta$  plane is

$$(5) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{1}{2M} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \left[ M_2 - M_1 \frac{d\eta}{d\xi} \right]$$

The transformed equation of the projections of the trajectories in the x,y plane is obtained by substituting (3) and (4) into (5); it is

$$(6) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2M} \left[ 1 - \left( y - x \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \left[ 6xy \left( \frac{x}{(1+y^2)^2} - \frac{1}{(1+y^2)^{3/2}} \right) \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{x}{(1+y^2)^{3/2}} - 1 \right) \left( \frac{x(y^2-2)}{(1+y^2)^{3/2}} + 1 \right) \left( y - \frac{dy}{dx} \right) \right]$$

The points at infinity on the  $\xi, \eta$  plane which have an infinite  $\xi$  are projected on the  $y$ -axis at a finite distance from the dipole. Only these points interest us, for the points at infinity having a finite  $\xi$  can only be reached by trajectories having an asymptote parallel to the  $\eta$ -axis and such trajectories occur only, as was explained before, for  $\delta_1 = 0$ .

The projective transformation performed permits us to study the behavior of the orbits at infinity by studying the behavior of their projections in the  $x, y$  plane at the  $y$ -axis. Let us begin with the slope of the asymptotic direction; it is given by

$$(7) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\eta}{\xi}$$

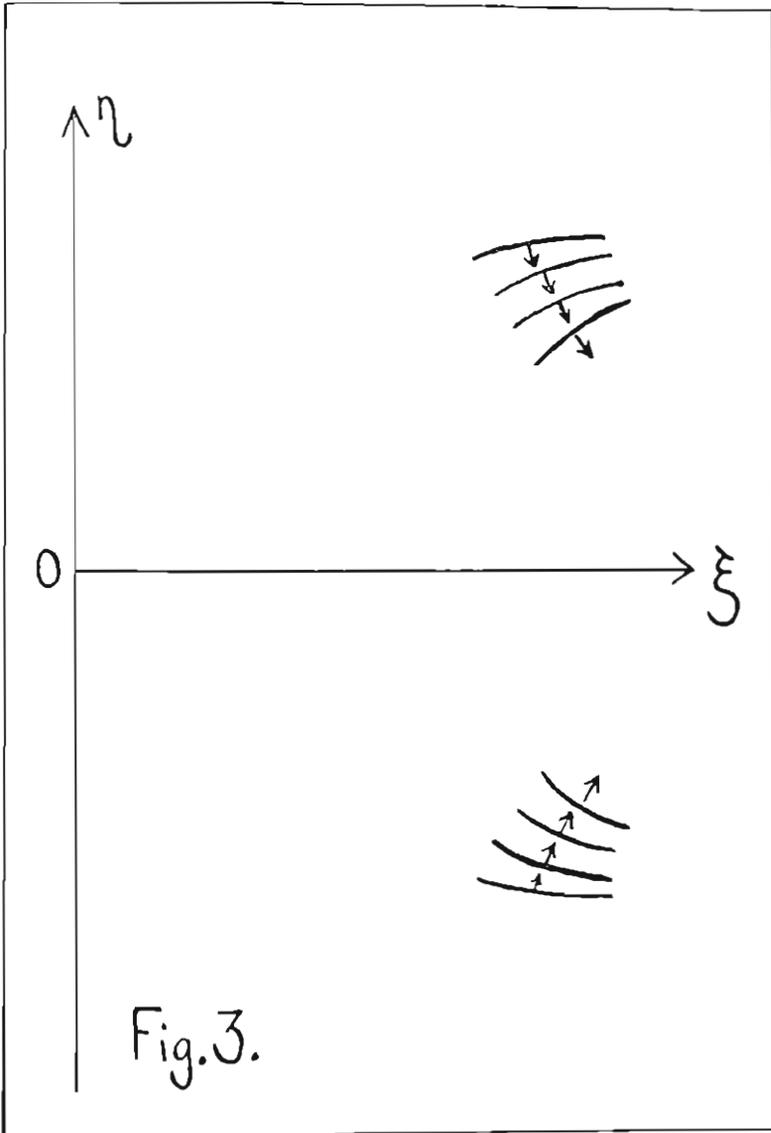
This limit is nothing else than the value of  $y$  for  $x = 0$ . From equation (6) we obtain by putting  $x = 0$

$$(8) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{y(1+y^2)}{a}$$

The geometrical interpretation of equation (8) is the following: the concavity of the projections starting at the  $y$ -axis is always towards the  $x$ -axis, which in turn means that at large distances each trajectory is between the  $\xi$ -axis and its asymptote. The configuration at the points at infinity can be represented graphically as indicated in Fig. 3.

#### Conclusions:

Orbits with asymptotes parallel to the dipole axis do not exist for  $\delta_1 > 0$ . Above the equator in the  $\xi, \eta$  plane the orbits approach their asymptotes from below, and below the equator they approach their asymptotes from above.

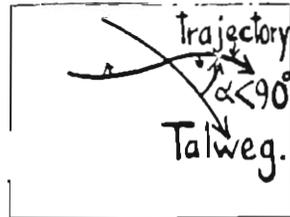


CHAPTER XIII. THE SELF-REVERSING ORBITS.

A. Orbits starting from the inner  $M = 0$  line:

Consider the inner  $M = 0$  line and the talweg, Fig. 1. The self-reversing orbits start with their concavity towards the left, except for the equatorial orbit. Consider the upper half of the meridian plane only. In the region limited by the inner  $M = 0$  line, the talweg, and the equator only 2-inflections are allowed, which leads to the result that the self-reversing orbits cannot have any inflections in this region. Thus, having their concavity towards the left, they must either cut the talweg or have a maximum. But since a maximum is impossible in the region in question, all self-reversing orbits cut the talweg and have a point of inflection at the intersection. With the concavity always towards the left, the angle of intersection talweg-trajectory is smaller than  $90^\circ$ .

The intersection of the equatorial orbit is the point  $(1,0)$ , and the intersections of the self-reversing orbits near the dipole can come as near to the origin as one likes. All the intersections of the self-reversing orbits, that start from the inner  $M = 0$  line, with the talweg lie between  $(1,0)$  and the origin on the talweg.



Consider a self-reversing orbit starting at the point  $P$ , Fig. 1., of the inner  $M = 0$  line and cutting the talweg at  $Q$ . Given any small quantity  $\epsilon$  there is always a quantity  $\mu$  such that for all  $PP' < \mu$  the self-reversing orbit starting at  $P'$  of the inner  $M = 0$  line cuts the talweg at a point  $Q'$  such that  $QQ' < \epsilon$ .

Theorem: Through each point of the talweg there passes at

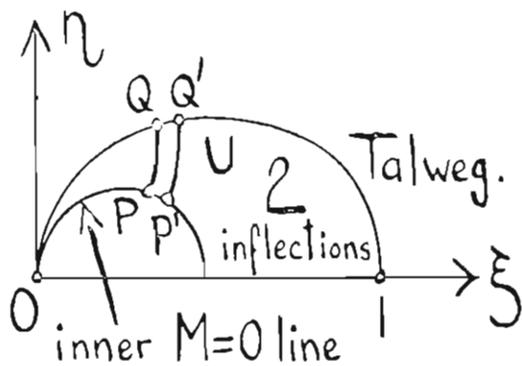


Fig.1.

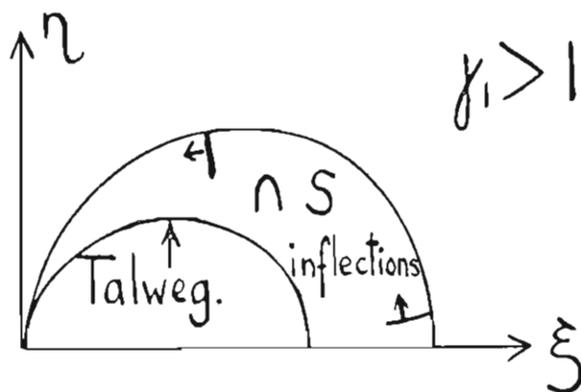


Fig.2.

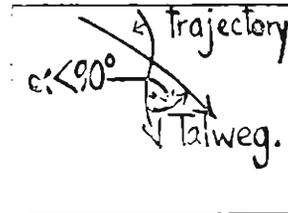
least one self-reversing orbit starting at the inner  $M = 0$  line.

B. Orbits starting from the outer  $M = 0$  line:

1) Case where  $\delta_1 \geq 1$ .

Consider the outer finite  $M = 0$  line, the talweg and the equator, Fig.2. The self-reversing orbits start with their concavity towards the right, except for the equatorial orbit. Consider the upper half only of the meridian plane. In this region, limited by the outer finite  $M = 0$  line, the talweg and the equator, only S-inflections are possible, which leads to the conclusion that the self-reversing orbits can have no inflections in this region. With a concavity towards the right, they must either cut the equator or cut the talweg or have a minimum. But since a minimum is impossible in this region, only the former two possibilities exist. In the case of a cutting of the talweg, the angle trajectory-talweg at the point of intersection has

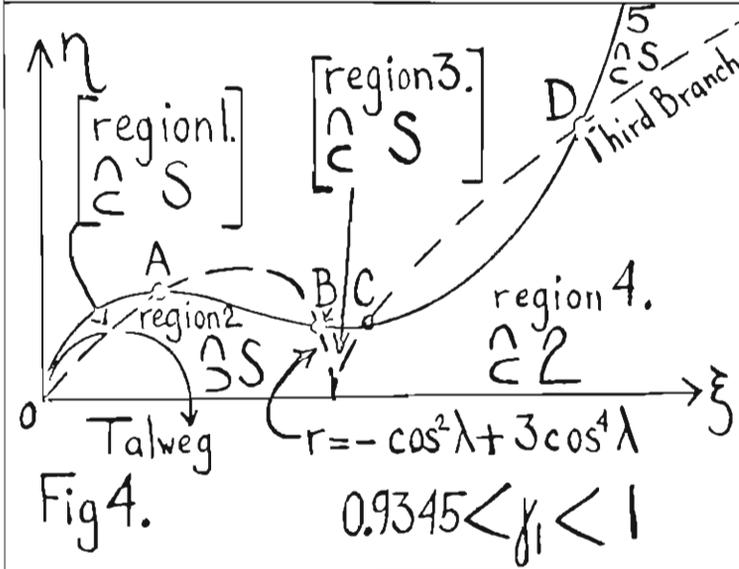
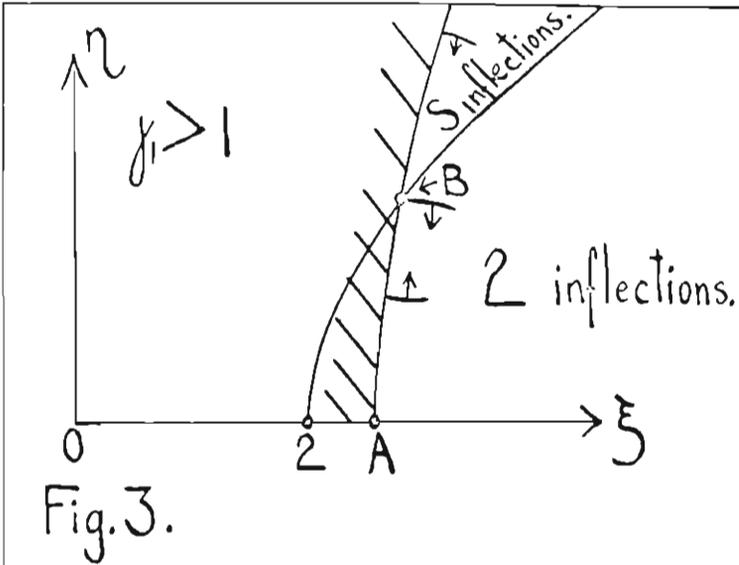
to be less than  $90^\circ$ , and the orbit has a point of inflection there. The intersections of the self-reversing orbits starting at the outer finite  $M = 0$  line cover the whole talweg from the point  $(1,0)$  to the origin. As in the case of



the self-reversing orbits starting from the inner  $M = 0$  line, through each point of the talweg there passes at least one self-reversing orbit coming from the outer finite  $M = 0$  line.

Theorem: For  $\delta_1 \geq 1$  through each point of the talweg there passes at least one self-reversing orbit starting at the inner  $M = 0$  line and at least one starting at the outer  $M = 0$  line.

Consider the outer infinite  $M = 0$  line, the third branch and the equator, Fig.3. The outer infinite  $M = 0$  line has a vertical asymptote, whereas the asymptotes of the



third branch form angles of  $\pm 39^{\circ}14'$  with the positive  $\xi$ -axis. The outer infinite  $M = 0$  line, therefore, always cuts the third branch in two points, symmetric with respect to the equator.

The self-reversing orbits starting in the interior of the arc AB have their concavity upwards at the point of self-reversal and proceed in a descending direction. They can have no inflection because they are in a region of 2-inflection whereas their concavity allows them only an S-inflection; they cannot have a minimum for they are in a region of maxima. The only possibilities left are either to cut the equator or to have a horizontal asymptote. The latter is excluded since orbits with horizontal asymptotes have their concavities downwards at large distances, as shown in chapter XII. All self-reversing orbits starting at the outer infinite  $M = 0$  line in the interior of the arc AB cut the equator.

The self-reversing orbits starting at B and above B at the outer  $M = 0$  line start with their concavity downwards and in a descending direction, as shown in chapter IX. These orbits can either have no inflection at all or else have an inflection only after penetrating the region of 2-inflections.

Assuming first that they have no inflection, we note that either they have a  $\xi$ -maximum, or they cut the equator before having a  $\xi$ -maximum; both of these latter possibilities have to be discarded. The first because  $\xi$ -maxima are not allowed in this region; the second because their concavity is wrong for cutting the equator.

Thus the trajectory has a 2-inflection. This inflection has to take place while the trajectory is descending for it starts this way, and to ascend it would first have to pass through an  $\eta$ -minimum, which is forbidden in this region. After the 2-inflection the trajectory has two possibilities: either it has a horizontal asymptote, or it cuts the equator. A horizontal asymptote is impossible for orbits with a concavity upwards. Hence all self-reversing orbits

72.

starting at the outer infinite  $M = 0$  line for  $\gamma_1 \geq 1$  cut the equator.

Theorem: For  $\gamma_1 \geq 1$  all self-reversing orbits cut the talweg-equator locus.

2) Case where  $0.9345 \leq \gamma_1 < 1$ .

Consider the talweg, the line  $r = -\cos^2 \lambda + 3\cos^4 \lambda$ , the equator, the third branch and the outer  $M = 0$  line, see Fig.4. The self-reversing orbits that start at the outer  $M = 0$  line on the arc OC have their concavity towards the right at the point of self-reversal. Since the concavity allows only a 2-inflection, they can have no inflection in regions 1, 2, and 3, Being unable to have minima and starting in a descending direction they have either to cut the talweg, or to cut the equator, or to penetrate into region 4. In the latter case they are obliged to have an inflection because they cannot cut the equator with a concavity to the right in the downward direction. After having the inflection they can either cut the equator or have a horizontal asymptote. The last possibility has to be discarded because the concavity at large values of  $\xi$  of the orbits having horizontal asymptotes must be downwards, as shown before. Therefore the self-reversing orbits starting at the outer  $M = 0$  line between O and C have to cut either the talweg or the equator. The ones that cut the talweg have an inflection there and cut it at an angle trajectory-talweg smaller than  $90^\circ$ , as shown in the diagram on page 70.

The self-reversing orbits starting in the interior of the arc CD can have no inflections in region 4, for they start in a descending direction with a concavity towards the left and thus admit only S-inflections, whereas region 4 is a region of 2-inflections. Being unable to have a minimum they can either cut the equator or have a horizontal asymptote. The last possibility has to be discarded, as proved in chapter XII.

The self-reversing orbits starting at D and at the

points above D on the outer  $M = 0$  line start with their concavity towards the right. Since they admit only a 2-inflection, they can have no inflection in region 5, which allows only S-inflections. Starting in a descending direction and being unable to have  $\eta$ -minima and  $\xi$ -maxima, they must penetrate region 4, where they must have an inflection because they cannot have a  $\xi$ -maximum and cannot cut the equator with a concavity towards the right. After having this inflection in region 4, they cut the equator; for the only other possibility, that of having a horizontal asymptote, has to be discarded due to the type of the concavity. To summarize: all self-reversing orbits for  $0.9345 < \delta_1 < 1$  cut the talweg-equator locus.

3) Case where  $0 < \delta_1 \leq 0.9345$ .

Consider the talweg, the line  $r = -\cos^2 \lambda + 3\cos^4 \lambda$ , the equator, the third branch and the outer  $M = 0$  line, see Fig.5. The self-reversing orbits starting at the outer  $M = 0$  line have a concavity towards the right. Being unable to have an S-inflection, they can have no inflection at all in region 1. The ones that start sufficiently near to the dipole cut the talweg at an angle trajectory-talweg smaller than  $90^\circ$ , in the way shown in the diagram on page 70, and have a point of inflection at the talweg.

The self-reversing orbit, which cannot remain in region 1 for it cannot have a  $\xi$ -minimum without first having an inflection, has three other alternatives besides that of cutting the talweg, namely, to enter region 2, to cut the equator at the point (2,0), or to enter region 3.

The self-reversing orbits that penetrate into region 2 can have there a  $\xi$ -maximum but no  $\eta$ -minimum, which means that they cannot remain there and either must cut the talweg as before at an angle  $\alpha$ , trajectory-talweg, smaller than  $90^\circ$ , or they must cut the equator.

The self-reversing orbits that penetrate into region 3 have to have an inflection in this region. This is

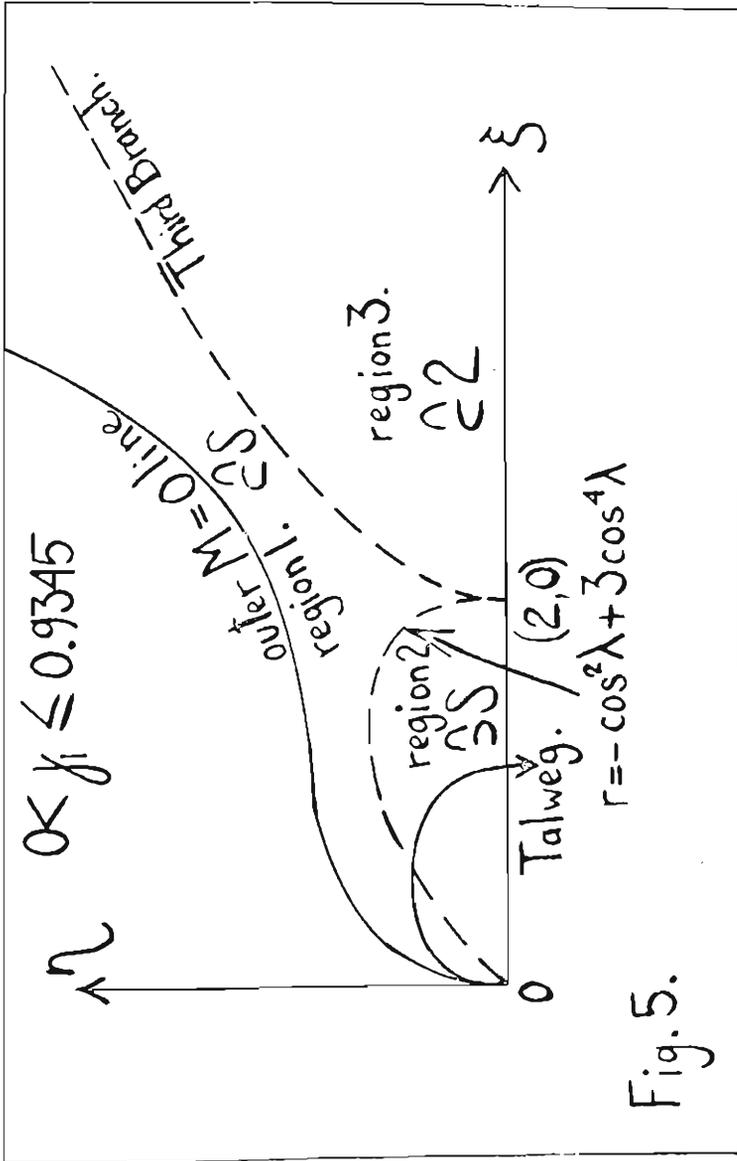


Fig. 5.

true for if they would conserve their sense of concavity they would have a  $\xi$ -maximum, which is impossible, or they would cut the equator at an angle trajectory-equator smaller than  $90^\circ$  which is forbidden for orbits with a concavity to the right. After the 2-inflection in region 3 they can either cut the equator or have a horizontal asymptote. A horizontal asymptote is discarded because of the upward concavity of the orbit. Thus the only possibility open is that the orbit cuts the equator. Our results thus far are that a self-reversing orbit starting from the outer  $M = 0$  line for  $0.9345 \leq \gamma_1 < 1$  either cuts the talweg, or penetrates into region 2 and then cuts either the talweg or the equator, or cuts the equator at the point  $(2,0)$ , or penetrates into region 3 and then cuts the equator.

Since there can be no  $\xi$ -maximum either in region 1 or in region 3, the self-reversing orbit penetrating into region 3 cuts the equator at a point to the right of its point of self-reversal.

To summarize: all the self-reversing orbits for  $0 \leq \gamma_1 < 0.9345$  cut the talweg-equator locus.

Conclusions:

For all  $\gamma_1$ 's all self-reversing orbits cut the talweg-equator locus.

75.

CHAPTER XIV.. INTERSECTIONS OF THE ORBITS WITH THE TALWEG  
AND THE EQUATOR.

O. Godart has proved (not yet published) that all orbits must cut the locus formed by the equator and the talweg. Godart's theorem can also be proved easily by the methods developed in the last chapters.

Consider the equator, the talweg, and the lines  $M = 0$ , for the upper half of the meridian plane. There are two cases to be analyzed, e.g.,  $\delta_1 < 1$  and  $\delta_1 \geq 1$ .

First Case:  $\delta_1 < 1$ . Fig. 1.

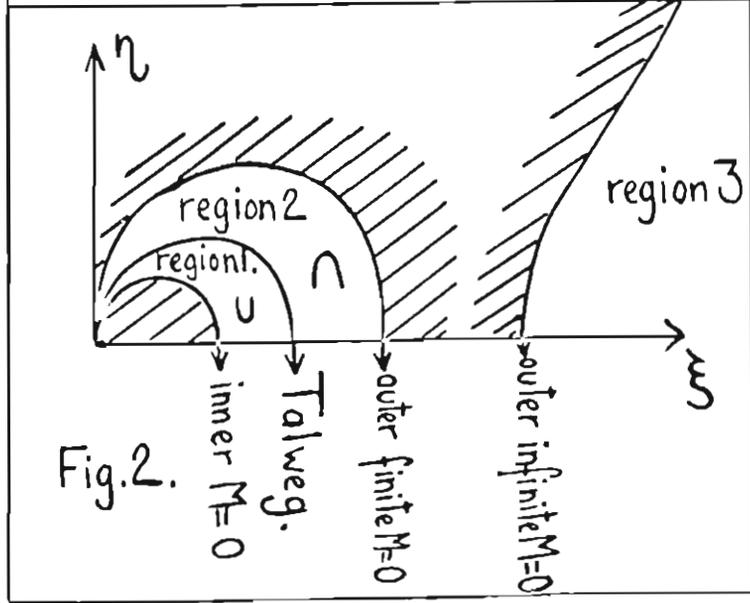
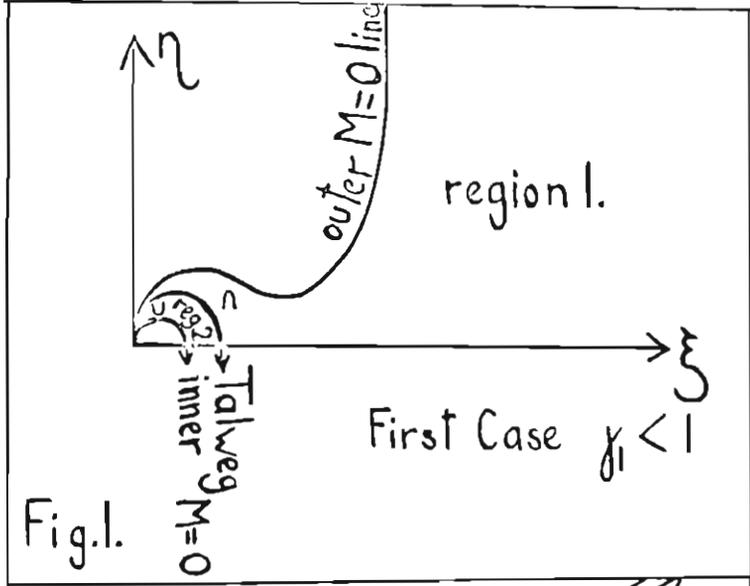
In this first case consider two regions: region 1 limited by the outer  $M = 0$  line, the talweg and the equator, and region 2 limited by the inner  $M = 0$  line, the talweg and the equator. Region 1 is a region of maxima, region 2 of minima. The proof of Godart's theorem consists in showing that it is impossible for a trajectory to be completely contained in either one of these two regions.

The self-reversing orbits in regions 1 and 2 have already been analyzed in chapter XIII, and have been found to cut the talweg-equator locus, in agreement with the theorem.

Assume that a non-self-reversing orbit in region 1 does not cut either the equator or the talweg, i.e., it is completely contained in this region. Then it must have a lowest point; if this occurs at a finite distance it is a minimum, but if at infinite distance the orbit approaches a horizontal asymptote from above. Both of these possibilities are forbidden in this region. Therefore an orbit in region 1 must cut the equator or the talweg.

Assume a non-self-reversing orbit completely contained in region 2. It must have a highest point, which means a maximum; but maxima are forbidden in region 2; thus such an orbit cannot exist.

To summarize: for  $\delta_1 < 1$  all orbits cut the locus talweg-equator.



76.

Second Case:  $\gamma_1 \geq 1$ . Fig. 2.

Since the self-reversing orbits cut the talweg-equator locus as already proved, we confine ourselves to non-self-reversing orbits

An orbit, to be completely contained in region 3, has to have a lowest point, i.e., a minimum or a horizontal asymptote with the concavity upwards. But both these possibilities are forbidden with the result that all orbits in region 3 must cut the equator. An orbit cannot be completely contained in region 1 without having a maximum or in region 2 without having a minimum, both of which are forbidden.

Hence for  $\gamma_1 \geq 1$  all orbits cut the talweg-equator locus.

Conclusion:

For both cases,  $\alpha\gamma_1 < 1$  and for  $\gamma_1 \geq 1$ , all orbits cut the talweg-equator locus.

CHAPTER XV. ON THE EXISTENCE OF SIMPLE PERIODIC ORBITS IN  
THE VALLEY.

Let us analyze the problem to see whether there are in the valley periodic orbits which oscillate between the outer and the inner  $M = 0$  lines and which shall have the following properties:

- 1) of being simple, i.e., of having no double points;
- 2) of cutting the talweg only once;
- 3) of not crossing the equator.

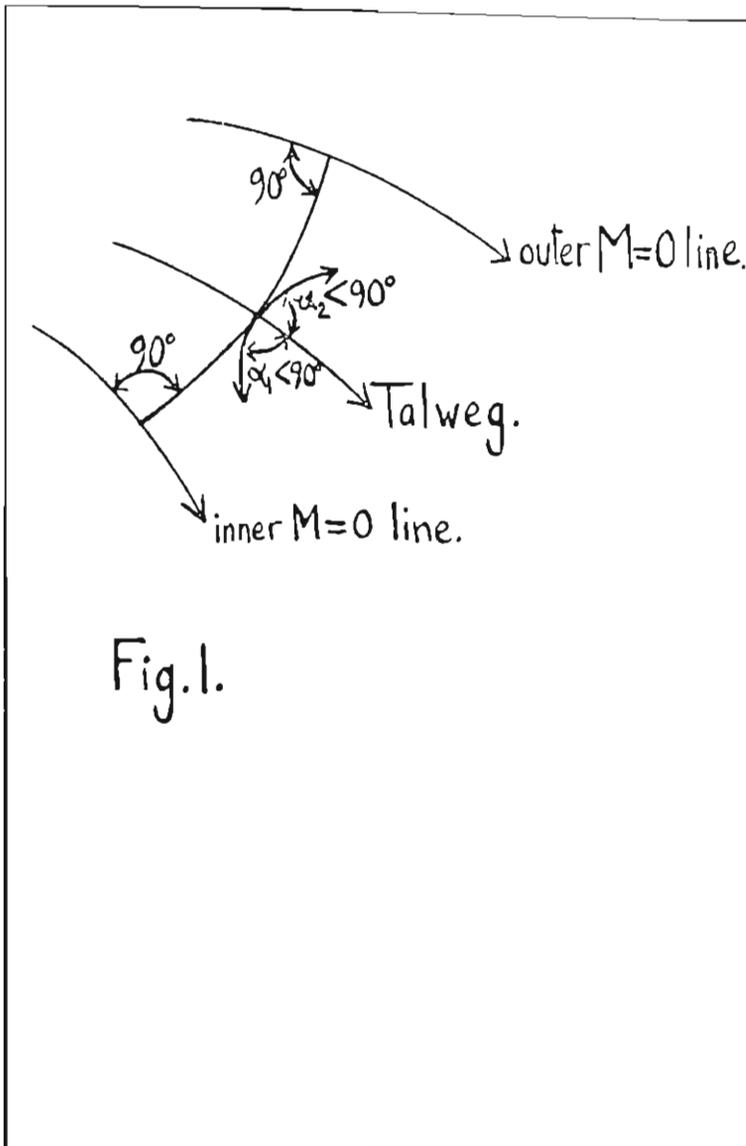
There are two cases to be considered, namely,  $\gamma_1 < 1$  and  $\gamma_1 \geq 1$ .

Case 1:  $0 < \gamma_1 < 1$ .

In chapter XIII on self-reversing orbits we found that in this case there are self-reversing orbits starting from the infinite  $M = 0$  line that cut the equator first and others that cut the talweg first. In order to analyze the possibility of the existence of periodic orbits of the type described above we need consider only the self-reversing orbits that cut the talweg first. The angle trajectory-talweg at the point of intersection is smaller than  $90^\circ$ . The proof of the latter statement is the following: the self-reversing orbit starts with its concavity towards the right and cuts the talweg before having any inflection, i.e., with its concavity still towards the right; with such a concavity the angle has to be smaller than  $90^\circ$ .

The self-reversing orbits starting at the inner  $M = 0$  line start with their concavity towards the left. They cut the talweg before having an inflection and at an angle talweg-trajectory less than  $90^\circ$ , as shown in chapter XIII.

Fig. 1. shows the intersection of the two self-reversing orbits at the talweg coming from the inner and outer  $M = 0$  lines. Their angle of intersection,  $\alpha_1 + \alpha_2$ , is always



smaller than  $180^\circ$ . Thus a "simple periodic orbit" of the type described above is impossible for  $\gamma_1 < 1$ .

Case 2:  $\gamma_1 \geq 1$ .

In chapter XIII on self-reversing orbits we proved that a self-reversing orbit starting at the inner  $M = 0$  line cuts the talweg at an angle  $\alpha_2$  talweg-trajectory less than  $90^\circ$ ; the curvature is towards the left from the point of self-reversal until the intersection where the orbit has an inflection. A self-reversing orbit starting at the outer finite  $M = 0$  line starts with its concavity towards the right and retains it until its intersection with the talweg where it has an inflection. Again the angle trajectory-talweg at the point of intersection is always less than  $90^\circ$ . Hence the angle  $\alpha_1 + \alpha_2$  of intersection at the talweg of two self-reversing orbits coming from the outer and inner  $M = 0$  lines is always less than  $180^\circ$ . Fig. 1. shows the configuration described above.

Conclusions:

Periodic orbits in the valley with the following properties:

- 1) that of having no double points;
- 2) that of cutting the talweg once and only once;
- 3) that of not crossing the equator;

do not exist for any value of  $\gamma_1$ .

CHAPTER XVI. THE REGION BETWEEN THE INNER  $M = 0$  LINE AND  
THE TALWEG.

One of the main objects of this thesis is to prove or disprove the statement that all orbits cut the equator. We have seen in chapter XIV that all orbits cut the combined talweg-equator locus. Thus to resolve the above mentioned problem we can discard the orbits that cut the equator directly and concentrate on those emanating from the talweg.

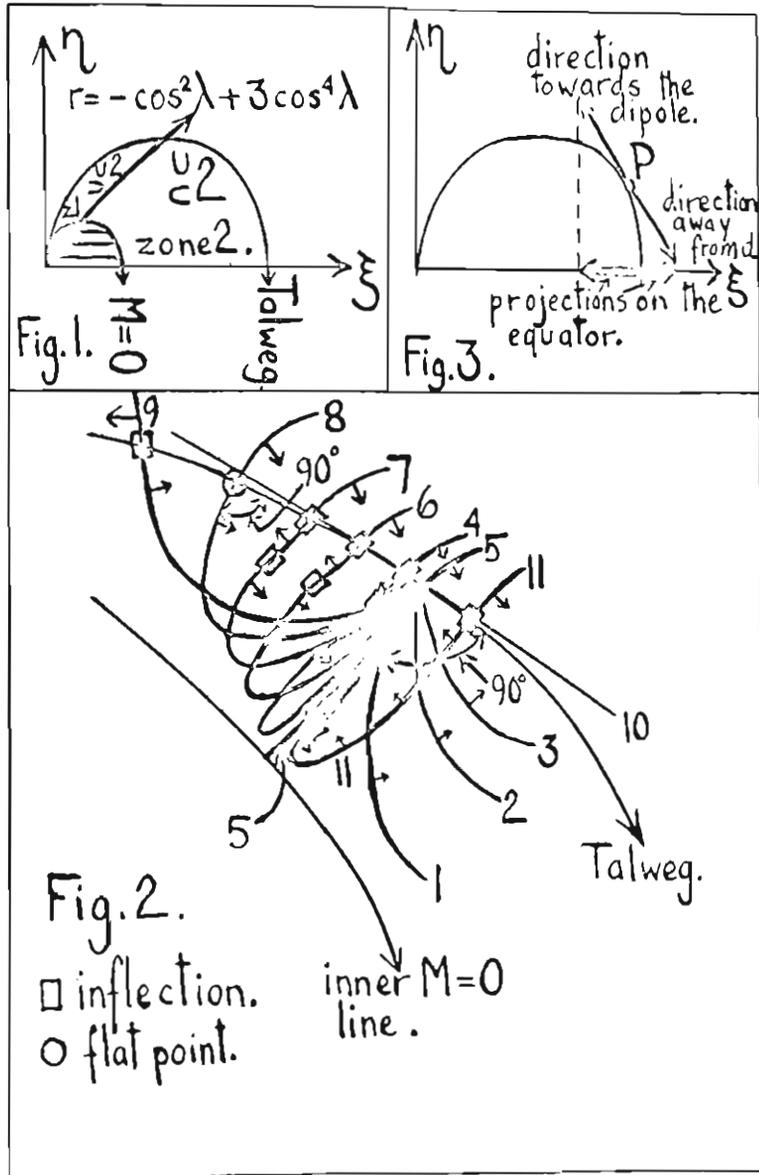
An important step in the study of these orbits is the analysis of the region between the talweg and the inner  $M = 0$  line. The behavior in the large of orbits in this region is the same for all  $\lambda$ 's.

We shall restrict ourselves to the analysis of the upper half of the meridian plane. It is convenient to divide the region formed by the equator, inner  $M = 0$  line and the talweg into two zones, limited by the line whose polar equation is  $r = -\cos^2\lambda + 3\cos^4\lambda$ . Fig.1. shows these two zones and gives the symbols indicating the possible  $\xi$  and  $\eta$  extrema and the possible inflections in both zones.

Fig.2. shows all "possible" types of orbits emerging from a point on the talweg into zones 1. and 2. By "possible" types we mean trajectories compatible with the geometrical criteria developed in this thesis. "Possible" orbits may or may not exist; but, of course, "impossible" ones do not exist.

To show that these are all possible types, let us consider a point P on the talweg, Fig.2. We shall call the direction towards the dipole the direction of the tangent vector at P whose projection on the equator points towards the dipole, and the direction away from the dipole the direction of the tangent vector at P whose projection on the equator points away from the dipole, Fig.3.

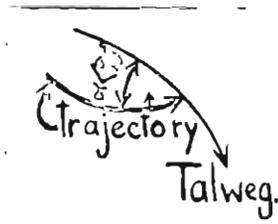
The trajectory 1 in Fig.2. is a critical trajectory, for it is orthogonal to the talweg at P; its concavity is directed away from the dipole on both sides of the talweg.



80.

This trajectory, whose concavity permits only an S-inflection, will not have any inflections in zones 1 and 2, which allow only 2-inflections. Also it cannot reach the  $M = 0$  line since it has the wrong concavity. It has therefore to cut either the talweg or the equator. In the case of the former, the angle talweg-trajectory at the intersection has to be less than  $90^\circ$ , because the concavity of the orbit is to the left. At the talweg the orbit has a point of inflection and emerges on the other side with its concavity towards the right.

To summarize: Trajectory 1 starts in zone 1 or 2 orthogonal to the talweg at P, and either cuts the equator or



cuts the talweg again at an angle talweg-trajectory less than  $90^\circ$ ; it conserves its concavity towards the left in zones 1 and 2; at the intersection with the talweg it has a point of inflection, and emerges on the other side with its concavity towards the right.

The trajectories 2 and 3 whose angles trajectory-talweg are less than  $90^\circ$  behave like trajectory 1, i.e., they have no inflections in zones 1 or 2 and they cut either the equator or the talweg.

Consider trajectory 5, which is the self-reversing orbit connecting the inner  $M = 0$  line with the point P. As was shown in chapter XIII this trajectory always exists with its concavity towards the dipole (indicated in Fig.2). It forms an angle talweg-trajectory less than  $90^\circ$  and emerges, after an inflection, on the other side of the talweg with a concavity away from the dipole.

Trajectory 10, tangential to the talweg, has a flat point at P and its concavity towards the talweg.

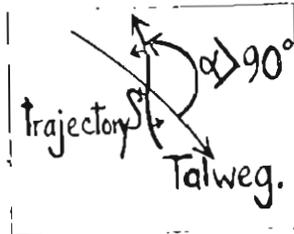
Trajectory 11 starts between trajectories 1 and 5 with an angle trajectory-talweg greater than  $90^\circ$  and smaller

than the starting angle of 5. It has to cut the talweg between P and the equator because 5 separates the orbits that cut the talweg between P and the equator from those that cut the talweg between P and the dipole. Thus since it starts with its concavity towards the dipole it has to have a 2-inflection, which is allowed in zones 1 and 2.

Orbit 4 starting at an angle trajectory-talweg slightly greater than that of orbit 5 remains very close to orbit 5 and has therefore to have a 2-inflection after receding from the line  $M = 0$ .

Orbits 6 and 7 are similar to orbit 4, though their starting angles are greater. With the increasing starting angle the point of the 2-inflection in zones 1 and 2 approaches the point of 3-inflection at the talweg. The fusion of the two separate inflections produces the flat point of orbit 8, which is normal to the talweg at this flat point.

Orbit 9 represents the type of trajectories starting at an angle trajectory-talweg greater than that of orbit 8; it has no inflection in zones 1 and 2 and cuts the talweg again at an angle  $\alpha$  talweg-trajectory greater than  $90^\circ$ , and with a 2-inflection there.



CHAPTER XVII. THE ORBITS FOR  $\beta_1 \geq 1$ .

There are two cases to be considered, namely, the inner finite region and the outer infinite region.

A. Case 1. The inner finite region.

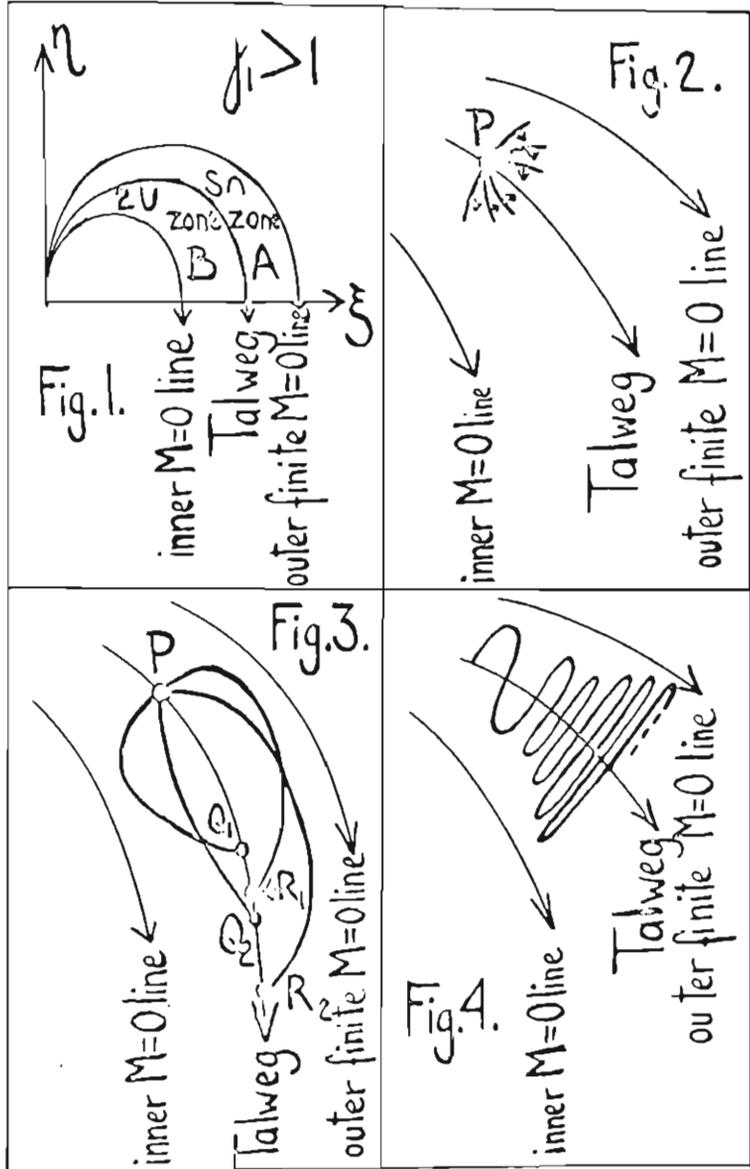
Fig.1. First of all we shall combine zones 3 and 4 of Fig.3., chapter VII, into zone A, containing S-points and  $\eta$ -maxima, and zones 1 and 2 into zone B, containing 2-points and  $\eta$ -minima. It was proved in chapter XIV that all orbits cut the combined talweg-equator locus. We shall prove in this chapter that for  $\beta_1 \geq 1$  all the orbits that cut the talweg cut the equator also, which in turn means that all orbits must cut the equator for  $\beta_1 \geq 1$ .

Let us analyze the orbits starting at a point of the talweg. To indicate the sense of the concavity we shall use the same conventions stated in chapter XVI, page 79. For each orbit passing through point P of the talweg, Fig.2., we can select the direction pointing away from the dipole. The orbit normal to the talweg we shall consider in both directions.

The orbits starting in zone B either cut the equator or cut the talweg again at points Q nearer to the equator than the starting point P, as proved in chapter XVI. The angle talweg-trajectory at the intersection Q is less than  $90^\circ$  because of the concavity of the orbit towards the left.

The orbits starting in zone A begin with their concavity towards the right and can therefore have no inflections in this zone. They cannot reach the outer  $M = 0$  line because of their concavity towards the right. Then either they cut the equator or they cut the talweg again, since they can have no minimum in zone A. At the intersection the angle trajectory-talweg is less than  $90^\circ$  because of the concavity towards the right.

The results of the above considerations are summarized

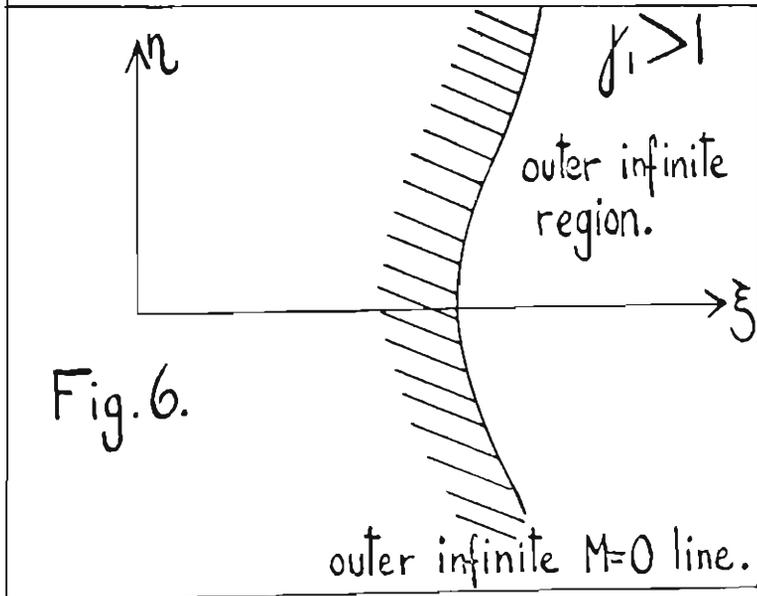
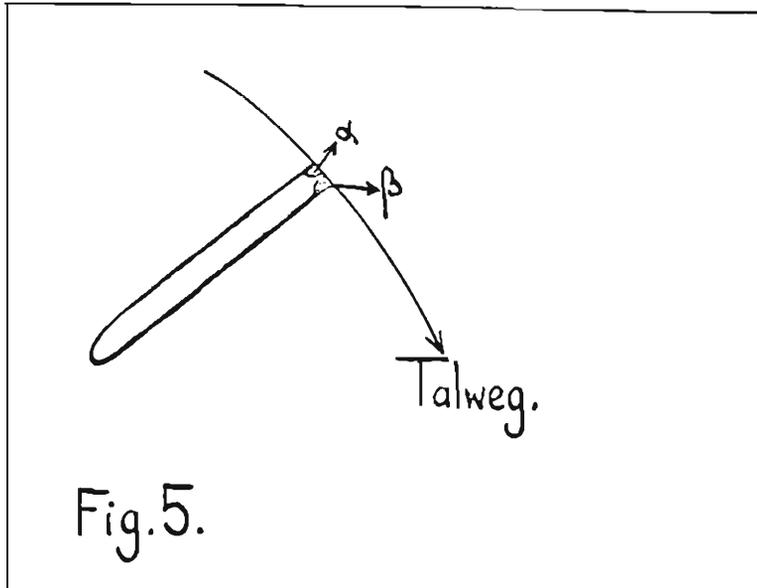


83.

in Fig.3. Expressing these results in words we can say: the orbits starting at a point P of the talweg away from the dipole, and the orbit normal to the talweg either cut the equator or cut the talweg again, proceeding in the direction away from the dipole. The analysis done for the orbits starting at P can be repeated for orbits starting at  $Q_1$ ,  $R_1$ ,  $Q_2$ , and  $R_2$  (Fig.3.).

The points of intersection with the talweg of an orbit starting at P away from the dipole advance towards the equator.

There are still two possibilities open. Either the points of intersection with the talweg have a point of accumulation before reaching the equator, or they reach the equator and pass to the lower half of the meridian plane. The existence of a point of accumulation would mean the existence of an orbit of the type shown in Fig.4. The points of intersection of the orbit with the talweg lie closer and closer to the point of accumulation. Fig.5. shows one of the arcs of the orbit limited by the talweg. Observe that this arc cannot have points of inflection and that the angles  $\alpha$  and  $\beta$  are smaller than  $90^\circ$ . The arc has to have the hairpin form shown in Fig.5. The orbit approaches a limiting line, which limiting line itself has to be an orbit, the proof of which follows immediately. In the limit the arcs of the orbit of Fig.4. come closer and closer to the limiting line. Consider a point  $(\xi, \eta)$  on the limiting line; there are an infinite succession of arcs of the orbit of Fig.4. on which points can be marked lying on the same  $M = \text{const.}$  line as that of the point  $(\xi, \eta)$ . These points form a convergent set with  $(\xi, \eta)$  as the accumulation point. The derivatives of  $\eta$  with respect to  $\xi$  for the orbit of Fig.4. at these points also converge to the values of the corresponding quantities at the limiting line. The limiting line itself is not only an orbit, satisfying the same differential equation, but also a periodic orbit<sup>2</sup> oscillating about the talweg. Such an orbit has to have two points of self-reversal which can only lie



84.

on the lines  $M = 0$ . But in chapter XV we proved that such a periodic orbit cannot exist unless it cuts the equator or is the equator itself. Hence the orbit of Fig.4. cuts the equator either after a finite or after an infinite number of oscillations.

Conclusions: All the orbits of the inner finite region for  $\gamma_1 \geq 1$  cut the equator.

B. Case 2. The outer finite region.

We have proved in chapter XIV that all orbits cut the combined talweg-equator locus. But the orbits of the outer infinite region for  $\gamma_1 \geq 1$  cannot cut the talweg since this line is inaccessible to them; thus they have to cut the equator.

C. Conclusions:

Combining the result of part A with that of part B, we can state the following theorem:

Theorem: All orbits for  $\gamma_1 \geq 1$  cut the equator.

D. Application of a theorem of Poincaré on closed geodesics.

In connection with the characteristic surface discussed in chapter III, it is interesting to note that a theorem of H. Poincaré can be applied. Poincaré proved that on a closed surface of positive curvature there are at least three closed geodesics<sup>a</sup>. The part of the characteristic surface corresponding to the inner allowed region of the meridian plane is a closed surface of everywhere positive curvature and with a singular point. The three closed geodesics of Poincaré correspond to three periodic orbits in the meridian plane.

Theorem: In the inner allowed region for  $\gamma_1 \geq 1$  there are at least three periodic orbits<sup>a</sup>.

It has been known for a long time that there are two periodic orbits in this region, namely, the equatorial orbit and the inner principal periodic orbit. C. Störmer found for special  $\gamma_1$ 's another periodic orbit starting from,

84a.

and ending at, the inner  $M = 0$  line. This last periodic orbit might be the third orbit predicted by Poincaré's theorem.

References.

1. The existence of this theorem was suspected by Professors M.S.Vallarta and G.Lemaitre a long time ago. The former suggested the problem of the proof of this theorem as the subject of a thesis to the author.
2. Henri Poincaré, American Mathematical Society Transactions, 6, 237-274, 1905.
3. O. Godart has previously given another proof of this theorem, not yet published.

CHAPTER XVIII. THE ORBITS FOR  $0 < \beta_1 < 1$ .

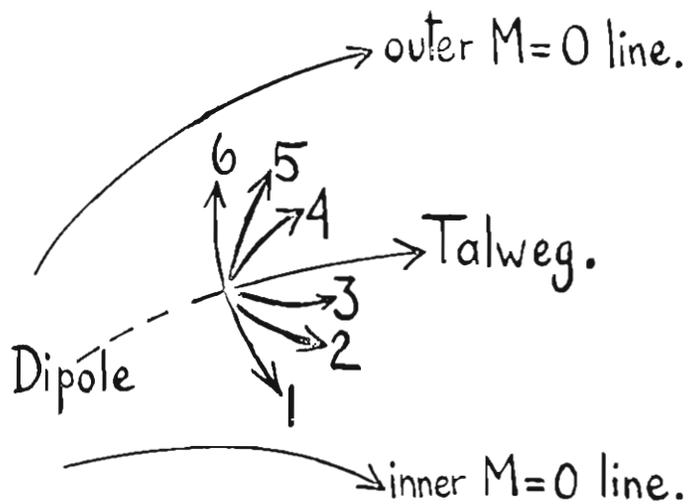
In the case  $\beta_1 \geq 1$  treated in the last chapter we were able to prove that all orbits cut the equator. For the case  $\beta_1 < 1$  treated in this chapter we can prove only a much more restricted theorem, namely, that all possible periodic orbits cut the equator.

To prove this theorem we proceed to analyze the possible types of orbits for the  $\beta_1$ 's in question. Since all orbits cut the combined equator-talweg locus, as was proved in chapter XIV, we can classify them into two sets. In one set we include all the orbits which cut the equator first, and in the other set all those that cut the talweg first. For the proof of the theorem that interests us we can forget about the first set and consider only the orbits of the second set.

It is convenient to begin to study these orbits at their intersections with the talweg. Consider a point P of the talweg and all the trajectories passing through it; each trajectory has two directions. Let us call the positive sense on the talweg the direction of the tangent vector whose projection on the equator points away from the dipole, and let us consider only the directions of the orbits pointing in the positive sense of the talweg. See Fig.1. Only on the orbit normal to the talweg shall we consider both directions.

All the orbits starting in the region between the talweg and the inner  $M = 0$  line, like 1, 2 and 3 of Fig.1., emerge from this region after cutting the talweg and suffering an inflection at the intersection, and penetrate into the region between the talweg and the outer  $M = 0$  line at an angle talweg-trajectory less than  $90^\circ$ , provided they do not cut the equator first; this was proved in chapter XVI. If they cut the equator first, we discard them as needing no further consideration for the proof of the theorem stated at

Fig. 1.



the beginning of this chapter. If they emerge on the other side of the talweg, after cutting it and having an inflection at the intersection, they become of the same type as 4 and 5 of Fig.1. These considerations show that we need to analyze only the orbits that start at the talweg in the region between this line and the outer  $M = 0$  line, like 4, 5 and 6 of Fig.1.

Let us consider all possibilities, observing that all orbits start with their concavity towards the right.

1) First Possibility.

An orbit may retain its original sense of the concavity until it cuts the equator and needs then no further consideration from the point of view of proving our theorem.

2) Second Possibility.

An orbit may retain its original sense of the concavity until it cuts the talweg again. In this case it has to cut the talweg at an angle trajectory-talweg less than  $90^\circ$  because of its concavity. See chapter X.

At the talweg it suffers a 2-inflection and penetrates into the region between the talweg and the inner  $M = 0$  line. After this it either cuts the equator directly, or it cuts the talweg again, at an angle talweg-trajectory less than  $90^\circ$ , as is proved in chapter XVI. At this intersection it suffers an S-inflection and emerges into the region between the talweg and the outer  $M = 0$  line with its concavity towards the right as it started. This second possibility can either lead into the first possibility, or repeat itself, or lead into the possibilities considered later.

If it repeats itself the points of intersection with the talweg form a succession proceeding in the direction of the equator. The rest of the argument to prove that such orbits cut the equator is the same as that given on page 83.

Thus if the second possibility leads into the first the orbit cuts the equator, and if it repeats itself the orbit still cuts the equator; however it may lead into either of the other two possibilities considered below.

### 3) Third Possibility.

The orbit may penetrate into the outer region of 2-inflexions (region II of Fig. 10, chapter VIII). Before this the orbit can have no inflection whatsoever. Neither can it have a bowl flat-point at its intersection with the third branch (Figs.9. and 10., chapter VIII) because of its concavity towards the right.

In the region of 2-inflexions the orbit may or may not suffer an inflection; we shall consider these two cases.

a) Case 1. The orbit suffers an inflection. For this to happen it is necessary that the orbit be descending. To justify this recall that to have an inflection in this region the orbit must be normal to a line  $M = \text{const.}$ . A comparison of Fig. 10., chapter VIII, with Fig.6., chapter II, clearly proves that only descending orbits can do this. Since the orbit started from the talweg ascending it must have had a maximum, which is permitted anywhere along its path. Once it is descending it has to have a 2-inflexion since it can have no minimum and cannot cut the equator with its concavity towards the right. After having the 2-inflexion it must continue to descend. Again its sense of concavity will not allow it to have a horizontal asymptote, see chapter XII. Thus the only opening allowed to it is to cut the equator.

b) Case 2. The orbit does not suffer an inflection. This is realized only if the orbit is continually ascending. Then it has to have an asymptote.

To summarize for the third possibility: orbits which penetrate into the outer region of 2-inflexions either cut the equator or have an asymptote.

### 4) Fourth Possibility.

An orbit may retain its sense of concavity and never penetrate into the outer region of 2-inflexions (region II, Fig.10., chapter VIII). It has to be continually ascending and therefore it has to have an asymptote making an angle with the  $\xi$ -axis greater than  $39^{\circ}14'$ , see Fig.9., chapter VIII.

88.

Conclusions:

Since there are no other possibilities except the four enumerated above, we infer that for  $0 < \delta_1 < 1$  the orbits either cut the equator or go to infinity. Hence we have proved the following theorem:

Theorem: For  $0 < \delta_1 < 1$  there are no periodic orbits that do not cut the equator.

CHAPTER XIX. THE ORBITS FOR  $\delta_1 = 0$ :

In the equations (24) of chapter II we give the simple connection that exists between the real meridian plane and the  $\xi, \eta$  plane, i.e., the  $\xi, \eta$  plane is an enlargement of the real meridian plane by a factor of  $2\gamma_1$ . For  $\delta_1 = 0$  this transformation is useless, the origin of the  $\xi, \eta$  plane all of the points of the real meridian plane.

To study the case  $\delta_1 = 0$  we must go back to the equations of motion in the real meridian plane; they are the equations (27), (28) and (29) of Appendix I. For the purpose of applying the geometrical methods developed in this thesis it is convenient to express the equations of motion in terms of the cartesian coordinates  $x, y$  of the real meridian plane rather than to use the polar coordinates  $r$  and  $\lambda$ . The transformation is easily accomplished in equations (27), (28) and (29) of Appendix I. by substituting the polar coordinates and their derivatives by the cartesian coordinates and their derivatives, using the equations (1), (2), (3), (4), (5) and (6).

$$(1) \quad x = r \cos \lambda$$

$$(2) \quad y = r \sin \lambda$$

$$(3) \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \lambda - r \dot{\lambda} \sin \lambda$$

$$(4) \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \lambda + r \dot{\lambda} \cos \lambda$$

$$(5) \quad \ddot{x} = (\ddot{r} - r \dot{\lambda}^2) \cos \lambda - (2\dot{r} \dot{\lambda} + r \ddot{\lambda}) \sin \lambda$$

$$(6) \quad \ddot{y} = (\ddot{r} - r \dot{\lambda}^2) \sin \lambda + (2\dot{r} \dot{\lambda} + r \ddot{\lambda}) \cos \lambda$$

The transformed equations are

$$(7) \quad \ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$(8) \quad \ddot{y} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial y}$$

90.

$$(9) \quad \dot{x}^a + \dot{y}^a = 1 - \left[ \frac{x}{(x^a + y^a)^{3/2}} - \frac{2j_1}{x} \right]^a = Q$$

The characteristic surface of the dynamical problem defined by (7), (8) and (9) is given by

$$(10) \quad ds^a = \left[ 1 - \left( \frac{x}{(x^a + y^a)^{3/2}} - \frac{2j_1}{x} \right)^a \right] (dx^a + dy^a)$$

as can be immediately seen from the conclusions of chapter I, page 3. For  $j_1 = 0$  equation (10) becomes

$$(11) \quad ds^a = \left( 1 - \frac{x^a}{(x^a + y^a)^3} \right) (dx^a + dy^a)$$

For the sake of brevity, let

$$(12) \quad N = 1 - \frac{x^a}{(x^a + y^a)^3}$$

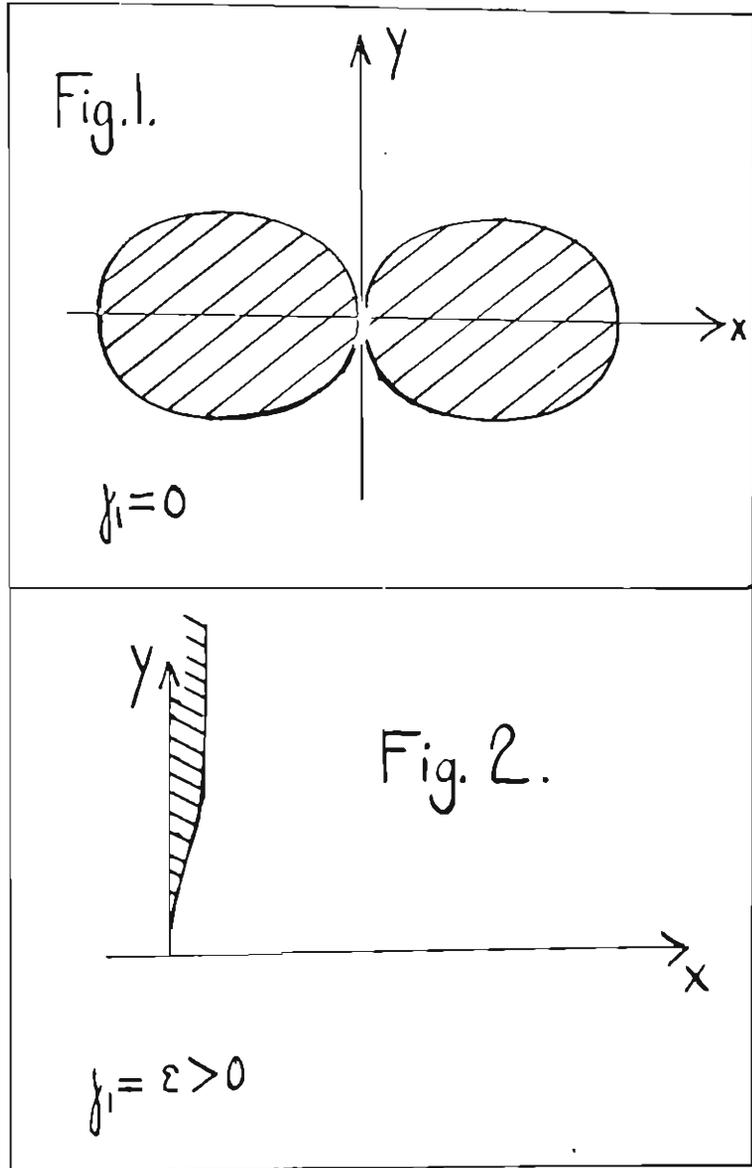
Then the equations of the geodesics become

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d^a y}{dx^a} = \frac{1}{2N} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^a \right] (N_y - N_x \frac{dy}{dx}) \\ \frac{d^a x}{dy^a} = \frac{1}{2N} \left[ 1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^a \right] (N_x - N_y \frac{dx}{dy}) \end{cases}$$

where the subscripts x and y denote partial derivatives with respect to these variables. Equations (13) define the trajectories only in the regions of the x,y plane where N is positive, as can be seen from equation (11).

The locus  $N = 0$  separates the allowed from the forbidden region. Fig.1. shows this locus and both regions. It is interesting to note that the equation of the line  $N = 0$  in the real meridian plane is the same as the equation of the talweg in the  $\xi, \eta$  plane.

As one can see from Fig.1. the dipole axis is now in the allowed region. Since the particles can now cross



91.

this axis it is necessary to consider the part of the meridian plane corresponding to negative  $x$ 's. For all positive  $h_1$ 's the dipole axis is in the forbidden region, as shown before, and it is also in the forbidden region for all negative  $h_1$ 's, as we show in chapter XX. It requires, therefore, a careful consideration to be convinced that the dipole axis is accessible for  $h_1 = 0$ .

Without referring to a particular  $h_1$  there is no reason for objecting to the placing of a particle on the dipole axis and shooting it off with any velocity whatsoever. Such a particle is moving in a meridian plane at its start, since the dipole axis and the tangent to the orbit at the starting point always form a meridian plane. What is the  $h_1$  of such a particle? To find its  $h_1$  we have to use a formula deduced by Störmer for the angle which an orbit makes with the meridian plane:

$$\sin \theta = -\frac{2h_1}{x} + \frac{x}{\rho^3}$$

where  $\rho$  is the distance to the dipole. In the case that we are studying,  $\sin \theta = 0$ , hence  $2h_1 = x^2/\rho^3$ . For  $x = 0$  and  $\rho \neq 0$ ,  $2h_1 = 0$ . Thus the  $h_1$  of a particle, which is shot off from the dipole axis with any energy whatsoever, must be zero.

Another argument which makes the crossing of the dipole axis by particles plausible is a consideration of the continuity of the space trajectories. Consider the outer forbidden region of the meridian plane for very small positive  $h_1$ 's. This region is shown in Fig. 2. If we rotate Fig. 2. around the  $y$ -axis we obtain a solid of revolution corresponding to the outer forbidden region. This forbidden domain in space surrounds the dipole axis. Particles moving in self-reversing orbits have space trajectories which touch the forbidden solid. Since at a point of self-reversal the velocity in the meridian plane is zero and since the total velocity of the particle in space is constant, the particle

must be moving at this point in a direction perpendicular to the meridian plane and thus the space orbit must touch the forbidden solid. For  $\gamma_1 \rightarrow 0$  the forbidden solid tends to the dipole axis as a limit. Since in space there are no points of self-reversal, for  $\gamma_1 = 0$  the trajectory that touches the forbidden solid, i.e., the axis, must shoot right through it.

Let us find for the case  $\gamma_1 = 0$  the regions of maxima and of minima. From equation (13)

$$(14) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{N_y}{2N} \quad \text{when} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

and

$$(14') \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{N_x}{2N} \quad \text{when} \quad \frac{dx}{dy} = 0.$$

From (12) we obtain by partial differentiation

$$(15) \quad N_x = \frac{6x^2y - 2x^3 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$(16) \quad N_y = \frac{6x^2y}{(x^2 + y^2)^4}$$

From (16) and (14) we see that in the region above the equator  $d^2y/dx^2$  has to be positive for  $dy/dx = 0$ , and hence this region is a region of y-minima; below the equator  $d^2y/dx^2$  for  $dy/dx = 0$  has to be negative thus allowing only y-maxima. Note that at the dipole axis  $d^2y/dx^2 = 0$  for  $dy/dx = 0$ . From (14') and (15) we see that the locus

$$(17) \quad 6x^2y - 2x^3 - 2xy^3 = 0$$

separates the regions where  $d^2x/dy^2$  is positive for  $dx/dy = 0$  from the regions where it is negative, thus separating regions of x-maxima from those of x-minima. Locus (17) in the

93.

real plane is only the x-axis.  $N_x$  is positive for negative values of x and negative for positive values of x. Hence the orbits can have only x-maxima at the right of the dipole axis and only x-minima at the left of the dipole axis. Fig.3. shows the distribution of x and y extrema in the meridian plane, as well as the signs of  $d^2y/dx^2$  for  $dy/dx = 0$ , and of  $d^2x/dy^2$  for  $dx/dy = 0$ . By inspection of Fig.3. one can easily see that the following theorem holds:

Theorem: For  $\beta_1 = 0$  any orbit having a horizontal tangent either does not cut the equator or it is the equator itself.

To prove this theorem consider an orbit with a horizontal tangent above the equator. Assume first that the point in question is not on the dipole axis.  $d^2y/dx^2$  being then positive the orbit has a minimum there. The two ascending branches cannot turn downwards because to do that they would have to pass through a maximum and maxima are not allowed above the equator. Hence they continue ascending and such an orbit can certainly not cut the equator.

Now let us examine a point on the dipole axis or an orbit with a horizontal tangent. At such a point  $dy/dx = 0$ ,  $d^2y/dx^2 = 0$ ,  $d^3y/dx^3 = 0$  and  $d^4y/dx^4 > 0$ . Hence an orbit with a horizontal tangent at its intersection with the dipole axis has a minimum flat-point here. What was said before for the orbit with an ordinary minimum holds as well for this orbit. Since the equator itself is an orbit, the theorem is proved.

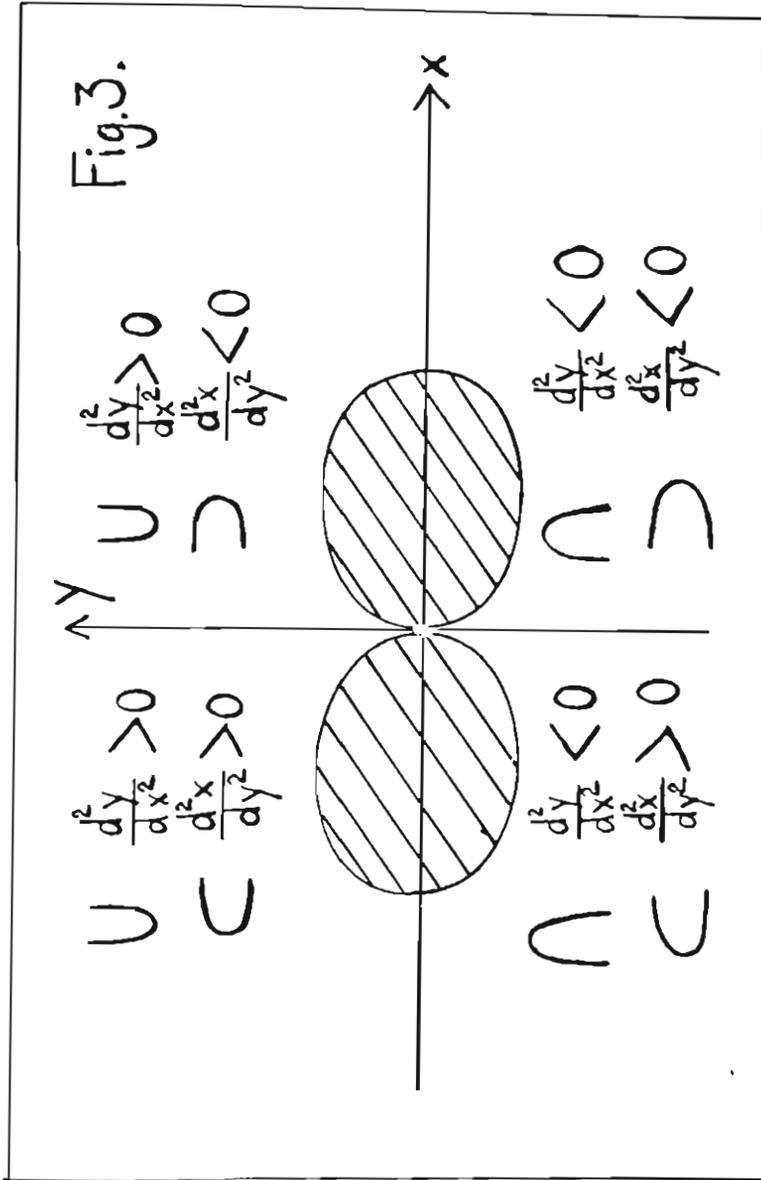
The important conclusion is:

Theorem: For  $\beta_1 = 0$  there are an infinity of orbits which do not cut the equator.

This theorem makes plausible the existence for very small  $\beta_1$ 's of orbits that do not cut the equator, and which were discussed as "possible" in chapter XVIII.

#### References.

1. C. Störmer, On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipole. Page 11. University Observatory, Oslo. Publication No. 10. Oslo, 1934.



CHAPTER XX. THE ORBITS FOR  $\gamma_1 < 0$ .

The equation (10) of chapter XIX defines the characteristic surface for all values of  $\gamma_1$ . When  $\gamma_1$  is negative it is convenient to write, as C. Störmer does,  $\gamma_1 = -\gamma$ ; equation (10) of chapter XIX becomes then

$$(1) \quad ds^2 = \left[ 1 - \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{2\gamma}{x} \right)^2 \right] (dx^2 + dy^2)$$

In this case it is desirable, as it was in the case  $\gamma_1 > 0$ , to make the transformation

$$(2) \quad \xi = 2\gamma x$$

$$(3) \quad \eta = 2\gamma y$$

The  $ds^2$  of the characteristic surface becomes in the new coordinates

$$(4) \quad ds^2 = (2\gamma)^2 \left[ \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^4 - \left( \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} + \frac{1}{\xi} \right)^2 \right] [d\xi^2 + d\eta^2]$$

Changing the unit of length used on the characteristic surface, one can get rid of the factor  $(2\gamma)^2$ . The equation of the geodesics is not affected at all by this change.

$$(5) \quad ds^2 = \left[ \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^4 - \left( \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} + \frac{1}{\xi} \right)^2 \right] [d\xi^2 + d\eta^2]$$

Note that the symbol  $ds$  is used for the element of arc measured in the new unit of length.

In the case of negative  $\gamma_1$ 's it is convenient to make similar conventions to the ones made for positive  $\gamma_1$ 's.

$$(6) \quad \left( \frac{1}{2\gamma_1} \right)^4 = a$$

$$(7) \quad (\xi^2 + \eta^2) = r^2$$

$$(8) \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} + \frac{1}{\xi} = V$$

$$(9) N = a - v^2$$

With these definitions  $ds^*$  becomes

$$(10) ds^2 = [a - v^2][d\xi^2 + d\eta^2]$$

or

$$(11) ds^2 = \left[ a - \left( \frac{\xi}{\xi^2} + \frac{1}{\xi} \right)^2 \right] [d\xi^2 + d\eta^2]$$

or

$$(12) ds^2 = N[d\xi^2 + d\eta^2]$$

The potential field in the  $\xi, \eta$  plane is formed by the lines  $N = \text{const.}$  This potential field is the same for all values of  $\gamma$ , except for the labelling of the level lines. Fig. 1. shows the lines  $N = 0$  for  $\gamma = 0.03$  and for  $\gamma = 0.2$  (reproduced from C. Störmer, ref. 1., chapter VI). The allowed and forbidden regions are simply connected in this case.

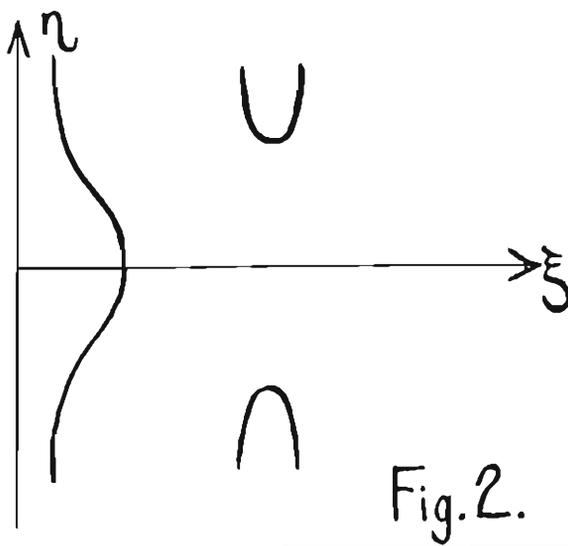
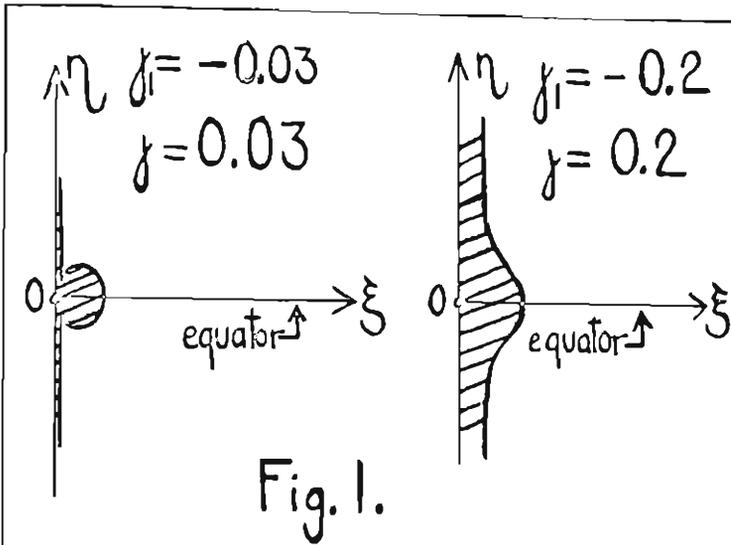
We shall prove in this chapter that there are orbits for  $\gamma_1 < 0$  which do not cut the equator.

To prove this theorem let us first establish the equation of the geodesics of the characteristic surface. It is

$$(13) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{1}{2N} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \left[ N_\eta - N_\xi \frac{d\eta}{d\xi} \right]$$

A careful inspection of the regions of  $\eta$ -maxima and  $\eta$ -minima in the  $\xi, \eta$  plane is sufficient for the proof in question. For an  $\eta$ -extremum  $d\eta/d\xi = 0$ , and hence

$$(14) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{N_\eta}{2N}$$



From (8) and (9)

$$(15) \quad N_{\eta} = -2VV_{\eta} = \frac{6E\eta}{r^5} \left( \frac{r}{F^3} + \frac{1}{\xi} \right)$$

From (15) and (14)

$$(16) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \left[ \frac{3J}{Nr^5} \left( \frac{r}{F^3} + \frac{1}{\xi} \right) \right] \eta$$

In the allowed region and for  $d\eta/d\xi = 0$ ,  $d^2\eta/d\xi^2$  has the same sign as  $\eta$ , since,  $\xi$  and  $r$  being positive,

$$\frac{3E}{Nr^5} \left( \frac{r}{F^3} + \frac{1}{\xi} \right)$$

is always positive. The sign of  $d^2\eta/d\xi^2$  decides the character of the extremum. Fig.2. shows the region of  $\eta$ -maxima and  $\eta$ -minima.

Observe in Fig.1. that above the equator all self-reversing orbits have not only to start ascending but also to continue to ascend since they are not allowed to have maxima. Thus they cannot possibly cut the equator.

Theorem: For  $\gamma_1 < 0$  no self-reversing orbit cuts the equator; however the equator itself is a self-reversing orbit.

Any other orbit having a horizontal tangent above the equator has a minimum at this point. On both sides of the minimum the orbit ascends and, maxima being forbidden above the equator, it can never descend.

Theorem: For  $\gamma_1 < 0$  orbits with a horizontal tangent have only one  $\eta$ -extremum and do not cut the equator.

## APPENDIX I. THE EQUATIONS OF MOTION.

The equations of motion of a charged particle in the field of a magnetic dipole can be derived from a variational principle similar to the one established by Weyr for the form of a path of a current of minimal electromagnetic action<sup>1</sup>.

Consider a dipole of moment  $\bar{M} = M\bar{y}$  where  $\bar{y}$  is a unit vector in the direction of the dipole axis; consider also a charged particle of charge  $q$  and mass  $m$  starting at a point A with an initial velocity  $\bar{v}$ . Assume that at the instant  $t$  the velocity of the particle is  $\bar{v}$ , and its position vector with respect to the dipole is  $\bar{r}$ ; then

$$(1) \quad \bar{H} = \frac{q\bar{v} \times \bar{r}}{r^3}$$

is the magnetic field produced by the moving particle at the instant  $t$  at the dipole, and

$$(2) \quad \bar{y} \frac{q\bar{r} \times \bar{v}}{r^3} = q \frac{\bar{y} \cdot \bar{r} \times \bar{v}}{r^3}$$

is the component of this field along the dipole axis. If  $t_A$  and  $t_B$  are the times at which the particle passes through A and B respectively, then

$$(3) \quad \frac{1}{t_B - t_A} \int_A^B q \frac{\bar{y} \cdot \bar{r} \times \bar{v}}{r^3} dt$$

is the time average of the component along the dipole axis of the magnetic field produced by the moving particle at the dipole. The integral

$$(4) \quad \frac{1}{t_B - t_A} \int_A^B v^2 dt$$

is the time average of the square of the velocity of the particle when going from A to B.

Assume that the mass of the particle at the initial velocity  $v_0$  is  $m_0$ . (It will be proved in this appendix that the magnitude of the velocity and hence the mass of the particle remains constant during the motion.) With these quantities, the dipole moment  $M$ , and the charge  $q$  of the particle, Störmer defines a special unit of length\*

$$(5) \quad c_1 = \sqrt{\frac{Mq}{m_0 v_0}} \quad \text{in cm.}$$

when  $M$  is in electromagnetic units,  $|q|$  in electrostatic units,  $m_0$  in grams and  $v_0$  in cm/sec.

The variational principle that defines the motion of the charged particle is

$$(6) \quad \delta \int_A^B \left[ \frac{\bar{y} \cdot \bar{g} \times \bar{v}}{g^3} + \frac{v^2}{2c_1^2 v_0} \right] dt = 0$$

The significance of the two parts of this integral is then:

- 1)  $\int_A^B (\bar{y} \cdot \bar{g} \times \bar{v}) dt / g^3$  is proportional to the time average of the component along the dipole axis of the magnetic field produced by the moving charge at the dipole;
- 2)  $\int_A^B v^2 dt / 2c_1^2 v_0$  is proportional to the time average of the square of the velocity of the particle when going from A to B.

We shall obtain first the equations of motion in cartesian coordinates.

The components of the vectors  $\bar{y}$ ,  $\bar{g}$  and  $\bar{v}$  in cartesian coordinates are

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{y} &= (0, 0, 1) \\ \bar{g} &= (x, y, z) \\ \bar{v} &= (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned}$$

where the dot denotes derivation with respect to the time. Equation (6) in terms of cartesian coordinates becomes

$$(8) \quad \delta \int_A^B \left[ \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ x & y & z \end{vmatrix}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2c_1^2 v_0} \right] dt$$

99.

Then the Euler differential equations of (8) are

$$(9) \quad \frac{\ddot{x}}{c_1^2 v_0} = - \frac{d}{dt} \left( \frac{y}{\rho^3} \right) - \frac{\dot{y}}{\rho^3} - \frac{3x(\dot{x}y - x\dot{y})}{\rho^5}$$

$$(10) \quad \frac{\ddot{y}}{c_1^2 v_0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{\rho^3} \right) + \frac{\dot{x}}{\rho^3} - \frac{3y(\dot{x}y - x\dot{y})}{\rho^5}$$

$$(11) \quad \frac{\ddot{z}}{c_1^2 v_0} = - \frac{3z(\dot{x}y - x\dot{y})}{\rho^5}$$

Multiplying (9) by  $\dot{x}$ , (10) by  $\dot{y}$ , and (11) by  $\dot{z}$  and adding we obtain

$$(12) \quad \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = 0$$

Hence

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 0$$

or

$$(13) \quad v^2 = \text{const.}$$

$$(14) \quad v = \text{const.}$$

Thus the magnitude of the velocity of a particle is constant along its path.

The equations of motion are best expressed in the spherical polar coordinates  $\rho, \lambda, \psi$ ;  $\rho$  being the distance from the dipole,  $\lambda$  the geomagnetic latitude and  $\psi$  the geomagnetic longitude. Equation (6) becomes

$$(15) \quad \delta \int_A^B \left[ \frac{\cos^2 \lambda \dot{\psi}^2}{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\lambda}^2 + \rho^2 \cos^2 \lambda \dot{\psi}^2}{2c_1^2 v} \right] dt = 0$$

The corresponding Euler differential equations are

$$(16) \quad \frac{\ddot{\rho}}{c_1^2 v} = - \frac{\cos^2 \lambda \dot{\psi}^2}{\rho^2} + \frac{\rho \dot{\lambda}^2 + \rho \cos^2 \lambda \dot{\psi}^2}{c_1^2 v}$$

$$(17) \quad \frac{1}{c_1^2 v} \frac{d}{dt} [\rho^2 \dot{\lambda}] = - \frac{2 \cos \lambda \sin \lambda \dot{\psi}^2}{\rho} - \frac{\rho^2 \sin \lambda \cos \lambda \dot{\psi}^2}{v}$$

$$(18) \frac{d}{dt} \left[ \frac{\cos^2 \lambda}{\vartheta} + \frac{\vartheta^2 \cos^2 \lambda \dot{\varphi}}{c^2 v} \right] = 0$$

Equation (17) admits an immediate integral

$$(19) \frac{\cos^2 \lambda}{\vartheta} + \frac{\vartheta^2 \cos^2 \lambda \dot{\varphi}}{c^2 v} = \text{const.}$$

It is very convenient to normalize the equations of motion expressing  $\vartheta$  and  $v dt$  in Störmer units and introducing a new time  $\tau$ . The normalized radius vector  $r$  and the new time  $\tau$  are defined by

$$(20) \quad \vartheta = c_1 \Gamma$$

$$(21) \quad v dt = c_1 d\tau$$

Expressing equations (13), (16), (17) and (19) in terms of  $r, \lambda, \varphi$  and  $\tau$  and denoting with a dot the derivative with respect to  $\tau$ , we obtain

$$(22) \quad \dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2 + r^2 \cos^2 \lambda \dot{\varphi}^2 = 1$$

$$(23) \quad \ddot{r} - r \dot{\lambda}^2 - r \cos^2 \lambda \dot{\varphi}^2 = - \frac{\cos^2 \lambda}{r^2} \dot{\varphi}$$

$$(24) \quad r \ddot{\lambda} + 2 \dot{r} \dot{\lambda} + r \sin \lambda \cos \lambda \dot{\varphi}^2 = - \frac{2 \sin \lambda \cos \lambda}{r^2} \dot{\varphi}$$

$$(25) \quad r^2 \cos^2 \lambda \dot{\varphi} + \frac{\cos^2 \lambda}{r} = 2 \gamma_1$$

$\gamma_1$  is a parameter introduced in the problem by Störmer, and has the meaning such that  $2 \gamma_1$  is the component along the dipole axis of the angular momentum of the particle at infinity as can be seen from (25).

From equation (25) we can express  $\dot{\varphi}$  as a function of  $r, \lambda$  and  $\gamma_1$ .

$$(26) \quad \dot{\varphi} = \frac{2 \gamma_1}{r^2 \cos^2 \lambda} - \frac{1}{r^3}$$

101.

Eliminating  $\dot{\psi}$  from (22), (23) and (24)

$$(27) \quad \ddot{r} - r\dot{\lambda}^2 = \frac{4y_1^2}{r^3 \cos^2 \lambda} - \frac{6y_1}{r^4} + \frac{2\cos^2 \lambda}{r^5}$$

$$(28) \quad r\ddot{\lambda} + 2\dot{r}\dot{\lambda} = \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{r^5} - \frac{4y_1^2}{r^3} \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda}$$

$$(29) \quad \dot{r}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 = 1 - \frac{4y_1^2}{r^2 \cos^2 \lambda} + \frac{4y_1}{r^3} - \frac{\cos^2 \lambda}{r^4}$$

Störmer introduced a Goursat transformation of the meridian plane defined by

$$(30) \quad r = \frac{1}{2y_1} e^x$$

$$(31) \quad d\tau = \left(\frac{1}{2y_1}\right)^3 e^{2x} d\sigma$$

This is a conformal transformation<sup>3</sup>. Equations (27), (28) and (29) become

$$(32) \quad \frac{d^2 x}{d\sigma^2} - \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \lambda} - 3e^{-x} + 2e^{-2x} \cos^2 \lambda$$

$$(33) \quad \frac{d^2 \lambda}{d\sigma^2} = e^{-2x} \sin \lambda \cos \lambda - \frac{\sin \lambda}{\cos^3 \lambda}$$

$$(34) \quad \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 = a e^{2x} + 2e^{-x} - e^{-2x} \cos^2 \lambda - \frac{1}{\cos^2 \lambda}$$

where

$$(35) \quad a = \left(\frac{1}{2y_1}\right)^4$$

Following Störmer we define a quantity P

$$(36) \quad P = a e^{2x} - (e^{-x} \cos \lambda - \sec \lambda)^2$$

Denoting the partial derivatives of P with respect to x and

$\lambda$  by subscripts we can simplify (32), (33) and (34) to

$$(37) \quad \frac{d^2 x}{d\sigma^2} = \frac{1}{2} P_x$$

$$(38) \quad \frac{d^2 \lambda}{d\sigma^2} = \frac{1}{2} P_\lambda$$

$$(39) \quad \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 = P$$

Those last three equations define a dynamical problem, namely, the motion of a particle of mass 1 in the  $x, \lambda$  plane in a potential field  $V = -\frac{1}{2} P$  with zero total energy.  $V = -\frac{1}{2} P$  is the potential energy of the particle,  $T = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 \right]$  is its kinetic energy, and its total energy  $h$  is zero; hence

$$(37') \quad \frac{d^2 x}{d\sigma^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2} P_x$$

$$(38') \quad \frac{d^2 \lambda}{d\sigma^2} = -\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} P_\lambda$$

$$(39') \quad \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 \right] - \frac{1}{2} P = T + V = h = 0$$

From equation (39) it is evident that physical motion is possible only for positive  $P$ 's, and Störmer<sup>4</sup> has called these regions  $P \geq 0$  the "allowed regions" of the meridian plane. On the other hand wherever  $P < 0$  motion is physically impossible and these regions are known as the "forbidden regions" in the meridian plane. Thus for each  $j_1$  the  $P = 0$  lines separate the allowed from the forbidden regions.

The potential field defined by

$$(40) \quad ae^{2x} - (e^{-x} \cos \lambda - \sec \lambda)^2 = -2V$$

represents a set of families of curves, one family for each value of  $j_1$  (i.e.,  $a$ ), and one member of a family for each

103.

value of  $V$ . The disadvantage of the coordinates  $x$  and  $\lambda$  for the special purpose of this thesis is that for each value of  $y_1$  the topography of the potential field changes.<sup>5</sup>

#### References.

1. Emil Weyr, Über die Curve der Größten und Kleinsten Elektromagnetischen Wirkung. Sitzungsberichte der K. und K. Akademie der Wissenschaften zu Prag. 1869.
2. Carl Störmer, Publications of the University Observatory, Oslo. No. 10, 1934.
- 3.. Carl Störmer, Zeitschrift für Astrophysics, 1, 237, 1930.
4. Carl Störmer, Sur le Mouvement d'un Point Matériel portant une charge d'électricité sous l'action d'un aimant élémentaire. Videnskabselskabets Skifter, Christiania, 1904..
5. M. S. Vallarta, An Outline of the Theory of the Allowed Cone of Cosmic Radiation. University of Toronto Press. 1938. Pages 13 to 17.

BIOGRAPHY.

In December 1928 I received the degree "Abitur" at the Deutsche Oberrealschule zu Mexico. I studied in the Department of Civil Engineering of the Technische Hochschule zu Darmstadt, Germany, for three terms from 1929 to 1930. During the years from 1931 to 1935 I attended courses in the departments of Oil Engineering and of Mathematics and Physics at the Universidad Nacional de México.

I was appointed professor of Analytic Geometry and Calculus in the Escuela Superior de Construcción of the Secretaría de Educación Pública of the Mexican Government in 1932; and in 1934 I became professor of Higher Geometry in the Department of Mathematics and Physics of the Universidad Nacional de México. In 1937 I was appointed member of the Mexican Academy of Sciences, "Antonio Alzate".

In June 1937 I was granted a John Simon Guggenheim Memorial Foundation fellowship for the purpose of studying for the degree of Doctor of Philosophy in Physics at the Massachusetts Institute of Technology. This fellowship was in effect until February, 1940, and in March of the same year the President of Mexico, General Lázaro Cárdenas, awarded me a stipend to finish my doctorate studies. I received a stipend from the Universidad Nacional de México during all my residence in the United States, as well as scholarships from Massachusetts Institute of Technology for three terms.

A list of publications follows:

- 1) Representación de un Tensor por medio de Seis Vectores, Revista Ingeniería, México D. F., México, 1937.
- 2) On Periodic Orbits in the Equatorial Plane of a Magnetic Dipole. C. Graef, S. Kusaka. Jour. of Math. and Physics, 17, 43, 1938.
- 3) Galactic Rotation and the Intensity of Cosmic Radiation at the Geomagnetic Equator. M.S.Vallarta, C.Graef, S.Kusaka. Physical Review, 55, 1, 1939.

## On Birkhoff's New Theory of Gravitation

A. BARAJAS, G. D. BIRKHOFF, C. GRAFF, AND M. SANDOVAL VALLARTA

*National University of Mexico, Mexico D. F., Mexico, and Harvard University, Cambridge, Massachusetts*

(Received May 4, 1944)

It is pointed out in the first place: (1) in Birkhoff's gravitational theory based on "flat" space-time, the "red shift" is accounted for by the energy change of the photon as it travels from the emitting body, whereas the photon plays no especial role in the Einstein theory; (2) the solution of the problem of two or more bodies is feasible in the new theory because of its simpler character. Four comments of H. Weyl concerning the Birkhoff theory are discussed, and it is concluded that these are to be taken with much reserve. In regard to the third of these comments it is pointed out that the "perfect fluid" used by Birkhoff as the ultimate carrier of mass and electric charge is to be characterized as the simplest fluid with disturbance velocity that of light ( $c$ ). It is affirmed to be a glaring defect of earlier relativistic theories that the disturbance

velocity in matter has been taken as arbitrary, although that of gravitation and of the electromagnetic field have been equal to  $c$ . The differential equations of the theory are then set up. An additional cosmological term in the gravitational potentials  $h_{ij}$  is suggested, namely,

$$h_{ij}^* = (K/8)(t^2 - x^2 - y^2 - z^2)g_{ij},$$

where  $x, y, z, t$  are Lorentz coordinates and  $K$  is the (small) cosmological constant. The explicit formula for the rate of advance of periastron  $P$  of two bodies (mass points) of masses  $m_1$  and  $m_2$  is given, as obtained from the solution of the two-body problem in the theory, and its possible application to double stars is referred to. The authors propose to give a detailed development of the theory and its applications in papers to be published shortly elsewhere.

## I. PRELIMINARY OBSERVATIONS

IN a recent number of a journal of wide circulation,<sup>1</sup> Hermann Weyl has given expression to several critical remarks on G. D. Birkhoff's theory of gravitation of 1942.<sup>2</sup> In this note we intend first to analyze briefly the substance of Weyl's comments, secondly to consider the structure of the new theory from the physical

point of view, and lastly to refer briefly to its physical applications.

Before doing this, however, we would like to make certain general observations.

The explanation of the "red shift" is fundamentally different in the gravitational theories of Einstein and Birkhoff. In the new theory the red shift has turned out to be accounted for by the energy change of the photon as it travels from the emitting body to the Earth; this explanation fully takes account of the role of

<sup>1</sup> H. Weyl, *Math. Rev.* 4, 285 (1943).<sup>2</sup> G. D. Birkhoff, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 29, 231 (1943).

the light signal (photon). In Einstein's interpretation, on the other hand, the frequency of the light wave emitted by an atom on a distant body is compared with the frequency of the light wave emitted by the same atom on the Earth, and any phenomena taking place while the light signal (photon) travels from the emitting body to the Earth play no part whatsoever.

Again, the difficulties accompanying the two-body problem and other questions in the general theory of relativity are too well known to require mention, while in Birkhoff's theory the solution of the problem of two or more bodies is quite within reach and will soon be available. This is due to the essentially simpler character of the latter theory.

An objection which may be made to Birkhoff's theory is the introduction of an absolute reference system, which runs counter to Einstein's general relativity principle that matter determines space, and analogous philosophical ideas previously developed by Ernst Mach. But, in a sense, this objection to Birkhoff might also be urged against Einstein because in the latter's theory a *single* rotating body can still be supposed alone in the universe, which is absurd from Mach's point of view. It would be difficult indeed to set up any physical theory to which objections of this general nature could not be raised.

## II. ANALYSIS OF WEYL'S COMMENTS

To begin with, Weyl contends that Birkhoff's theory is much the same as Einstein's theory of 1916, for the case of weak gravitational fields. In a note appearing elsewhere, Barajas<sup>1</sup> has shown that the factual consequences of Einstein's theory in this case differ from Birkhoff's; further, that the choice of the gravitational potentials suggested by Weyl is unsatisfactory; and, lastly, that the trajectories of a test particle in Birkhoff's theory are not geodesics in any four-dimensional space-time.

Weyl further raises four fundamental objections to Birkhoff's theory: (1) "The connection between metric and gravitation is dissolved." (2) The proportionality between inertial and gravitational mass "has again become as mys-

terious as it was before Einstein." (3) Birkhoff's perfect fluid "appears as a primitive irreducible physical entity." (4) "There seems to be no indication that the mechanical equations spring from a universal law of conservation of energy and momentum." We now propose to take up these points in detail.

(1) With regard to the first, it should be recalled that the connection between matter and geometry, as developed by Einstein, is purchased at the expense of giving up a fundamental reference system. This implies abandoning the description of nature in terms of four fundamental independent variables, essentially unique except for the arbitrariness involved in position and velocity of a single point (Lorentz group). In the abandonment of such coordinates may be discerned a sufficient reason for the early exhaustion of all observational tests of the general theory of relativity, and also for the fundamental difficulty of assigning actual physical meaning to the coordinates introduced in problems of this theory. Indeed, almost thirty years of intensive research have failed to provide another test besides the three classical ones, or to apply the theory to other fields of physics. In spite of a great deal of work, there does not exist any satisfactory solution of the two-body problem, and the *n*-body problem has not even been formulated. Even in the simple case of Schwarzschild's solution of the one-body problem, no clear-cut physical interpretation of the Schwarzschild coordinates seems to be available. This last difficulty is so serious that it led Milne to give up the use of general coordinates in relativity.

(2) Weyl's second objection seems to be based largely on a misinterpretation. In Birkhoff's theory, just as well as in Einstein's, the equality between inertial and gravitational mass comes out of the fact that in the gravitational equations the energy tensor is linear in the mass density. While nothing similar to Einstein's "equivalence principle" has been explicitly formulated in Birkhoff's theory, it must be stated that the exact significance of the principle has yet to be found. As far as can be seen at the present time it merely asserts that bodies moving freely in empty space near attracting matter behave, relatively to a hypothetical attached reference system, in the same way under all circumstances

<sup>1</sup>A. Barajas, Proc. Nat. Acad. Sci. 30, 54 (1944).

—insofar as they so behave! From the point of view of differential geometry, it amounts to saying that in the infinitesimal neighborhood of any point in a Riemannian curved space there exists always a tangent flat space, and this is just as true in Einstein's theory as in any other.

According to Einstein, the proper language for the description of nature is that of tensors, together with the underlying group of general transformations; and the equivalence principle expresses the theorem just stated. According to Birkhoff, the proper language for this description is that of four vectors, and the underlying space-time is everywhere flat. In the latter case, the basic group involves only ten arbitrary constants, while in the former it involves four completely arbitrary functions of four completely arbitrary variables. Whichever choice is made, the equality between gravitational and inertial mass follows as a consequence both of Birkhoff's and Einstein's theories.

(3) Birkhoff has chosen the name "perfect fluid" for perhaps the simplest substance in which all disturbances are propagated with the velocity of light, on account of the similarity between the equations governing such a substance and those of a perfect fluid. The particular type of perfect fluid considered by Birkhoff is characterized by only one scalar (the mass density) and vector (the velocity). Fundamental difficulties arise if the disturbance velocity is different from that of light. From our point of view, the fact that in Einstein's theory no attention has been paid to this requirement constitutes a glaring defect, which by itself explains the possibility of Birkhoff's theory. Indeed, the postulation of a primordial substance in which all disturbances are propagated with the velocity of light is fundamentally a consequence of the assumption that the basic space-time is everywhere that of Minkowski. This is actually the only physical assumption made in Birkhoff's theory.

(4) Weyl's fourth objection also seems to spring from a misunderstanding. In Birkhoff's theory the law of conservation of energy and momentum at material velocities small compared with that of light is as much a consequence of the mechanical equations of motion (and conversely) as in Einstein's. It is true that in Birkhoff's case the conservation of energy and momentum is not

connected with a fundamental geometrical theorem (Ricci's theorem), as in Einstein's theory. But, although Einstein obtains the formal result that the divergence of the energy-momentum tensor must vanish, this does not imply the conservation of energy and momentum in an exact sense because the four-dimensional integrals of a *covariant* partial derivative in curved space-time cannot be transformed into three-dimensional integrals. Consequently the conservation theorems of Birkhoff's theory are at least much more precise.

These remarks may serve to point out that Weyl's assertions are to be taken with much reserve and that additional research is required before the usefulness of Birkhoff's theory for physics can be adequately assessed.

### III. STRUCTURE OF THE BIRKHOFF THEORY

In the light of the preceding remarks, it is possible to recapitulate as follows the considerations which lead to Birkhoff's theory. The fundamental concept of electromagnetic space-time, associated with the names of Fitzgerald, Larmor, Lorentz, Einstein, and Minkowski, has been of the first importance for physics and has played an ever increasing role in the developments of the last fifty years. The revolutionary change which this concept has brought about in physical theory is reflected in the mathematical apparatus employed. Four homogeneous variables of space and time replace the three homogeneous variables of space and the single disparate variable of time; the underlying Lorentz group replaces the Galilean group, and the language of 4 vectors replaces the language of 3 vectors characteristic of classical physics.

The early attempt of Nordström (1912) and others to incorporate gravitation in this framework failed to explain certain delicate gravitational phenomena which alone provide a crucial test. Thus, without an intensive study, electromagnetic space-time was abandoned for a curved or Riemannian space-time, latent in the ideas of Minkowski and realized in Einstein's brilliant gravitational theory of 1916.

It is exceedingly easy to exaggerate the significance of the three so-called critical confirmations of this theory, of which by far the most

certain is afforded by the excessive perihelial advance of the planet Mercury. In fact, the building of theories from the aesthetical-mathematical point of view has shown that dimensional considerations enter which lead always to the same result, aside from simple numerical factors. More definitely, the three formulas for perihelial advance, bending of light, and red shift take always the respective forms

$$qm/a(1 - e^2), \quad rm/p, \quad sm(1/r_1 - 1/r_2)$$

where  $q, r, s$ , are simple numerical constants.

Consequently, the basic test of any such theory really reduces to the single requirement that the first constant  $r$  has a value not very different from Einstein's value  $6\pi$ ! Thus the theory of Einstein, stripped of all mystical trappings, is seen in its proper perspective. It becomes obvious that the question "What is the simplest theory of gravitation and other physical phenomena, based on

but the ultimate carrier of mass and electric charge.

If this requirement is admitted, it appears that the first condition of any new theory based on electromagnetic space-time should be the condition that matter has a disturbance velocity equal to that of light under all circumstances. The theory of Birkhoff is based on one such type, the "perfect fluid," which seems to be the simplest conceivable from a conceptual point of view. But it appears almost certain that any other type of medium obeying this same fundamental requirement will lead to essentially the same gravitational theory. The "perfect fluid" may be approached in the following manner: The state of matter is regarded as characterized by a single scalar density  $\rho$  and vector velocity  $u^i = dx^i/ds$  in the sense of local causation; the equations of motion are to be linear in the rates of change of these variables; free equilibrium is possible at a certain density  $\rho_0$ ; the disturbance velocity is to be that of light  $c$ , which becomes 1 if the light-second is the unit of distance.

Table I. Table of disturbance velocities.

	Newton, Maxwell	Nordström, Einstein	Birkhoff
Matter	Arbitrary	Arbitrary	$c$
Gravitation	$\infty$	$c$	$c$
Electromagnetic field	$c$	$c$	$c$

We have established the mathematical theorem that the equations of motion of the perfect fluid may be written in the 4-vector form

$$\text{div } T = \partial T^{\alpha i} / \partial x^{\alpha} = 0, \quad T^{ij} = \rho(u^i u^j - \frac{1}{2} g^{ij}),$$

electromagnetic space-time, which explains the known facts?" deserves the most careful consideration. This question becomes all the more urgent since the Einstein theory, with its enormous mathematical complication and its lack of proper independent variables, seems to be essentially unworkable.

where  $g_{ii} = 1, -1, -1, -1$  for  $i = 1, 2, 3, 4$ , respectively, and  $g_{ij} = 0$  for  $i \neq j$ , with appropriate choice of the scalar density  $\rho$ , unique up to a choice of a unit. Furthermore, the perfect fluid so obtained satisfies the conservation principle that the integral  $\int \int \int \sqrt{\rho} dv$  is conserved ( $dv$ , element of volume referred to a rest system).

Birkhoff's theory of 1942 provided perhaps the first thoroughgoing attempt to answer this question. Its point of departure arises from the valid criticism of earlier theories that the forms of matter therein employed are inconsistent with the actual requirement that the disturbance velocity be that of light. This situation may be roughly set forth in the comparative Table I, in which the entries indicate disturbance velocity. The physical necessity for a disturbance velocity  $c$  of matter appears from the fact that, with any other velocity, the equations of motion break down at the collision of two atomic constituents. Here the matter referred to is not gross matter,

The equation of motion under arbitrary force densities  $f^i$  may be written correctly

$$\partial T^{\alpha i} / \partial x^{\alpha} = f^i.$$

There is then the essential further requirement to be imposed on the forces  $f^i$  that if the particles of the fluid return to an initial state of position and velocities, the density  $\rho$  must also return. For this, it seems necessary and is certainly sufficient that the condition of orthogonality

$$\int \rho u^{\alpha} = 0$$

be identically satisfied. Thus the force vectors are always required to be identically orthogonal to the velocity vectors. A primary force vector of

this type is evidently the acceleration vector itself.

Now all force vectors which have been used in previous relativistic theories are rational and integral in the components of the velocity vector  $u^i$ . It is therefore natural to set:

$$f^i = A^i + B_a^i u^a + C_{ab}^i u^a u^b + \dots,$$

where the coefficients are functions of position alone. But the electromagnetic force is known to be linear and homogeneous in the velocities and also in the first partial derivatives of the electromagnetic potential  $\varphi_i$ , which itself is of dimension 0 in the unit of length and time. Similarly, in the theory of Einstein, the gravitational forces are homogeneous and quadratic in the velocities, and linear and homogeneous in the first partial derivatives of the gravitational potentials  $g_{ij}$ , which again are of dimension 0. It is therefore natural to assume that  $B$  and  $C$  pertain to electromagnetic and gravitational forces, respectively. Birkhoff imposes the analogous requirements upon the vector  $A$  and thus arrives at the first (covariant) form for the forces<sup>4</sup>

$$f_i = \rho \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \sigma \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^0} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x^i} \right) u^0 + \rho \left( \frac{\partial h_{i0}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{0i}}{\partial x^i} \right) u^0 u^0,$$

where  $\psi$  is his "atomic potential," constant along the world-lines of the fluid,  $\varphi_i$  is the electromagnetic potential satisfying the Maxwell-Lorentz equations ( $\sigma$ , density of electricity)

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^0} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x^i} \right) = -4\pi\sigma u_i,$$

and where  $h_{ij}$  is his gravitational potential satisfying

$$\square h_{ij} = \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^2} - \frac{d^2 h_{ij}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial z^2} = 8\pi T_{ij},$$

which is the generalized form of Poisson's equation of the theory.

Hence the gravitational theory involved may be singled out as follows: If the equations of motion for a small total amount of matter (absence of gravitational force) are written

$$\partial T^{ia} / \partial x^a = f^i;$$

<sup>4</sup> Birkhoff has changed the form of  $A_i$  from  $\partial\psi/\partial x^i$  to  $\rho\partial\psi/\partial x^i$  because of the dimensionality requirement.

then for the general case, these equations are

$$\frac{\partial T^{ia}}{\partial x^a} = f^i + f^{*i}, \quad f^{*i} = \rho \left( \frac{\partial h_{i0}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{0i}}{\partial x^i} \right) u^0 u^0,$$

where  $f^{*i}$  is the gravitational force and where the gravitational potentials  $h_{ij}$  are defined by

$$\square h_{ij} = 8\pi T_{ij}.$$

Such is the structure of the Birkhoff theory as hitherto formulated. However, to account for the phenomena of nebular recession on this basis, it is necessary to suppose that at some time in the past there was a nuclear distribution of matter, with a wide range of velocities. But from the physical point of view it appears to be more natural to suppose an initial nuclear distribution at low relative velocities. In our recent investigations, we have been led to the following extension of the original theory involving the introduction of a cosmological constant.

From the formal point of view the following more general type of Poisson equation needs to be especially examined:

$$\square h_{ij} + a T_{ij} + b g_{ij}.$$

With proper choice of a unit of density, it is then possible to specialize further the above equation to the form

$$\square h_{ij} = 8\pi T_{ij} + K g_{ij},$$

where  $K$  is the "cosmological constant," which has the dimensions of a density and is supposed to be very small.

Now, with such an extended Poisson equation, it is no longer possible to demand that the gravitational potentials  $h_{ij}$  approach 0 regularly at  $\infty$ , nor even that these functions are linearly infinite. However, the condition may be imposed that  $h_{ij}$  are regularly infinite to at most the second order, with a boundary distribution at infinity which is spherically symmetric in a spatial sense. Obviously, the most natural possibility from the electromagnetic point of view is to take the cosmological term in the gravitational potentials to be

$$h_{ij}^* = -\frac{K}{8} (t^2 - x^2 - y^2 - z^2) g_{ij},$$

where  $x, y, z, t$  are any Lorentz coordinates and  $x = y = z = t = 0$  is the origin in space-time.

It is our purpose to publish shortly detailed studies of the theory outlined above, its cosmological extension, and its applications.

#### IV. APPLICATIONS AND TESTS OF THE THEORY

It has not yet been possible for us to make an intensive and thoroughgoing study of the Birkhoff theory in relation to known gravitational phenomena; and still less has it been possible for us to consider other possible applications.

However, the basic two-body problem has already been solved by us to the requisite order of approximation. Thus, for instance, the formula for rate of advance of periastron  $\mathcal{P}$  of two bodies (mass points) of masses  $m_1$  and  $m_2$  has been found to be (in absolute units)

$$\mathcal{P} = \frac{3m_1^2 + 7m_1m_2 + 3m_2^2}{m_1 + m_2} \frac{2\pi}{a(1 - e^2)}$$

which in case of an infinitesimal mass ( $m_1 = 0$ ,  $m_2 = m$ ) reduces to that made familiar by the Einstein theory,  $6\pi m/a(1 - e^2)$ . Here, of course, the application to the rotation of the line of the apsides for double stars is at once suggested. But such a comparison with observation must await the further analysis of the observations themselves, so that appropriate data may be available in cases where the rotation of the line of the apsides due to tidal forces is relatively small.

We here naturally hoped also that the new theory would account for some of the hitherto unexplained features of lunar motion. However, this does not seem to be a likely outcome although it may turn out that the solution of the three-body problem (Earth, Sun, and Moon) will yield an explanation of the desired type. Instead, at the present writing, we are inclined to think that these supposed features are attributable to the large mass ratio (1/83) of Moon to Earth, which makes the convergency

of the mathematical calculations involved slow and uncertain.

It seems not unlikely that the astronomical consequences of this theory for the interpretation of the red shift from extragalactic sources will be of special interest.

As yet no means appear to be available for a decisive experimental test between the gravitational theory of Birkhoff and that of Einstein. This theoretical uncertainty is likely to continue for some time, especially as it appears to be very difficult to carry the Einstein theory to specific conclusions other than those found by him at the outset.

There remains for later consideration the study of atomic phenomena on the basis of the electromagnetic and atomic potentials. It is to be hoped that, by proper assignment of the atomic potential  $\psi$  to the constituents of the atom, the explanation of atomic phenomena may be advanced and possibly the fundamental Schrodinger wave equation may be obtained in a conceptual manner.<sup>6</sup> Here the proton and electron constituting the hydrogen atom, for instance, are conceived of as freely interpenetrable and superimposed in case of equilibrium and as oscillating under disturbances.

In conclusion we would like to point out that, for the physicist, all mathematics is fundamentally a form of abstract model building, of more or less general aspects of nature; and that no experiments which the physicist may perform in his laboratory can advance very far without free access to a variety of abstract models which are not to be thought of as final. The new theory of matter, electricity, and gravitation in flat space-time proposed by Birkhoff, would seem to afford a model of unusually fundamental, simple, and complete type.

<sup>6</sup> See G. D. Birkhoff's two notes in the Proc. Nat. Acad. Sci. 13, 160, 165 (1927).

[Abril de 1944]

1

## ORBITAS PERIODICAS DE LA RADIACION COSMICA PRIMARIA

Carlos Graef Fernández.

Según una teoría sobre el origen de ciertas tormentas magnéticas propuesta por el doctor Manuel Sandoval Vallarta, una emisión abundante de partículas cargadas provenientes del sol puede dar origen a corrientes eléctricas en torno de la tierra, que causan ciertas perturbaciones magnéticas. Las partículas cargadas recorren las órbitas periódicas de la radiación cósmica primaria; esto es posible, porque entre estas órbitas se conocen algunas que son inestables, y que además admiten órbitas asintóticas que pasan por el punto al infinito. Störmer señaló la existencia de dos familias de órbitas periódicas; todos los miembros de ambas familias cortan el ecuador magnético y son perfectamente simétricas con respecto a este plano.

En una primera aproximación se considera que las partículas al recorrer estas órbitas, forman una corriente anular localizada en el ecuador y con centro en el dipolo terrestre.

La corriente anular ecuatorial por sí sola, es únicamente una buena aproximación, en el caso de que no existan otras órbitas periódicas en la vecindad del dipolo que no corten al ecuador. En este trabajo se demuestra que todas las órbitas periódicas de la radiación cósmica primaria cortan al ecuador y que por lo tanto la corriente anular ecuatorial es una buena aproximación en el estudio de las perturbaciones magnéticas causadas por partículas cargadas emitidas por el sol.

Este artículo trata de las órbitas trazadas por una partícula cargada, moviéndose en el campo de un dipolo, en un plano meridiano que gira conteniendo siempre a la partícula.

Con el objeto de estudiar estas órbitas es muy conveniente efectuar una transformación homotética del plano meridiano real, amplificándolo con el factor  $|2\gamma_1|$ ;  $\gamma_1$  es el bien conocido parámetro introducido por Carl Störmer. En el plano meridiano transformado usamos el eje del dipolo como eje de la  $\xi$ , y el eje ecuatorial como eje de las  $\eta$ . Para  $\gamma_1 = 0$  no se puede efectuar la transformación y en este caso estudiamos el plano meridiano directamente.

Las ecuaciones del movimiento de la partícula cargada para  $\gamma_1 \neq 0$  en el plano  $\xi, \eta$  son las siguientes:<sup>1</sup>

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -u \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = -u \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 = \alpha^2 - u^2 = M \end{array} \right.$$

$$(2) \quad u = \frac{\xi}{r^3} - \frac{1}{\xi} \text{ para } \gamma_1 > 0$$

$$(3) \quad u = \frac{\xi}{r^3} + \frac{1}{\xi} \text{ para } \gamma_1 < 0$$

$$(4) \quad r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

$$(5) \quad a = \left( \frac{l}{2\gamma_1} \right)^4$$

<sup>1</sup> Carl STÖRMER.—*Programme for the Quantitative Discussion of Electron Orbits in the Field of a Magnetic Dipole, with Application to Cosmic Rays and Kindred Phenomena*. Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens. Tomo I, p. 65. Oslo, 1936.

de 1944]

3

En este sistema de coordenadas existen solamente tres diagramas del campo potencial, uno para  $\gamma_1 > 0$ , otro para  $\gamma_1 < 0$ , y el último para  $\gamma_1 = 0$ . El campo potencial para cada  $\gamma_1$  particular, se obtiene cambiando la designación de las líneas equipotenciales individuales. El parámetro  $\gamma_1$  de Störmer desempeña el papel de una constante de energía.

Carl Störmer<sup>2</sup> muestra en *Terrestrial Magnetism*, volumen 37, página 381, 1932, los campos potenciales para  $\gamma_1 > 0$  y para  $\gamma_1 < 0$  en todo detalle.

Para  $\gamma_1 = 0$  las ecuaciones del movimiento son:<sup>2</sup>

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -v \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = -v \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 = 1 - v^2 \end{cases}$$

$$(7) \quad v = \frac{\xi}{r^3} - \frac{1}{\xi}$$

$$(8) \quad r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

Los valores positivos de  $\gamma_1$  son los importantes en la Teoría de la Radiación Cósmica; en este trabajo trataremos exclusivamente de ellos, excepto en los casos en que explícitamente se afirme lo contrario.

En el campo potencial para  $\gamma_1 > 0$  hay una línea equipotencial muy importante, la línea  $u = 0$ . (Véase la ecuación (2).) Su ecuación es:

$$(9) \quad \eta = [\xi^{1/3} - \xi^2]^{1/2};$$

<sup>2</sup> Carl STÖRMER.—*On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipole*. P. 11. Observatorio de la Universidad de Oslo. Publicación Núm. 10. Oslo. 1934.

<sup>3</sup> Carl STÖRMER.—*Terrestrial Magnetism*. 37. 382. 1932.

Expresada en coordenadas polares, esta ecuación es:

$$(10) \quad r = \cos^2 \Theta$$

A esta línea la llama Störmer, línea  $U = 0^{(2)}$ . Lemaitre y Vallarta llaman a esta línea, la línea  $\Theta = 0^{(4)}$ . Desde hace muchos años se ha designado a esta línea en discusiones verbales con el nombre de "Talweg".

A la depresión del campo potencial que tiene por línea de potencial mínimo al Talweg, se le designa con el nombre de "Valle".

Es posible reducir el problema dinámico del movimiento de una partícula cargada en el campo de un dipolo magnético, al problema geométrico de determinar las geodésicas en una superficie, llamada la superficie característica. Esta transformación tiene la ventaja de eliminar a la variable tiempo del problema. El análisis de la geometría de las órbitas se efectúa más fácilmente a partir de las ecuaciones diferenciales de las geodésicas, que a partir de las ecuaciones dinámicas del movimiento.

La transformación se obtiene inmediatamente a partir del principio de la acción mínima.<sup>5</sup> Sea  $h$  la constante de la energía,  $V$  la energía potencial, y  $T$  la energía cinética de un problema dinámico en un espacio euclideo de dos dimensiones con las coordenadas cartesianas  $\xi$  y  $\eta$ . El principio de la acción mínima se expresa entonces como sigue:

$$(11) \quad \delta \int_a^b \sqrt{\left\{ (h - V) \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 \right] \right\}} dt = 0$$

Eliminando a  $t$  de (11) se obtiene:

$$(12) \quad \delta \int_A^B \sqrt{(h - V) (d\xi^2 + d\eta^2)} = 0$$

La ecuación (12) es la ecuación variacional de las geodésicas de la superficie cuya  $ds^2$  es:

$$(13) \quad ds^2 = (h - V) (d\xi^2 + d\eta^2)$$

4 G. LEMAITRE y M. S. VALLARTA.—*Physical Review*, 49, 719, 1936.

5 A. J. MCCONNELL.—*Applications of the Absolute Differential Calculus*. Págs. 228-230. Londres, 1931.

de 1944]

5

La superficie definida por (13) es la superficie característica.

$$\text{En nuestro problema } h = 0 \text{ y } V = -\frac{1}{2}M.$$

La superficie característica está definida por:

$$(14) \quad ds^2 = 1/2 M(d\xi^2 + d\eta^2)$$

Por un simple cambio de la unidad de longitud en la superficie. (14) se transforma en:

$$(15) \quad ds^2 = M(d\xi^2 + d\eta^2)$$

La ecuación diferencial de las geodésicas en la superficie característica, es idéntica a la ecuación diferencial de las trayectorias de las partículas cargadas en el plano meridiano.

Esta ecuación diferencial es:<sup>6</sup>

$$(16) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{2M} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial M}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{d\eta}{d\xi} \right]$$

, o también

$$(17) \quad \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{1}{2M} \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{d\xi}{d\eta} \right]$$

Con objeto de hacer más clara la exposición nos referiremos al plano con las coordenadas cartesianas  $\xi$  y  $\eta$  con el nombre de "plano  $\xi, \eta$ " y nos referiremos a la superficie con las coordenadas curvilíneas  $\xi$  y  $\eta$  con el nombre de "superficie  $\xi, \eta$ ". A las curvas definidas por (16) ó (17) en el plano  $\xi, \eta$  las llamamos "trayectorias", y a las curvas definidas en la superficie por las mismas ecuaciones (16) y (17), las llamamos "geodésicas".

<sup>6</sup> Luigi BIANCHI.—*Lezioni di Geometria Differenziale*. Vol. I, p. 277. Pisa, 1922.

Las trayectorias forman una familia natural en el sentido de Painlevé;<sup>7</sup> de manera que la región permitida en el plano  $\xi, \eta$  con su red cartesiana y sus trayectorias, es una imagen conforme de la superficie característica  $\xi, \eta$ , con su red de coordenadas curvilíneas y sus geodésicas.

La curvatura Gaussiana de la superficie definida por (15) es:<sup>8</sup>

$$(18) \quad K = \frac{(\nabla M)^2 - M\Delta M}{2M^3},$$

en donde:

$$(19) \quad (\nabla M)^2 = \left( \frac{\partial M}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial M}{\partial \eta} \right)^2,$$

y donde:

$$(20) \quad \Delta M = \frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2}.$$

$K$  es positiva en toda la extensión de la región permitida del plano  $\xi, \eta$  para valores positivos de  $\gamma_1$ .

*Teorema 1.*—La superficie característica tiene curvatura Gaussiana positiva en todos sus puntos.

Al acercarse de cualquier manera, de un punto en el que  $M \neq 0$  a otro en el que  $M = 0$ ,  $K \rightarrow \infty$ . Los puntos de la línea  $M = 0$  corresponden a puntos singulares de la superficie característica.

Analicemos en detalle, qué singularidades de la superficie característica corresponden a las líneas  $M = 0$  del plano  $\xi, \eta$ . Con este objeto es conveniente distinguir tres casos, que son,  $0 < \gamma_1 < 1$ ,  $\gamma_1 = 1$  y  $1 < \gamma_1$ .

Las figuras 1, 2 y 3 muestran las líneas  $M = 0$  y las regiones permitidas y prohibidas en estos tres casos.

Con objeto de describir a las singularidades de la superficie característica es conveniente introducir los siguientes conceptos:

<sup>7</sup> Edward KASNER.—*Differential Geometric Aspects of Dynamics*. Págs. 34-37 y nota en la p. 37. American Mathematical Society. New York, 1913.

<sup>8</sup> Luigi BIANCHI, *loc. cit.* (6), p. 124.

de 1944]

7

1. Un punto  $m$  es un punto singular de una superficie, del tipo de la singularidad en el vértice de un cono; la conectividad de la superficie en un punto  $m$  es la misma que la conectividad en el vértice de un cono de un número finito de hojas, en el cual, la primera y la última, están unidas como las hojas de una superficie de Riemann, que tuviera al vértice del cono como punto de ramificación.

2. Un punto  $n$  es un punto singular en una superficie, del tipo de la singularidad en el vértice de un cono; la conectividad de la superficie en un punto  $n$  es la misma que la conectividad de una superficie de Riemann con un número infinito de hojas de forma cónica con el vértice del cono como punto de ramificación.

Podemos describir ahora a las superficies características correspondientes a los tres casos esencialmente diferentes que tenemos que considerar.

*Primer caso:*  $0 < \gamma_1 < 1$ .

La superficie característica consiste de una sola superficie, con un punto  $n$  como punto singular.

*Segundo caso:*  $1 < \gamma_1$ .

La superficie característica consiste de dos hojas separadas. Una hoja tiene un punto  $n$  como punto singular y un área infinita. Es la imagen de la región permitida marcada con  $A_1$  en la figura 2.

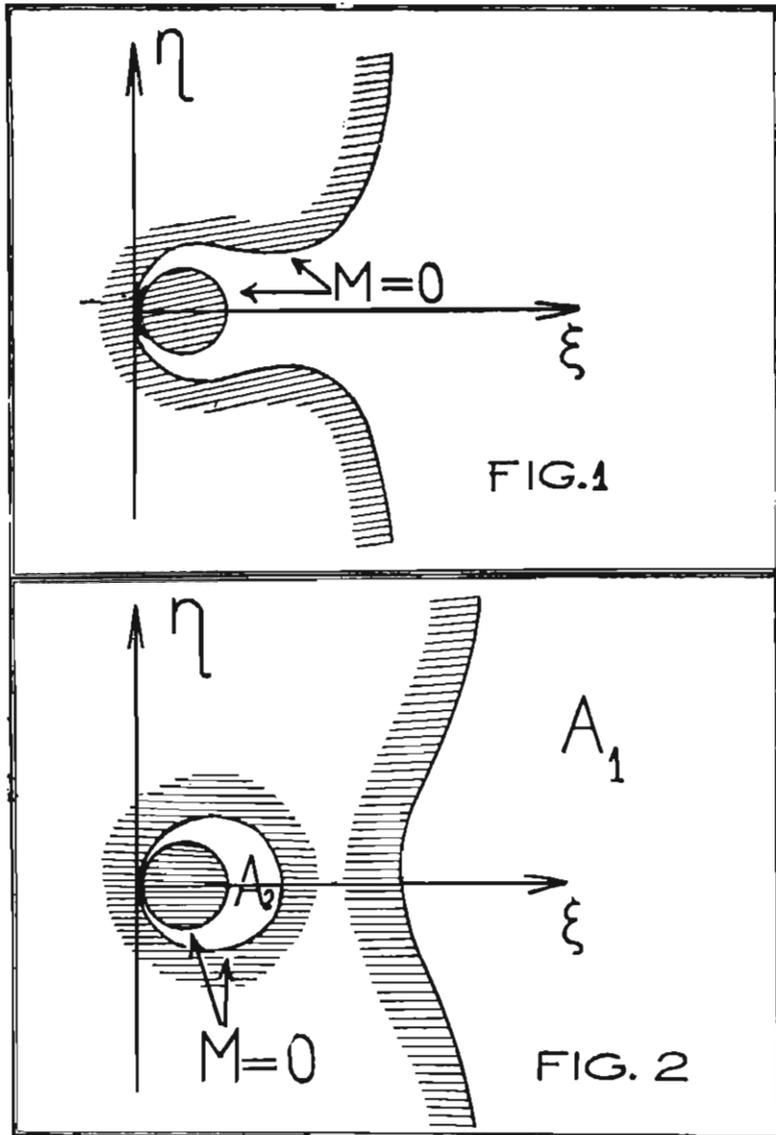
La otra hoja es una superficie cerrada de curvatura Gaussiana positiva; tiene un área finita y un punto  $m$  como singularidad; esta hoja es la imagen conforme de la región marcada con  $A_2$  en la figura 2.

*Tercer caso:*  $1 = \gamma_1$ .

La superficie característica consiste de dos hojas topológicamente equivalentes a las descritas para  $\gamma_1 = 1$ , pero osculándose en sus puntos singulares.

En los casos segundo y tercero, la parte de la superficie característica correspondiente a la región interior permitida del plano meridiano, es una superficie cerrada de curvatura Gaussiana positiva. Poincaré<sup>9</sup> demostró

<sup>9</sup> Henri POINCARÉ.—*American Mathematical Society Transactions*, 6, 237-274, 1905.



de 1944]

9

que en una superficie de este tipo existen por lo menos tres geodésicas cerradas. Estas tres curvas corresponden a tres órbitas periódicas del plano meridiano.

*Teorema II.*—En la región permitida interior para  $\gamma_1 \geq 1$ , existen por lo menos tres órbitas periódicas.

Desde hace mucho tiempo se conocen dos órbitas periódicas en esta región, la órbita ecuatorial y la órbita periódica interior principal. Carl Störmer encontró para valores especiales de  $\gamma_1$ , otra órbita periódica que empieza y termina en la línea interior  $M = 0$ . Esta parece ser la tercera órbita periódica que predice el teorema de Poincaré.

La parte interior de la región permitida del plano  $\xi, \eta$  puede dividirse en subregiones, caracterizadas por el tipo de extremo que tengan  $\xi$  y  $\eta$  en cada subregión.

Los dos lugares geométricos:

$$(21) \quad \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{d\xi}{d\eta} = 0.$$

$$(22) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

forman las fronteras de estas subregiones. Es conveniente escribir las ecuaciones de estos dos lugares geométricos en coordenadas polares. El primer lugar tiene dos ramas. La ecuación de la primera rama es:

$$(23) \quad r = \cos^2\lambda.$$

Esta primera rama es el Talweg. La ecuación de la segunda rama es:

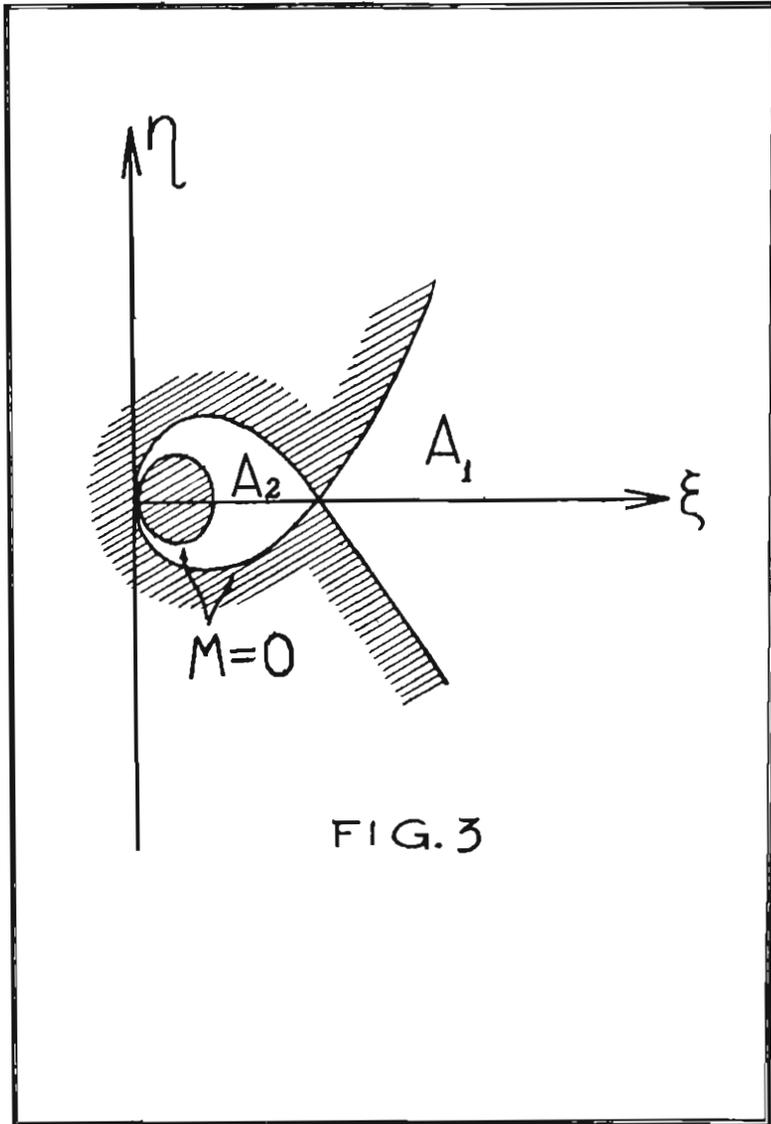
$$(24) \quad r = -\cos^2\lambda + 3\cos^4\lambda.$$

El segundo lugar geométrico tiene también dos ramas. La primera es:

$$(25) \quad \lambda = 0, \text{ que es el ecuador.}$$

y la segunda es:

$$(26) \quad r = \cos^2\lambda, \text{ que es el Talweg.}$$



de 1944]

11

La figura 4 muestra las 8 subregiones en que queda dividido el plano  $\xi, \eta$  por los lugares geométricos (23), (24), (25) y (26). Los lugares mismos son completamente independientes de  $\gamma_1$ ; su posición relativa con respecto a las líneas  $M = 0$ , si depende de  $\gamma_1$ . En la figura 4 utilizamos el signo  $\bar{\eta}$  para denotar un máximo en  $\eta$ , y el signo  $\underline{\eta}$  para denotar un mínimo en  $\eta$ . Al signo  $\bar{\xi}$  lo utilizamos para denotar un máximo en  $\xi$ , y al signo  $\underline{\xi}$  para denotar un mínimo en  $\xi$ .

Además de los extremos normales considerados más arriba existen dos tipos de extremos degenerados, que tienen que analizarse separadamente. Los puntos de autoretroceso y los puntos al infinito con asíntotas paralelas a los ejes.

Un estudio cuidadoso muestra que las órbitas que tienen un punto común con la línea  $M = 0$  pueden considerarse como trayectorias en que se confundieron la rama ascendente y la descendente. El punto común con  $M = 0$  (punto de autoretroceso), es al mismo tiempo un extremo en  $\xi$ , y un extremo en  $\eta$ .

No existen órbitas con puntos al infinito y asíntotas paralelas al eje de las  $\eta$ . Las órbitas con un punto al infinito y asíntotas paralelas al eje de las  $\xi$  se estudian con ayuda de la transformación proyectiva:

$$(27) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\xi} \\ y = \frac{\eta}{\xi} \end{cases}$$

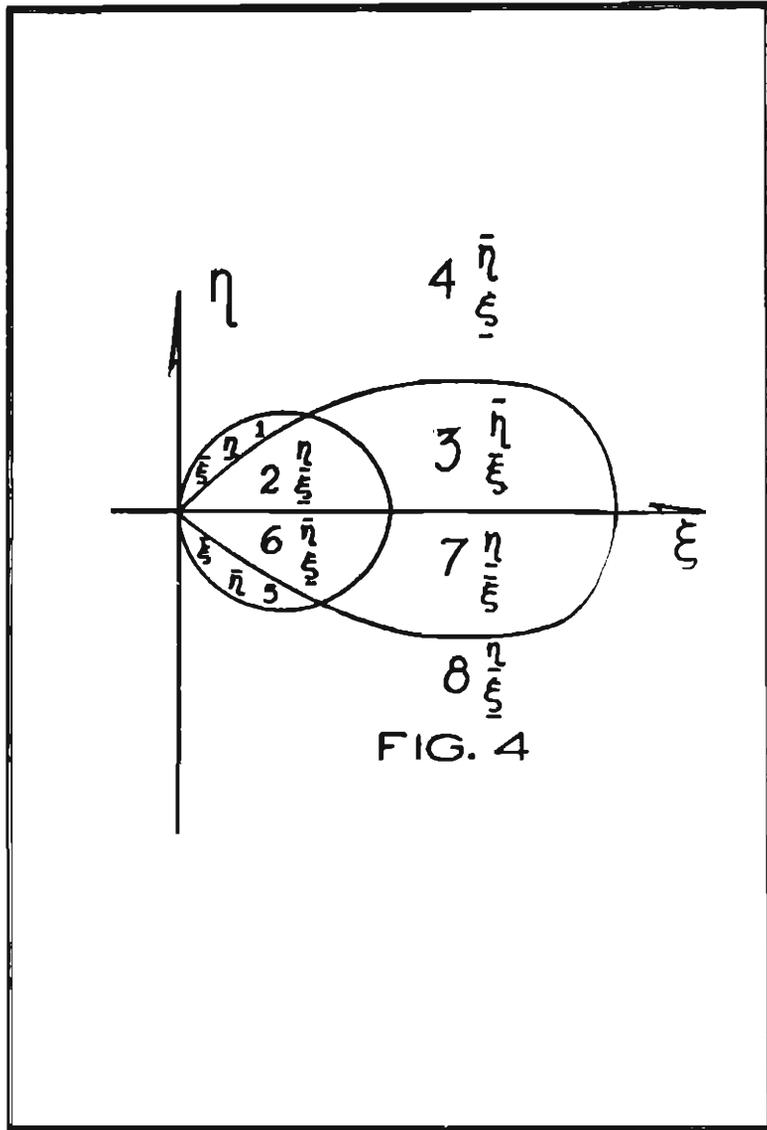
Si la órbita se acerca a su asíntota con valores crecientes de  $\eta$ , diremos que  $\eta$  tiene un máximo en el infinito; y si se acerca a su asíntota con valores decrecientes de  $\eta$ , diremos que  $\eta$  tiene un mínimo en el infinito.

Los extremos degenerados son perfectamente compatibles con la figura 4.

Inspeccionando cuidadosamente la figura 4 se puede demostrar fácilmente un teorema establecido por O. Godart. (No ha sido publicado.)

*Teorema III.*—Todas las órbitas cortan al lugar geométrico formado por el ecuador y el Talweg combinados.

Este lugar geométrico separa las subregiones de máximos de  $\eta$  de las subregiones de mínimos de  $\eta$ .



de 1944]

13

No se puede obtener un teorema semejante considerando el lugar geométrico que separa a las subregiones de máximos de  $\xi$  de las subregiones de mínimo de  $\xi$ , debido a la posible existencia de órbitas con un mínimo de  $\xi$  en la región. 4, 8 y con dos asintotas. (Estas órbitas realmente existen: son órbitas que pasan muy lejos del dipolo; las llamamos "hiperbólicas").<sup>10</sup>

Para cada terna  $\xi, \eta, \frac{d\xi}{d\eta}$ ; ó  $\xi, \eta, \frac{d\xi}{d\eta}$ ;  $\frac{d^2\xi}{d\eta^2}$  y  $\frac{d^2\xi}{d\eta^2}$

están dadas por las ecuaciones diferenciales (16) y (17). Por medio de la derivación sucesiva se pueden obtener las derivadas de orden superior de  $\eta$  con respecto a  $\xi$ , y de  $\xi$  con respecto a  $\eta$ .

Para cada punto  $P(\xi, \eta)$  de la región permitida, y para cada dirección definida por  $\frac{d\eta}{d\xi}$  ó por  $\frac{d\xi}{d\eta}$ , se pueden calcular las dos sucesiones de derivadas:

$$\begin{array}{ccc} \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, & \frac{d^3\eta}{d\xi^3}, & \frac{d^4\eta}{d\xi^4}, \dots \dots; \text{ y} \\ \frac{d^2\xi}{d\eta^2}, & \frac{d^3\xi}{d\eta^3}, & \frac{d^4\xi}{d\eta^4}, \dots \dots \end{array}$$

El orden de la primera derivada no nula en cualquiera de las dos sucesiones, determina el carácter del contacto entre la órbita y su tangente en el punto P, en la dirección dada por  $\frac{d\eta}{d\xi}$  o por  $\frac{d\xi}{d\eta}$ .

Si el orden de la primera derivada no nula es 2, el contacto es ordinario; si este orden es par y mayor que 2, el contacto es más íntimo, y la órbita tiene un punto chato en P.

El sentido de la concavidad en los puntos ordinarios y en los puntos chatos está dado por el signo de la primera derivada no nula. Según

<sup>10</sup> Carlos GRAEF.—*An Analysis of Periodic Orbits of Particles of Primary Cosmic Radiation*. Pág. 17. Tesis doctoral. Instituto Técnico de Massachusetts, 1940.

el sentido de la concavidad clasificamos a estos puntos en “puntos levantados” y “puntos deprimidos”.

Llamamos “puntos deprimidos” a los puntos chatos cuya concavidad apunta hacia las  $\eta$  positivas, y “puntos levantados” a los puntos chatos cuya concavidad apunta hacia las  $\eta$  negativas. Los puntos chatos con tangentes paralelas al eje de las  $\eta$ , no pertenecen a ninguna de las dos clases, pero esto no causa ninguna dificultad en este estudio. Si el orden de la primera derivada no nula es impar, la órbita tiene una inflexión en P. El tipo de la inflexión lo determina el signo de la primera derivada no nula. Distinguimos dos tipos de inflexiones. Las “inflexiones S” son aquellas que semejan la inflexión de la letra “S”, y las “inflexiones 2” son aquellas que semejan la inflexión de la cifra “2”.

Analicemos el comportamiento de las órbitas que emergen de cada punto de la región permitida del plano  $\xi, \eta$ .

Para llevar a cabo este análisis es conveniente dividir a los puntos en dos clases, una clase de los puntos ordinarios y otra de los puntos extraordinarios.

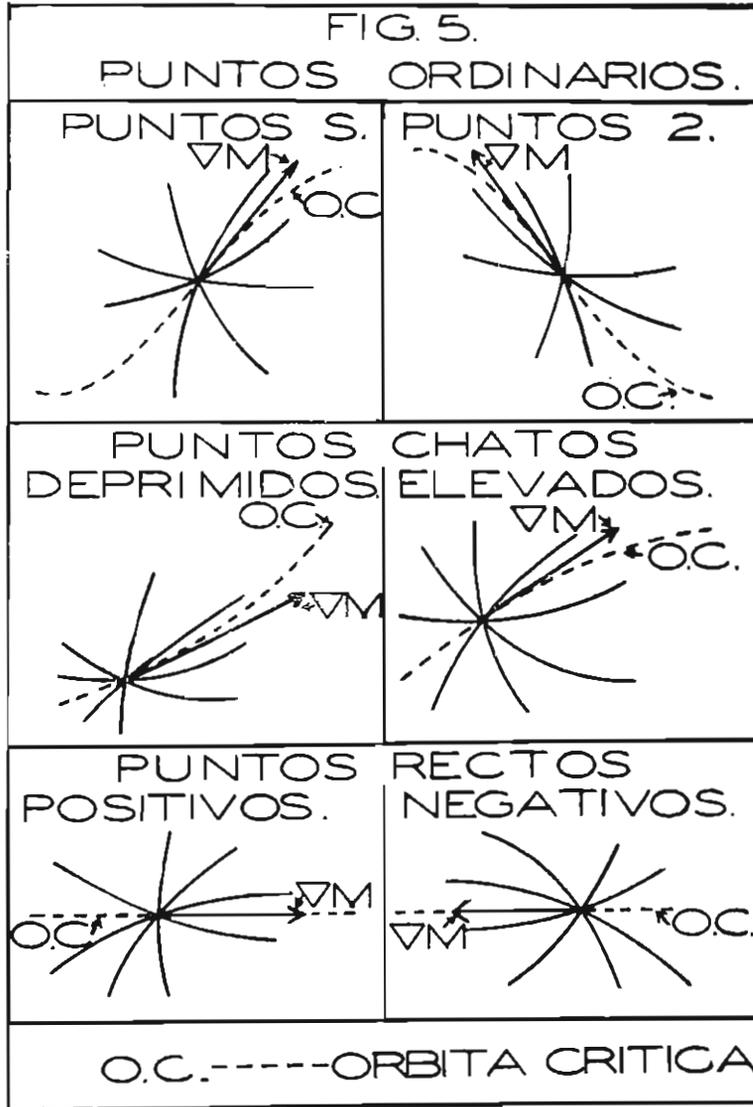
Llamamos puntos ordinarios en el *interior* de la región permitida, a los puntos para los cuales  $\nabla M$  está definido, y llamamos extraordinarios a todos los otros puntos. Los puntos extraordinarios son los puntos de las líneas  $M = 0$ , los puntos del Talweg, el punto (2,0) del ecuador, y los puntos al infinito.

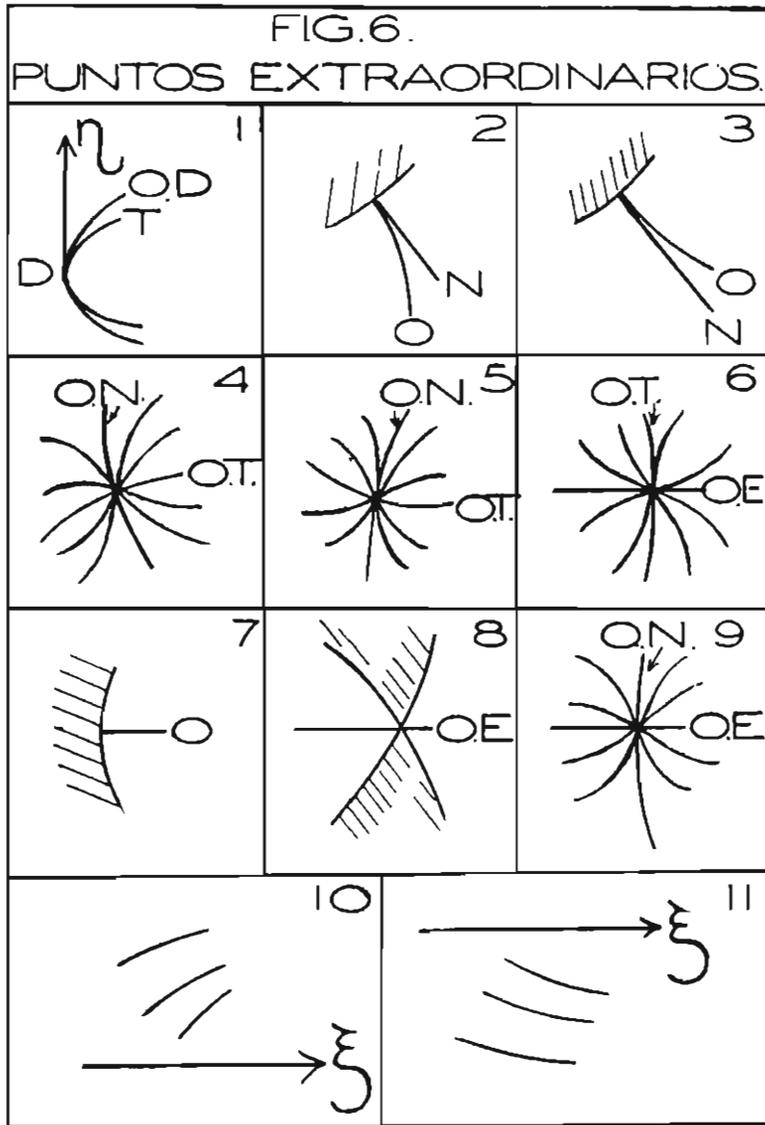
En cada punto ordinario hay una dirección crítica, la dirección de  $\nabla M$ . Con excepción de la órbita en esta dirección particular, todas las otras órbitas tienen su concavidad apuntando en la dirección de  $\nabla M$ . La órbita crítica, o sea la órbita en la dirección crítica, en un punto ordinario, tiene una inflexión o un punto chato. La inflexión puede ser una “inflexión S” o una “inflexión 2”. En el caso del punto chato, la órbita puede ser una línea recta, o puede tener un punto elevado, o un punto deprimido. Clasificamos por lo tanto a los puntos ordinarios en “puntos S”, “puntos 2”, “puntos rectos”, “puntos elevados” y “puntos deprimidos”, según el comportamiento de la órbita crítica. Los “puntos rectos” solamente se encuentran en el ecuador y se dividen en dos clases, una clase positiva, en la que  $\nabla M$  apunta hacia las  $\xi$  positivas, y una clase negativa, en la que  $\nabla M$  apunta hacia las  $\xi$  negativas. Las configuraciones de las órbitas en las seis clases de puntos se ven en la figura 5.

Los puntos extraordinarios se clasifican por su localización.

de 1944]

15





de 1944]

17

## FIGURA 6. SIGNOS CONVENCIONALES Y NOTAS

- 1 Dipolo. Punto de la línea  $M = 0$ .  
 D ..... Dipolo.  
 O.D ..... Orbita del dipolo.  
 T ..... Talweg.
- 2 Col derecho. Punto de la línea  $M = 0$ .  
 N ..... Normal.  
 O ..... Orbita que retrocede sobre sí misma.
- 3 Col izquierdo. Punto de la línea  $M = 0$ .  
 N ..... Normal.  
 O ..... Orbita que retrocede sobre sí misma.
4. Punto rehilete. Punto del Talweg. ( $\eta$  positiva.)  
 O.N ..... Orbita normal.  
 O.T ..... Orbita tangencial.
5. Punto rehilete. Punto del Talweg. ( $\eta$  negativa.)  
 O.N ..... Orbita normal.  
 O.T ..... Orbita tangencial.
6. Punto (1.0). Punto del Talweg.  
 O.E ..... Orbita ecuatorial.  
 O.T ..... Orbita tangencial.
- 7 Punto del ecuador. Col recto.  
 O ..... Orbita.
- 8 Punto (2.0) para  $\gamma_1 = 1$ . Punto del ecuador.  
 O.E ..... Orbita ecuatorial.
- 9 Punto (2.0) para  $\gamma_1 \neq 1$ . Punto del ecuador.  
 O.N ..... Orbita Normal.  
 O.E ..... Orbita ecuatorial.
10. Punto al infinito de  $\eta$  positiva.
11. Punto al infinito de  $\eta$  negativa.

Consideremos primero los puntos en las líneas  $M = 0$ . Empecemos con el dipolo. Para cada valor de  $\gamma_1$  hay dos órbitas, simétricas con respecto al ecuador, que emergen del dipolo,<sup>11</sup> estas órbitas son las "órbitas del dipolo". Ninguna otra órbita pasa por el dipolo. Las "órbitas del dipolo" son tangentes al Talweg en el dipolo; el contacto es del quinto orden.<sup>12</sup> (Véase Fig. 6.)

Para analizar los otros puntos de las líneas  $M = 0$ , es conveniente aplicar el criterio determinante de Poincaré.<sup>13</sup> De acuerdo con este criterio los puntos son del tipo "col." (cuello). A un col sólo llega una trayectoria aislada; las otras trayectorias permanecen a distancias no nulas del col. Estas trayectorias aisladas son trayectorias que retroceden sobre sí mismas en el col; son, además, perpendiculares a las líneas  $M = 0$ .

La concavidad de las órbitas que retroceden sobre sí mismas puede estar dirigida hacia la derecha o hacia la izquierda de la normal a  $M = 0$  en el col, suponiendo al observador en  $M = 0$ , viendo hacia la región permitida. En el primer caso, el col se designa con el nombre de "col derecho", y en el segundo caso con el nombre de "col izquierdo". (Véase la Fig. 6.) Hay además puntos especiales en la línea  $M = 0$ , y son aquellos en que ésta corta al ecuador. La órbita que retrocede sobre sí misma es en este caso una recta; a estos puntos se les llama "coles rectos".

Nos falta tratar todavía a un punto muy especial en  $M = 0$ , el punto  $(2, 0)$  para  $\gamma_1 = 1$ . A este punto llegan dos órbitas ecuatoriales, ninguna otra órbita pasa por él. (Véase la Fig. 6.)

Las consideraciones hechas hasta aquí cubren todos los puntos posibles en las líneas  $M = 0$ .

Consideremos ahora los puntos del Talweg.

A pesar de que el dipolo pertenece al Talweg, ya ha sido considerado entre los puntos de las líneas  $M = 0$ .

Los otros puntos del Talweg son los que llamamos "puntos rehilete". (Véase la Fig. 6.) En un punto rehilete todas las trayectorias, excepto dos, tienen puntos de inflexión. Estas dos trayectorias excepcionales son la trayectoria tangencial al Talweg, y la trayectoria normal al mismo. La trayectoria tangencial tiene un punto chato en el punto rehilete y su con-

11 Carl STÖRMER.—*Loc. cit.* (3).

12 Carlos GRAEF.—*Loc. cit.* (10), p. 31.

13 Henri POINCARÉ.—*Oeuvres de Henri Poincaré*. Tomo I, pp. 167-181. Paris, 1928.

de 1944]

19

cavidad está dirigida hacia el Talweg; la trayectoria está completamente afuera del área encerrada por el Talweg en la inmediata vecindad del punto rehilete. La trayectoria normal también tiene un punto chato en el punto rehilete, su *convexidad* apunta hacia el dipolo, excepto en el caso de la trayectoria normal en el punto (1, 0), que es rectilínea; se trata en este caso de la órbita ecuatorial.

Las órbitas que tienen una inflexión en el punto rehilete, tienen su concavidad dirigida hacia el Talweg, en la inmediata vecindad del punto de intersección.

Entre los puntos extraordinarios que tenemos que considerar está el punto (2, 0), para todas las  $\gamma_1$  diferentes de 1. Por este punto pasa la órbita rectilínea ecuatorial, y una trayectoria con un punto chato, la trayectoria normal al ecuador. Esta última tiene su concavidad dirigida hacia las  $\xi$  positivas. Todas las demás trayectorias apoyadas en (2, 0) tienen allí una inflexión: su concavidad está dirigida hacia el ecuador en la inmediata vecindad de la intersección. (Fig. 6.)

La última clase de puntos extraordinarios que tenemos que considerar son los puntos al infinito.

Para estudiar estos puntos, efectuamos la transformación proyectiva:

$$x = \frac{1}{\xi}$$

$$y = \frac{\eta}{x}$$

La concavidad de los puntos al infinito está dirigida hacia el eje de las  $\xi$ . No existen órbitas con asíntotas paralelas al eje de las  $\eta$ .

La figura 6 muestra todas las clases de puntos extraordinarios.

La figura 7 muestra la distribución de los puntos ordinarios y extraordinarios en la región permitida del plano meridiano.

Esta distribución depende esencialmente del lugar geométrico:

$$(28) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = 0$$

20

que consiste en tres ramas, cuyas ecuaciones en coordenadas polares son:

$$(29) \quad \lambda = 0, \text{ que es el ecuador,}$$

$$(30) \quad r = \cos^2\lambda, \text{ que es el Talweg, y}$$

$$(31) \quad r = \cos^2\lambda \frac{4 - \cos^2\lambda + \sqrt{4 + 21 \cos^4\lambda}}{2(5\cos^2\lambda - 3)}$$

que es la "tercera rama".

Estas curvas dividen al plano  $\xi, \eta$  en las 6 regiones: I, II, III, IV, V y VI.

Analicemos ahora las órbitas que emergen de un punto del Talweg.

Consideramos exclusivamente la porción del Talweg que corresponde a  $\eta$  positivas; esto está perfectamente justificado, puesto que el problema es simétrico con respecto al ecuador.

Sea P un punto del Talweg de ordenada positiva, y elijase para dirección positiva en P, aquella hacia la que apunta el vector tangente al Talweg en P, cuya componente en el eje de las  $\xi$  es positiva.

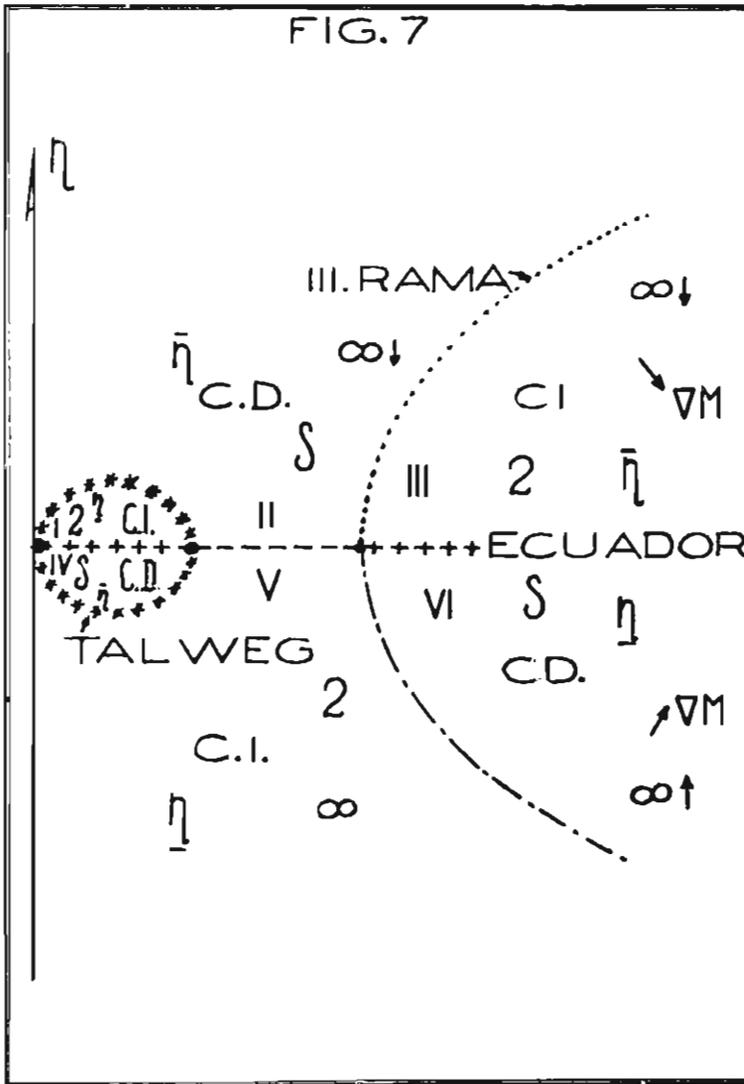
De cada órbita que emerge de P fijémosnos en la parte que apunta en la dirección positiva; únicamente en el caso de la órbita normal al Talweg en P, fijémosnos en ambas partes.

Las órbitas que emergen de P hacia la región II tienen su concavidad hacia la derecha. (Véanse las figuras 7 y 8.) Estas órbitas no pueden tener un punto de inflexión en esta región, porque solamente hay inflexiones S en la misma.

Examinemos las posibilidades de estas órbitas.

Una órbita con la concavidad hacia la derecha puede volver a cortar el Talweg en un punto más alejado del dipolo. (Véase Fig. 8, arco 1.) En el punto de intersección el ángulo formado por la dirección positiva de la órbita y la dirección positiva del Talweg tiene que ser menor que  $90^\circ$ . A este ángulo lo llamamos, ángulo formado por la trayectoria con el Talweg.

Los arcos 2 y 3 de la figura 8 ilustran los casos de trayectorias que cortan al ecuador entre los puntos (1,0) y (2, 0); ambos arcos son compatibles con la figura 7.



Los signos convencionales usados en la figura 7 son los siguientes:

- a) S puntos S.
- b) 2 puntos 2.
- c) —.—.— puntos chatos elevados.
- d) ..... puntos chatos deprimidos.
- e) +++++ puntos rectos positivos y coles rectos.
- f) ——— puntos rectos negativos y coles rectos.
- g) D dipolo.
- h) CD col derecho.
- i) CI col izquierdo.
- j) \*\*\* puntos rehilete.
- k) (1,0) punto (1,0).
- l) (2,0) punto (2,0).
- m)  $\infty \downarrow$  punto al infinito: la concavidad dirigida en el sentido de las  $\eta$  negativas.
- n)  $\infty \uparrow$  punto al infinito: la concavidad dirigida en el sentido de las  $\eta$  positivas.
- o)  $\overset{\curvearrowright}{\eta}$  (testada) máximos en  $\eta$ .
- p)  $\eta$  (subrayada) mínimos en  $\eta$ .

#### NOTAS A LA FIGURA 7

A) Las líneas  $M = 0$  no aparecen en la figura. Para cada valor particular de  $\gamma_1$  tiene uno que imaginarse trazadas las líneas  $M = 0$  en la figura 7. Los símbolos solamente tienen sentido en las regiones permitidas.

B) Los símbolos "CD" y "CI" deben interpretarse como sigue: imaginense las líneas  $M = 0$  trazadas en la figura 7, las porciones de esas líneas contenidas en las regiones CD están formadas por coles derechos, y las porciones contenidas en las regiones CI están formadas por coles izquierdos.

C) Las intersecciones diferentes de D de las líneas  $M = 0$  con el ecuador, son coles rectos.

D) Las intersecciones de las líneas  $M = 0$  con la tercera rama (véase la ecuación (31)), deben considerarse como pertenecientes a la región hacia la que apunta la convexidad de la tercera rama.

E) Para todos los puntos de las regiones III y IV,  $\nabla M$  apunta hacia el eje de las  $\xi$ , como está indicado en la figura.

F) Los símbolos escritos dentro de una región no valen en sus fronteras, excepto cuando lo especifica así expresamente alguna de las notas anteriores.

El arco 4 de la figura 8 ilustra el caso de una trayectoria que corta al ecuador en el punto  $(2, 0)$ ; esta órbita tiene allí un punto de inflexión. El arco 4 es compatible con las condiciones expresadas en la figura 7.

Supongamos que una órbita que originalmente es ascendente penetra en la región III después de tener un máximo, o que una órbita originalmente descendente penetra directamente en esta región. El arco 5 de la figura 8 ilustra estos casos.

La órbita mencionada es descendente al penetrar en la región III. Una órbita de este tipo tiene que seguir en la dirección de las  $\xi$  positivas; no puede retroceder después de tener un máximo en  $\xi$ , porque este tipo de extremos está prohibido en la región III. (Véase Fig. 4.)

Una órbita descendente en la región III con su concavidad hacia la derecha, no puede cortar al ecuador antes de tener una inflexión, porque los puntos del ecuador son puntos rectos positivos.

Estas órbitas descendentes de la región III no pueden irse al infinito y tener allá una asíntota horizontal, porque la concavidad de la órbita al infinito está dirigida hacia abajo.

Una órbita descendente en III tiene que tener forzosamente una inflexión 2, y tiene que cortar al ecuador.

El arco (6) de la figura 8 ilustra el caso de una órbita ascendente que penetra en la región III y alcanza un máximo en  $\eta$ . Después de este máximo la órbita se porta como el arco 5.

Los arcos (7) y (8) de la figura 8 ilustran los casos de órbitas que se van al infinito conservando su concavidad hacia la derecha.

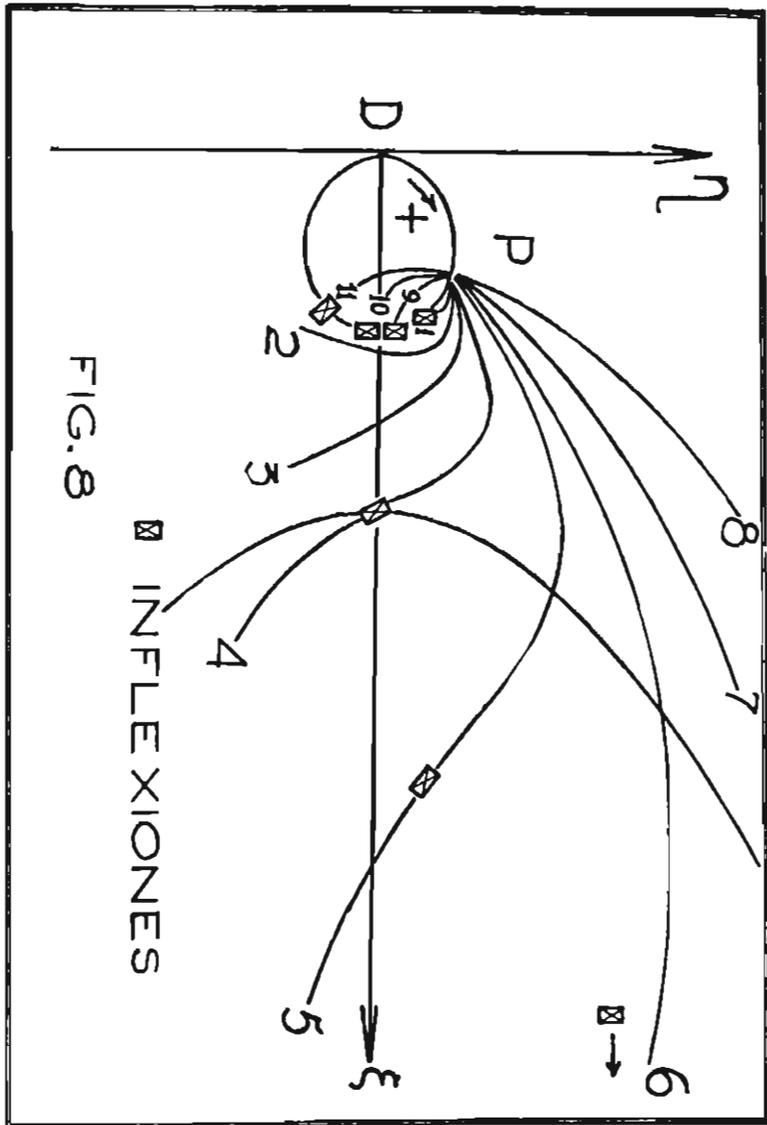
Todos estos arcos son compatibles con las condiciones expresadas por la figura 7. Los 8 casos representan todas las posibilidades para las órbitas que emergen del Talweg hacia la región II, para valores positivos de  $\gamma_1$  por supuesto.

Examinemos ahora las órbitas que emergen de P hacia la región I. Estas órbitas no pueden tener una inflexión en esta región, porque empiezan con su concavidad hacia la izquierda, y solamente se permiten inflexiones 2 en I.

En este caso solamente hay tres posibilidades:

El arco 9 de la figura 8 ilustra la primera posibilidad. La órbita corta al Talweg otra vez, bajo un ángulo de menos de  $90^\circ$ , sufriendo en el punto de intersección una inflexión.

La intersección con el Talweg puede ocurrir en el punto  $(1, 0)$ ; el arco 10 ilustra este caso. (Fig. 8.)



de 1944]

25

El arco 11 de la figura 8, muestra la última posibilidad para las órbitas que cortan el Talweg. El arco 11 corta al ecuador directamente. La concavidad de la órbita permite esta intersección.

Analicemos ahora el problema de ver si existen órbitas que oscilen entre las líneas  $M = 0$  exterior e interior (teniendo coles en  $M = 0$ ) y que satisfagan las siguientes condiciones:

- a) Ser simples, o sea no tener puntos dobles.
- b) Cortar al Talweg una sola vez.
- c) No cortar al ecuador.

A órbitas de este tipo les llamaremos: "órbitas periódicas simples en el valle".

Empecemos en la línea  $M = 0$  interior, en la región I (Fig. 7). El punto de partida es un col izquierdo, y la órbita empieza ascendiendo.

Como tiene su concavidad hacia la izquierda, la órbita no puede tener inflexiones en la región I, en donde sólo se permiten inflexiones 2.

La órbita es ascendente, pero no puede alcanzar un máximo de  $\eta$  en la región I, porque solamente se permiten mínimos de  $\eta$  en esta región; por eso tiene que cortar la órbita al Talweg. Llamemos P al punto de intersección. En P tiene la órbita una inflexión S, de manera que penetra en la región II con su concavidad hacia la derecha.

Todas las formas posibles que la órbita pueda tener después de cortar al Talweg en P, han sido analizadas previamente; se muestran en la figura 8.

Ninguno de los 8 arcos posibles puede producir una órbita que satisfaga la condición de ser simple y periódica en el valle.

*Teorema IV.*—No existen en el valle órbitas periódicas que oscilen entre las líneas  $M = 0$  interior y exterior, y que no corten al ecuador, pero que corten al Talweg una vez solamente. Con lo expuesto más arriba se puede demostrar que todas las órbitas que pasan por un punto P del Talweg tienen una rama que corta al ecuador, o que pasa por el punto al infinito.

Fijémonos en un punto P del Talweg, de ordenada positiva y consideremos la rama de cada órbita apoyada en P que apunta en la dirección positiva. Solamente en la órbita normal al Talweg, consideremos ambas ramas.

La figura 8 muestra todos los tipos de arcos posibles que una órbita de ese tipo puede adoptar.

Los arcos 7 y 8 pasan por el punto al infinito. Los arcos 10, 11, 2, 3, 4, 5 y 6, cortan al ecuador. Tenemos que analizar con cuidado los arcos 1 y 9.

Llamemos  $P_1$  a la intersección del arco 1 con el Talweg.  $P_1$  está más cerca del ecuador a lo largo del Talweg, que  $P$ . El ángulo formado por la trayectoria y el Talweg en  $P_1$ , es menor que  $90^\circ$ . En  $P_1$  tiene la trayectoria una inflexión 2, y emerge del otro lado como arco del tipo 9, 10 u 11. Los arcos de los tipos 10 y 11 cortan al ecuador; el arco del tipo 9 corta otra vez al Talweg en un punto  $P_2$ , más cerca del ecuador a lo largo del Talweg, que  $P_1$ . En  $P_2$  la órbita tiene una inflexión S, y emerge del otro lado como arco del tipo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8, porque en la intersección el ángulo formado por la trayectoria con el Talweg es menor que  $90^\circ$ . De todos estos arcos sólo el de tipo I es crítico, pues todos los otros, o cortan al ecuador o pasan por el punto al infinito. El arco de tipo I que emerge de  $P_2$  se porta exactamente como el arco del mismo tipo que emerge de  $P$ .

De manera que una órbita del tipo I que emerge de  $P$ , o corta al ecuador después de una o varias intersecciones con el Talweg, o pasa por el punto al infinito, o corta al Talweg en una sucesión de puntos:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

que están más y más cerca del ecuador a lo largo del Talweg a medida que crece en  $n$ .

Consideremos ahora un arco del tipo 9 que emerge de  $P$ , y que sea  $Q_1$  la intersección de este arco con el Talweg. En  $Q_1$ , la órbita hace un ángulo con el Talweg de menos de  $90^\circ$ , y la órbita, después de sufrir una inflexión S en  $Q_1$ , emerge del otro lado como un arco del tipo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8, esto significa que hay tres posibilidades para la órbita, o corta al ecuador, o pasa por el punto al infinito, o corta al Talweg otra vez en un punto  $Q_2$ , etc.

De manera que un arco del tipo 9 que emerge de  $P$ , o corta al ecuador después de una o varias intersecciones con el Talweg, o corta al Talweg en una sucesión de puntos:

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n, \dots$$

de 1944]

27

que están más y más cerca del ecuador a lo largo del Talweg, a medida que  $n$  crece.

Hay dos posibilidades para las sucesiones:

$$P_1, P_2, P_3, \dots ; Q_1, Q_2, Q_3, \dots ;$$

o estas sucesiones tienen su punto de acumulación  $A$  en un punto del Talweg antes de  $(1, 0)$ , o tienen su punto de acumulación  $A$  en  $(1, 0)$ . Examinaremos primero el caso en que el punto de acumulación  $A$  no es  $(1, 0)$ . Llamemos  $a_n$  al arco de órbita que une a  $P_n$  con  $P_{n+2}$  y  $b_n$  al arco de órbita que une a  $Q_n$  con  $Q_{n+2}$ . Ambos arcos están formados por dos partes separadas por un punto de inflexión,  $P_{n+1}$  y  $Q_{n+1}$ , respectivamente. Ambas partes tienen la concavidad dirigida hacia el Talweg en todos sus puntos. Cuando  $n \rightarrow \infty$   $P_n, P_{n+1}$  y  $P_{n+2}$  tienden a  $A$  y  $a_n \rightarrow a$ ;  $Q_n, Q_{n+1}$  y  $Q_{n+2}$  tienden a  $A$  y  $b_n$  tiende a  $b$ .  $a$  y  $b$  son los límites de los arcos  $a_n$  y  $b_n$ .

La figura 9 muestra la primera órbita, la apoyada en  $P, P_1, P_2, P_3, \dots$ , el Talweg y el límite  $a$  de  $a_n$ .

Sea  $R$  un punto de la línea  $a$  que esté en  $M = M_1 = \text{const}$ . La línea  $M = M_1$  corta a los arcos  $a_n$  en una sucesión de puntos que tienen a  $R$  como límite. Sean estos puntos  $R_n, R_{n+1}, R_{n+2}$ , etc., entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} R_{n+k} &= R \\ & \text{(Véase Fig. 9.)} \end{aligned}$$

Sean:

$$\left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)_m, \left( \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)_m, \dots, \left( \frac{d^s\eta}{d\xi^s} \right)_m, \dots$$

las derivadas sucesivas de  $\eta$  con respecto a  $\xi$  calculadas en el punto  $R_m$ , entonces:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{d^s\eta}{d\xi^s} \right)_m = \left( \frac{d^s\eta}{d\xi^s} \right)_R$$

en el que el segundo miembro expresa el valor de la derivada de orden  $S$  de  $\eta$  con respecto a  $\xi$  calculada en el punto  $R$  en el arco  $a$ .

De aquí se deduce que el arco  $a$  satisface la misma ecuación diferencial que la órbita apoyada en  $P, P_1, P_2, P_3, \dots$ , y que es, por lo tanto, otra órbita. La órbita apoyada en las  $P_n$  es asintótica al arco  $a$ . El arco  $a$  es una órbita periódica.

Como  $a$  tiene dos puntos de autorretroceso, que son  $U$  y  $V$ , y como tales puntos sólo ocurren en las líneas  $M = 0$ , se deduce de aquí que  $a$  es una órbita periódica en el valle, que oscila entre las líneas  $M = 0$  interior y exterior.

Se ha demostrado previamente que no existen órbitas del tipo  $a$ . Se concluye, pues, que la sucesión

$$P, P_1, P_2, P_3, \dots$$

solamente puede tener su punto de acumulación en el ecuador.

Lo que se demostró para las  $P$ , se puede demostrar para las  $Q$ .

*Teorema V.*—Todas las órbitas apoyadas en un punto del Talweg tienen una rama que, o corta al ecuador, o se acerca asintóticamente al ecuador; en este último caso diremos de un modo convencional que corta al ecuador.

Si se efectúa una inversión por radios vectores recíprocos definida por las ecuaciones:

$$x = \frac{\xi}{r^2} \quad y = \frac{\eta}{r^2} \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2$$

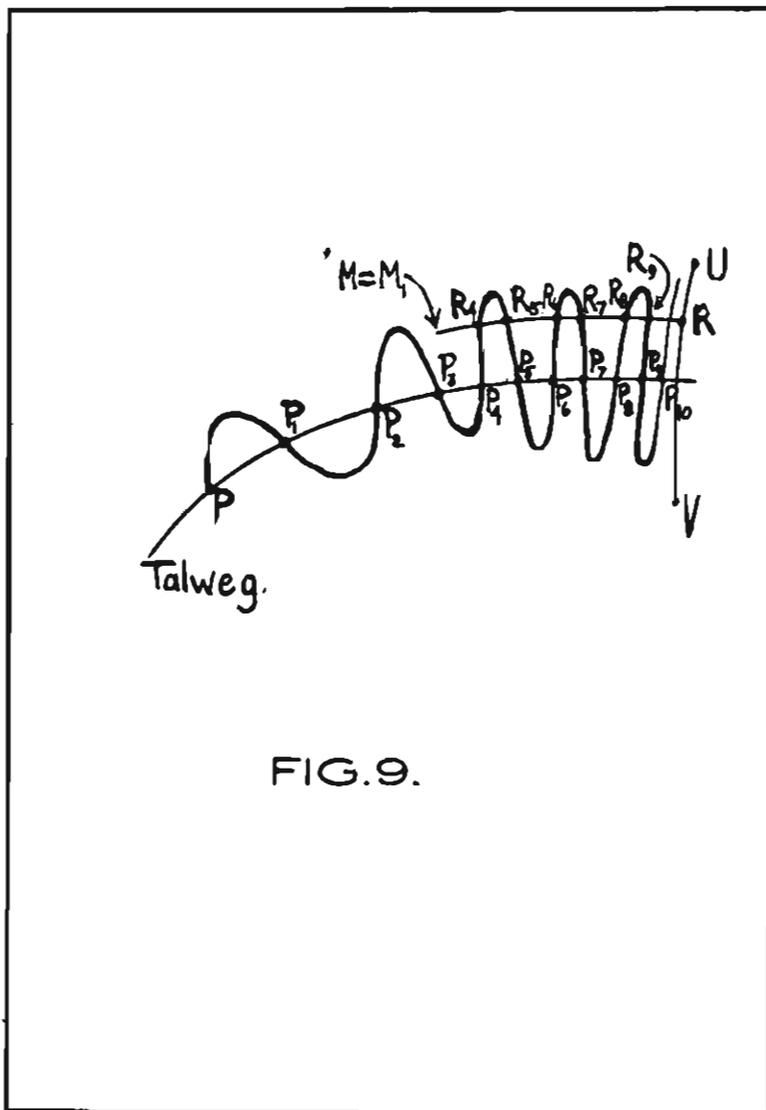
entonces el punto al infinito se transforma en el origen, el dipolo se transforma en el punto al infinito, y el ecuador se transforma en sí mismo. El teorema anterior se transforma en el siguiente:

*Teorema VI.*—Las transformadas por radios vectores recíprocos de las órbitas de partículas cargadas que se mueven en el campo de un dipolo, cortan todas al ecuador.

*Nota.*—Después de la transformación sólo dos imágenes de órbitas pasan por el punto al infinito, las imágenes de las órbitas del dipolo. Todas las demás imágenes de órbitas, permanecen a distancia finita del origen.

de 1944]

29



Considerando las imágenes de las órbitas en la transformación por radios vectores recíprocos, como trayectorias de otro problema dinámico, se ha demostrado entonces que en el nuevo problema todas las trayectorias cortan al ecuador y que todas, con excepción de dos, permanecen a distancia finita del origen. A cada trayectoria del nuevo problema se le puede hacer corresponder otra de un tercer problema, en que las coordenadas son  $x$ ,  $y$  y  $\Theta$  siendo  $\Theta$  la inclinación de la órbita en el punto  $(x, y)$  con respecto al eje de las  $x$ . En el espacio  $x, y, \Theta$  el ecuador es una superficie de sección en el sentido de G. Birkhoff.

Analicemos las órbitas para el caso  $\gamma_1 \geq 1$ .

En este caso tenemos que considerar dos regiones permitidas, la región externa infinita, y la región interna finita.

Según el teorema de O. Godart (teorema III), todas las órbitas cortan el lugar geométrico formado por ecuador y Talweg combinados. En la región finita interna, fijémonos en las órbitas que cortan el Talweg. Según el teorema V todas ellas, o pasan por el punto al infinito, o cortan al ecuador. Como desde la región interna finita es inaccesible el punto al infinito, todas las órbitas que emergen del Talweg cortan, pues, al ecuador. De aquí se concluye que para  $\gamma_1 \geq 1$  todas las órbitas de la región interna finita cortan al ecuador.

Como para las órbitas de la región externa infinita el Talweg es inaccesible, todas cortan al ecuador.

*Teorema VII.*—Para  $\gamma_1 \geq 1$  todas las órbitas de las partículas cargadas cortan al ecuador magnético.

Analicemos las órbitas para  $0 < \gamma_1 < 1$ . Según el teorema V, todas las órbitas para  $\gamma_1 > 0$  tienen una rama que, o se apoya en el punto al infinito, o corta al ecuador. Como ninguna órbita periódica pasa por el punto al infinito, se deduce inmediatamente el teorema siguiente:

*Teorema VIII.*—Para  $0 < \gamma_1 < 1$  todas las órbitas periódicas cortan al ecuador.

Aplicando el mismo método geométrico de ataque utilizado para  $\gamma_1 > 0$  a valores negativos de  $\gamma_1$  y a  $\gamma_1 = 0$ , se obtienen los siguientes resultados:

*Teorema IX.*—Para  $\gamma_1 \leq 0$  las órbitas de las partículas cargadas, o tienen un valor extremo en  $\eta$ , en cuyo caso sólo tienen uno, y no cortan al ecuador, o no tienen ningún valor extremo de  $\eta$ , en cuyo caso cortan al ecuador.

EL MOVIMIENTO DE LOS DOS CUERPOS EN LA TEORIA  
DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF

Por el Dr. Carlos Graef Fernández.

Birkhoff<sup>1</sup> utiliza en su teoría de la gravitación un espacio de Minkowsky con el siguiente cuadrado de la diferencial del arco:

$$(1) \quad ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2;$$

$x^1$  es el tiempo;  $x^2, x^3, x^4$  son las tres coordenadas cartesianas de un punto del espacio físico. El tensor métrico fundamental es, en este caso:

$$(2) \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = g_{33} = g_{44} = -1,$$

$$g_{ij} = 0 \quad \text{cuando } i \neq j.$$

El tensor contravariante asociado tiene sus componentes exactamente iguales a las del tensor fundamental:

$$(3) \quad g^{11} = 1, \quad g^{22} = g^{33} = g^{44} = -1,$$

$$g^{ij} = 0 \quad \text{cuando } i \neq j.$$

Utilizaremos aquí indistintamente  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  y  $(t, x, y, z)$  para las coordenadas de un acontecimiento en el espacio de Minkowsky.

Sean  $m_{(1)}, m_{(2)}, m_{(3)}, \dots, m_{(n)}$ , las masas de  $n$  partículas libres. Sean  $x_{(a)}^i$  las coordenadas de la partícula de masa  $m_{(a)}$ , y sea  $u_{(a)}^1$  el vector velocidad, en el espacio de Minkowsky, de esa partícula, para

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad a = 1, 2, 3, \dots, n.$$

(Escribiremos los índices no tensoriales entre paréntesis.)

Las componentes en el espacio de Minkowsky del vector fuerza que obra sobre la partícula  $m_{(a)}$ , son funciones cuadráticas homogéneas de las componentes del vector velocidad de esa partícula; los coeficientes de esas funciones dependen de un tensor simétrico  $h_{ij}^{(a)}$  cuyas componentes son funciones de  $x^1, x^2, x^3, x^4$ .

Las componentes covariantes, en el espacio de Minkowsky, de la fuerza que urge a la partícula  $m_{(a)}$ , son las siguientes:

$$(4) \quad f_i^{(a)} = \left( \frac{\partial h_{ij}^{(a)}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}^{(a)}}{\partial x^i} \right) u_{(a)}^j u_{(a)}^k.$$

El tensor simétrico se determina con las siguientes condiciones:

(i). El tensor  $h_{ij}^{(a)}$  solamente tiene singularidades en los puntos de las líneas de universo de las partículas  $m_{(b)}$ ,  $b \neq a$ , y la forma asintótica de  $h_{ij}^{(a)}$  en la vecindad de una posición especial de la partícula  $m_{(b)}$ ,  $b \neq a$ , y en un sistema de referencia en que  $m_{(b)}$  esté en reposo, es:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \frac{m_{(b)}}{r_{(b)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_{(b)}}{r_{(b)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_{(b)}}{r_{(b)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_{(b)}}{r_{(b)}} \end{pmatrix},$$

en donde  $r_{(b)}$  significa la distancia física, del punto en que se calcula el tensor, a la partícula  $m_{(b)}$ .

(ii). Todas las componentes de  $h_{ij}^{(a)}$  en el punto P del espacio físico, tienden a cero, cuando la distancia física de P a  $m_{(b)}$  tiende al infinito.

(iii). Todas las componentes de  $h_{ij}^{(a)}$  satisfacen la ecuación de D'Alembert:

$$(6) \quad \square h_{ij}^{(a)} \equiv \frac{\partial^2 h_{ij}^{(a)}}{\partial x^1{}^2} - \frac{\partial^2 h_{ij}^{(a)}}{\partial x^2{}^2} - \frac{\partial^2 h_{ij}^{(a)}}{\partial x^3{}^2} - \frac{\partial^2 h_{ij}^{(a)}}{\partial x^4{}^2} = 0.$$

de 1944]

27

Las condiciones (i), (ii) y (iii) definen unívocamente al tensor  $h_{ij}^{(a)}$ .  
Las ecuaciones del movimiento de la partícula  $m_{(a)}$  son, entonces:

$$(7) \quad f_{(a)}^i = m_{(a)} \frac{d^2 x_{(a)}^i}{ds^2}.$$

Para poder calcular los tensores  $h_{ij}^{(1)}$  y  $h_{ij}^{(2)}$  en el caso de los dos cuerpos, suponemos que existe un observador en un sistema de referencia inercial. Este observador es el que atribuye coordenadas a las partículas, y el que fija en qué instante una partícula tiene esas coordenadas.

El hecho de que las componentes del tensor  $h_{ij}$  satisfagan la ecuación de D'Alembert, se puede interpretar físicamente como sigue: la perturbación gravitacional debida a una partícula se propaga en el espacio físico con la velocidad de la luz,  $l$ .

Imaginemos a una partícula de masa  $m$  describiendo una trayectoria cualquiera en el espacio físico. Supongamos que esa partícula provoca un efecto cualquiera que se propaga con la velocidad  $l$ , y consideremos que se observa este efecto en el instante  $t$  en el punto  $Q(x, y, z)$ . La posición de la partícula, de la cual partió el efecto que llega a  $Q$  en el instante  $t$ , se llama "posición efectiva de la partícula con respecto a  $Q$  para el instante  $t$ "; esta posición efectiva corresponde a un tiempo

$$t < t.$$

El tiempo  $t$  en el que parte el efecto de la partícula que llega a  $Q$  en el instante  $t$ , se llama "tiempo retardado"; a cualquier magnitud física relacionada con la partícula, y calculada en  $Q$  en el instante  $t$ , para la posición que la partícula ocupaba en el instante  $t$  se le llama "magnitud retardada".

Denotamos a las magnitudes retardadas por la cursiva de la literal que las designa. En lo que sigue denotaremos a los vectores con mayúsculas.

Sea  $R$ , en el espacio físico, el vector de posición con origen en  $Q(x, y, z)$  de la partícula de masa  $m$  para el instante  $t$ , y sea  $r$  la distancia de  $Q$  a esa partícula.

$$|R| = r.$$

Insistimos aquí en que todas las coordenadas las mide un observador en  $O$ , que se encuentra en un sistema inercial.

Sea  $V$  el vector velocidad de la partícula en el instante  $t$ ; y sea  $U(t)$  una función cualquiera del tiempo  $t$ .

[ $U(t)$  puede ser cualquier función de las coordenadas de la partícula, o de las derivadas de esas coordenadas con respecto al tiempo.]

En la teoría de los potenciales retardados se demuestra que:

$$(8) \quad \square \frac{U(t)}{r - R \cdot V} = 0,$$

cualquiera que sea la función  $U(t)$ ; " $R \cdot V$ " denota al producto escalar de los vectores  $R$  y  $V$ .

A la función  $U(t)$  se le exige que sea de clase  $C^2$  en la región en que se opera.

La función que aquí nos interesa especialmente es:

$$(9) \quad \frac{\sqrt{1 - (v)^2}}{r - R \cdot V}$$

en la que  $v$  es la magnitud del vector velocidad  $V$ .

La función retardada

$$(10) \quad \frac{\sqrt{1 - (v)^2}}{r - R \cdot V}$$

satisface la ecuación de D'Alembert y tiene en la vecindad de  $r = 0$  la forma asintótica siguiente:

$$(11) \quad \frac{\sqrt{1 - (v)^2}}{r - R \cdot V} \sim \frac{1}{r}.$$

Tenemos ahora todos los elementos necesarios para calcular el tensor  $h_{ij}$  debido a una partícula en movimiento.

Hagamos una transformación de Lorentz tal, que la partícula quede instantáneamente en reposo en el tiempo  $t$ , después de efectuada ésta. En

de 1944]

29

el nuevo sistema de referencia, el tensor  $h_{ij}$  tendrá en el punto  $Q$  y en el instante  $t$ , las siguientes componentes:

$$(12) \quad h_{ij} = \frac{m\sqrt{1-(v)^2}}{r-R \cdot V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este tensor satisface las condiciones (i), (ii) y (iii).

Las componentes del tensor  $h_{ij}$  en el sistema primitivo de referencia, se obtienen haciendo la transformación de Lorentz recíproca de la que se describió anteriormente; estas componentes son las siguientes:

$$(13) \quad h_{ij} = \frac{m\sqrt{1-(v)^2}}{r-R \cdot V} \begin{pmatrix} \frac{1+(v)^2}{1-(v)^2} & -\frac{2v^1}{1-(v)^2} & -\frac{2v^2}{1-(v)^2} & -\frac{2v^3}{1-(v)^2} \\ -\frac{2v^1}{1-(v)^2} & 1+\frac{2(v^1)^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^3}{1-(v)^2} \\ -\frac{2v^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^2}{1-(v)^2} & 1+\frac{2(v^2)^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^2v^3}{1-(v)^2} \\ -\frac{2v^3}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^3}{1-(v)^2} & \frac{2v^2v^3}{1-(v)^2} & 1+\frac{2(v^3)^2}{1-(v)^2} \end{pmatrix}$$

$v^1, v^2, v^3$  son las componentes físicas del vector velocidad;  $(v)^2$  es el cuadrado de la magnitud del vector retardado de la velocidad, en el espacio físico.

Todas las componentes del tensor  $h_{ij}$  definido por (13) tienen la forma

$$\frac{U(t)}{r-R \cdot V}$$

y satisfacen por lo tanto las condiciones (i), (ii) y (iii).

En el caso de dos cuerpos siempre se puede elegir el sistema de referencia de manera que el movimiento se lleve a cabo en el plano  $xy$ .

Llamemos " $x_1, y_1$ " a las coordenadas de la partícula de masa  $m_1$ , y " $x_2, y_2$ " a las coordenadas de la partícula de masa  $m_2$ . Utilicemos un acento en una letra, para designar a la deriva con respecto al tiempo de la magnitud denotada por ella. Finalmente, despreciemos todas las expresiones de tercer grado, o de grado superior, en las componentes físicas del vector velocidad. El tensor  $h_{ij}^{(1)}$ , que es el que rige el movimiento de la primera partícula, está definido por la siguiente ecuación:

$$(14) \quad h_{ij}^{(1)} = m_2 \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{[(x_1 - x_2)x'_2 + (y_1 - y_2)y'_2]^2}{r^3} \right] A,$$

$$\text{en la que } A = \begin{pmatrix} 1 + 2x'_2{}^2 + 2y'_2{}^2 & -2x'_2 & -2y'_2 \\ -2x'_2 & 1 + 2x'_2{}^2 & 2x'_2 y'_2 \\ -2y'_2 & 2x'_2 y'_2 & 1 + 2y'_2{}^2 \end{pmatrix}$$

y

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Las magnitudes retardadas que intervienen en  $h_{ij}$  se expresaron en función de magnitudes no retardadas con auxilio del clásico desarrollo de Lagrange:

$$(15) \quad U(t) = \sum_0^n \frac{(-)^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left[ r^n \frac{du}{dt} \right]$$

$U(t)$  es una función del tiempo retardado  $t$ , calculada en  $Q(x, y, z)$  en el tiempo  $t$ .  $r$  es la distancia de  $Q$  a la partícula que provoca el efecto físico que se está considerando.

El tensor  $h_{ij}^{(2)}$  se obtiene de la ecuación (14) permutando los índices 1 y 2.

El tensor  $h_{ij}^{(3)}$  define inmediatamente las cuatro componentes covariantes de la fuerza  $f_i^{(3)}$  en el espacio de Minkowsky. (Véase la ecuación (4).)

Las componentes contravariantes, que son las que intervienen en las ecuaciones del movimiento, están determinadas por:

$$f_i^{(3)} = g^{ij} f_j^{(3)}$$

En las ecuaciones del movimiento intervienen derivadas con respecto a la  $s$  del espacio de Minkowsky. Conviene transformar estas derivadas, en de-

de 1944]

31

rivadas con respecto a  $t$ . De la  $ds^2$  del espacio de Minkowsky se obtiene inmediatamente la siguiente ecuación operacional:

$$(16) \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-x'^2-y'^2}} \frac{d}{dt}$$

que permite transformar derivadas con respecto a  $s$  en derivadas con respecto a  $t$ .

Despreciando siempre las expresiones de tercer grado en las componentes de las velocidades físicas de los cuerpos, se obtiene la siguiente ecuación para  $x''_1$ :

$$(17) \quad \frac{x''_1}{m_2} = -\frac{x_1-x_2}{r^3} +$$

$$+ \left[ \frac{3}{2} \frac{(x_1-x_2)^3}{r^5} - \frac{x_1-x_2}{r^3} \right] x'^2_2 +$$

$$+ \left[ \frac{y_1-y_2}{r^3} + \frac{3(x_1-x_2)^2 (y_1-y_2)}{r^5} \right] x'_2 y'_2 +$$

$$+ \left[ \frac{3}{2} \frac{(y_1-y_2)^2 (x_1-x_2)}{r^5} - \frac{2(x_1-x_2)}{r^3} \right] y'^2_2 +$$

$$+ \frac{x_1-x_2}{r^3} x'^2_1 +$$

$$+ \frac{2(y_1-y_2)}{r^3} x'_1 y'_1 -$$

$$- \frac{x_1-x_2}{r^3} x'_1 x'_2 -$$

$$- \frac{x_1-x_2}{r^3} y'^2_1 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{x_1 - x_2}{r^3} x'_1 y'_2 - \\
 & - \frac{2(y_1 - y_2)}{r^3} y'_1 x'_2 + \\
 & + \frac{4(x_1 - x_2)}{r^3} y'_1 y'_2.
 \end{aligned}$$

La ecuación que determina a  $y''_1$  se obtiene de la anterior permutando las literales  $x$ ,  $y$ . Las ecuaciones que determinan a  $x''_2$ ,  $y''_2$  se obtienen de las anteriores permutando los índices 1 y 2.

Hemos establecido entonces las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de dos cuerpos de masas comparables; estas ecuaciones están aproximadas hasta el segundo grado en las componentes físicas de las velocidades.

Para obtener resultados que sean interpretables físicamente es conveniente introducir tres nuevas variables  $x$ ,  $y$ ,  $r$ , definidas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & x = x_1 - x_2 \\
 & y = y_1 - y_2 \\
 & r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.
 \end{aligned}$$

$x$ ,  $y$  son en primera aproximación las coordenadas cartesianas de  $m_1$  en un sistema anclado en  $m_2$  y cuya dirección es invariante con respecto a un sistema inercial.  $r$  es en primera aproximación la distancia entre las dos partículas. La aceleración correspondiente a  $x$  es, entonces:

$$\begin{aligned}
 (19) \quad x'' = & - \frac{x}{r^3} (m_1 + m_2) + \\
 & + \left[ \frac{3}{2} \frac{x^3}{r^5} m_2 + \frac{x}{r^3} (m_1 - m_2) \right] x'^2_2 + \\
 & + \left[ \frac{y}{r^3} (m_1 + 2m_2) + \frac{3x^2y}{r^5} m_2 \right] x'_2 y'_2 +
 \end{aligned}$$

de 1944]

33

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{3}{2} \frac{xy^2}{r^5} m_2 - \frac{x}{r^3} (m_1 + 2m_2) \right] y_2'^2 + \\
& + \left[ \frac{3}{2} \frac{x^2y}{r^5} m_1 - \frac{y}{r^3} (m_1 + m_2) \right] x_1'^2 + \\
& + \left[ \frac{y}{r^3} (m_1 + 2m_2) + \frac{3x^2y}{r^5} m_1 \right] x_1' y_1' + \\
& + \left[ \frac{3}{2} \frac{xy^2}{r^5} m_1 - \frac{x}{r^3} (2m_1 + m_2) \right] y_1'^2 + \\
& + \frac{x}{r^3} (m_1 + m_2) x_1' x_2' - \\
& - \frac{y}{r^3} (2m_1 + m_2) x_1' y_2' - \\
& - \frac{y}{r^3} (m_1 + 2m_2) y_1' x_2' + \\
& + \frac{4x}{r^3} (m_1 + m_2) y_1' y_2'.
\end{aligned}$$

La aceleración de  $y$  se obtiene substituyendo en la ecuación (19)  $x$  por  $y$ , y por  $x$ , en cada uno de los lugares en que aparecen estas literales.

El sistema formado por (19) y la ecuación correspondiente para  $y''$ , se puede integrar por el método de las perturbaciones. Supongamos que el movimiento de los dos cuerpos es Newtoniano en una primera aproximación. La ecuación correspondiente a (19) en la mecánica de Newton, es:

$$(20) \quad x'' = - \frac{x}{r^3} (m_1 + m_2).$$

Todos los términos del segundo miembro de (19) que no aparecen en (20), deben considerarse como términos perturbadores.

Las ecuaciones del movimiento no perturbado, o sea del movimiento Newtoniano, admiten el siguiente Lagrangiano:

$$(21) \quad L = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) + \frac{M}{r}; \quad (M = m_1 + m_2).$$

La ecuación (19) y la correspondiente para  $y''$ , son equivalentes a:

$$(22) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = Q_y;$$

$Q_x$  y  $Q_y$  son las sumas de todos los términos perturbadores en las ecuaciones correspondientes.

Conviene en este punto hacer la transformación de coordenadas clásica del movimiento de los dos cuerpos que se utiliza con tanta ventaja en la mecánica celeste, y que está definida por:

$$(23) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= r \operatorname{sen} \vartheta. \end{aligned}$$

El Lagrangiano para estas coordenadas es:

$$(24) \quad L = \frac{1}{2} (r'^2 + r^2 \vartheta'^2) + \frac{M}{r}.$$

$L$  es el Lagrangiano del movimiento no perturbado.

Es necesario expresar los términos perturbadores en función de las nuevas coordenadas  $r$  y  $\vartheta$ . Para calcular estos términos nos basta la aproximación Newtoniana:

$$(25) \quad \begin{aligned} x_1 &= \lambda r \cos \vartheta, & y_1 &= \lambda r \operatorname{sen} \vartheta, \\ x_2 &= -\mu r \cos \vartheta, & y_2 &= -\mu r \operatorname{sen} \vartheta. \end{aligned}$$

$$\left( \lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \quad \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

de 1944]

35

Con las nuevas coordenadas  $r$  y  $\vartheta$  las ecuaciones (22) se transforman en:

$$(26) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial r'} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = Q_r,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \vartheta'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = Q_\vartheta.$$

$Q_r$  y  $Q_\vartheta$  se obtienen de la ecuación:

$$(27) \quad Q_r dx + Q_\vartheta dy = Q_r dr + Q_\vartheta d\vartheta.$$

Las ecuaciones del movimiento en  $r$  y  $\vartheta$  adquieren la forma simple que sigue a continuación:

$$(28) \quad r'' - r\vartheta'^2 = -\frac{\lambda l}{r^2} + \alpha \frac{r'^2}{r^2} - \beta \vartheta'^2,$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \vartheta') = \gamma r' \vartheta'$$

en las que:

$$\alpha = \frac{m_1^2 - 3/2 m_1 m_2 + m_2^2}{m_1 + m_2},$$

$$\beta = \frac{m_1^2 + 5m_1 m_2 + m_2^2}{m_1 + m_2},$$

$$\gamma = 2 \frac{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}{m_1 + m_2}.$$

En las ecuaciones (28) los términos perturbadores son los que tienen por coeficientes a  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . La ecuación Newtoniana correspondiente a la segunda de las ecuaciones (28), tiene por integral a la ecuación que expresa la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento:

$$(29) \quad r^2 \vartheta' = h.$$

36

En el término perturbador  $\gamma r' \dot{\theta}'$  se puede substituir el valor de  $\dot{\theta}'$  calculado de (29):

$$(30) \quad \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}') = \gamma h \frac{r'}{r^2}$$

La integral de la ecuación (30) es:

$$(31) \quad r^2 \dot{\theta}' + \frac{\gamma h}{r} = C.$$

De la (29) y la (31) se obtiene:

$$(32) \quad r(r + \gamma) \dot{\theta}' = C.$$

Esta ecuación expresa una ley de conservación: en el movimiento de los dos cuerpos se conserva invariante un producto de tres factores, que son: la velocidad angular, la distancia entre los dos cuerpos, y la suma de esa distancia y  $\gamma$ , siendo  $\gamma$  el doble de la diferencia entre la suma de las dos masas y el cociente del producto de las mismas y su suma.

De la ecuación (32) se obtienen:

$$(33) \quad r^2 \dot{\theta}' = C - \gamma r \dot{\theta}'$$

$$(34) \quad r \dot{\theta}' = \frac{C}{r} - \gamma \dot{\theta}'.$$

Substituyendo  $r \dot{\theta}'$  de (34) en el término perturbador de (33) y despreciando los términos en  $\gamma^2$ , se obtiene:

$$(35) \quad r^2 \dot{\theta}' = C - \frac{\gamma C}{r}.$$

De la ecuación (35) se deduce inmediatamente una relación entre los operadores  $d/d\theta$  y  $d/dt$ :

$$(36) \quad \frac{d}{dt} = (C u^2 - \gamma C u^3) \frac{d}{d\theta},$$

de 1944]

37

en donde

$$u = \frac{1}{r}.$$

La ecuación diferencial de la trayectoria es entonces:

$$(37) \quad \frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{m_1 + m_2}{C^2} + 2\gamma \frac{m_1 + m_2}{C^2} u + (\gamma - \alpha) \left( \frac{du}{d\vartheta} \right)^2 + \beta u^2.$$

En el segundo miembro son términos perturbadores: el segundo, el tercero y el cuarto. La solución de la ecuación no perturbada es:

$$(38) \quad u_0 = \frac{m_1 + m_2}{C^2} [1 + e \cos(\vartheta - \omega)].$$

En esta solución  $e$  y  $\omega$  son las dos constantes arbitrarias de la integración:  $e$  es la excentricidad de la órbita y  $\omega$  la longitud del periastro. La solución  $u$  de la ecuación perturbada (37) es, entonces:

$$(39) \quad u = u_0 + \Delta u.$$

$$(40) \quad u = \frac{m_1 + m_2}{C^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left\{ 2\gamma + \frac{e^2}{2}(\gamma - \alpha) + \beta \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) \right\} \frac{m_1 + m_2}{C^2} \\ + e \cos(\vartheta - \omega) + \frac{m_1 + m_2}{C^2} (\gamma + \beta) e \vartheta \operatorname{sen}(\vartheta - \omega) \\ - \frac{(m_1 + m_2)e^2}{6C^2} (\alpha + \beta - \gamma) \cos\{2(\vartheta - \omega)\}. \end{array} \right\}$$

El único término acumulativo en (40) es:

$$\frac{(m_1 + m_2)^2}{C^4} (\gamma + \beta) e \vartheta \operatorname{sen}(\vartheta - \omega).$$

Despreciando los términos no acumulativos, se obtiene:

$$(41) \quad u = \frac{m_1 + m_2}{C^2} \left\{ 1 + e \sqrt{1 + \frac{(m_1 + m_2)^2}{C^4} (\alpha + \beta)^2 \vartheta^2} \cos (\vartheta - \omega - \Delta\omega) \right\}$$

$$\Delta\omega \cong (\gamma + \beta) \frac{m_1 + m_2}{C^2} \vartheta.$$

Substituyendo en  $\Delta\omega$  los valores de  $\gamma$  y de  $\beta$  en función de las masas de los dos cuerpos, se obtiene:

$$(42) \quad \Delta\omega = \frac{3m_1^2 + 7m_1m_2 + 3m_2^2}{C^2} \vartheta.$$

Esta fórmula expresa el avance del periastro en la teoría de Birkhoff.

Introduciendo la distancia media  $a$  entre los dos astros, y la excentricidad  $e$  de la órbita, se obtiene:

$$(43) \quad \frac{\Delta\omega}{\vartheta} = \frac{3m_1^2 + 7m_1m_2 + 3m_2^2}{(m_1 + m_2) a (1 - e^2)}.$$

Cuando la masa de uno de los dos cuerpos, p. e.  $m_1$ , tiende a cero, la fórmula (43) expresa el avance del periastro en el problema de un cuerpo:

$$(44) \quad \lim_{m_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\vartheta} = \frac{3m_2}{a(1 - e^2)}.$$

Cabe inmediatamente preguntarse si la fórmula del avance del periastro que establecimos más arriba, se realiza en la naturaleza. Existen numerosas estrellas binarias cuyo movimiento debe estar regido por las leyes del movimiento de los dos cuerpos. En muchos casos se ha observado un avance de la línea de los ápsides; desgraciadamente acontece, que en los pares en que es más fácil de observar este movimiento, que son aquellos en que la distancia media es pequeña, se produce un efecto de marea en las dos componentes del par, que produce una rotación rápida de la línea de los ápsides, que enmascara completamente el efecto que predice la

de 1944]

39

fórmula (42). Este resultado sugiere, empero, un programa de observación que se refiere a la medición de elementos orbitales de binarias espectroscópicas cuyas componentes estén suficientemente alejadas para que no se produzca el efecto de marea.

Este trabajo fué desarrollado en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma en los primeros meses de este año, durante la visita del doctor Birkhoff a nuestra Universidad. Quiero expresar aquí mi más profundo agradecimiento al doctor Birkhoff por haberme sugerido este problema de investigación, y por sus valiosas sugerencias y genial dirección.

#### N O T A :

1 *El Concepto Matemático del Tiempo y la Gravitación*, que se publica en este mismo número.

## LA CORRECCION BOLOMETRICA DE LAS MAGNITUDES DE LAS GALAXIAS EN LA COSMOLOGIA BIRKHOFIANA\*

*Dr. Carlos GRAEF FERNANDEZ\*\**

En este trabajo consideramos a las galaxias como fuentes puntiformes de fotones que se alejan del observador con velocidades lo suficientemente grandes para que sea medible la disminución de la energía total recibida debida a la velocidad de recesión. Comparamos la energía recibida de una galaxia real que se aleja del observador con una velocidad  $v$ , con la energía que se recibía de una galaxia imaginaria, en reposo con respecto al observador. Supongamos que la galaxia real y la imaginaria son intrínsecamente iguales, y que equidistan del receptor de la energía en el instante de la emisión. La energía se capta con un bolómetro, es decir con un receptor de igual sensibilidad para todas las longitudes de onda.

Como en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff se incorpora totalmente la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein, todas las consideraciones hechas aquí se ejecutan dentro del espacio-tiempo de Minkowski.

1) *Los sistemas de referencia.*

El cuadrado del elemento de arco es en el espacio-tiempo de Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

en donde  $t$  es el tiempo, y  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las coordenadas cartesianas en un sistema inercial de referencia. Identificando a  $t$  con  $x^0$ , a  $x$  con  $x^1$ , a  $y$  con  $x^2$  y a  $z$  con  $x^3$ , podemos escribir:

$$ds^2 = \Delta_{ij} dx^i dx^j,$$

en donde sobreentenderemos, como se hace usualmente en la Teoría de la Relativi-

---

\* Trabajo llevado a cabo en el Instituto de Física de la U.N.A.

\*\* Becario de la Comisión Impulsora y Coordinadora de la Investigación Científica

dad, que se suma sobre los índices repetidos, y que todos los índices pueden adquirir los valores 1, 2, 3 y 4.

El tensor  $\Delta_{ij}$  es el tensor fundamental covariante de la métrica, y sus componentes son:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El tensor doblemente contravariante asociado al covariante fundamental es

$$\Delta^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si nos restringimos a utilizar exclusivamente sistemas inerciales de referencia las transformaciones de coordenadas serán las de Lorentz, es decir lineales de determinante igual a 1, con coeficientes que satisfacen ciertas condiciones adicionales. Sean  $a^i$ , los coeficientes de una transformación directa de Lorentz. Entonces

$$\begin{aligned} |a^i_j| &= 1 \\ \Delta_{ij} a^i_k a^j_l &= \Delta_{kl} \\ \Delta^{ij} a^k_i a^l_j &= \Delta^{kl} \end{aligned}$$

Los coeficientes de la transformación inversa  $A^i_j$ , son los cofactores de las  $a^i_j$ , correspondientes en el determinante  $a^i_j$ . Las  $A^i_j$  satisfacen a su vez las condiciones:

$$\begin{aligned} |A^i_j| &= 1 \\ \Delta_{ij} A^i_k A^j_l &= \Delta_{kl} \\ \Delta^{ij} A^k_i A^l_j &= \Delta^{kl} \\ a^i_j A^j_k &= \delta^i_k \\ a^i_j A^k_i &= \delta^k_j \end{aligned}$$

En donde las  $\delta^i_j$ , son las de Kronecker.

Una transformación de Lorentz está definida por

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j + b^i,$$

## LA CORRECCION BOLOMETRICA DE LAS MAGNITUDES DE LAS GALAXIAS 53

en donde las  $b^i$  son 4 constantes aditivas. Un acontecimiento que en el sistema primitivo tenga las coordenadas  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ , tiene en el nuevo sistema las coordenadas  $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4)$ . La transformación inversa está dada por:

$$x^i = A^i_j \bar{x}^j + B^i$$

en donde  $B^i = -A^i_j b^j$

La ecuación de transformación de los vectores contravariantes es:

$$\bar{v}^i = a^i_j v^j$$

Los vectores covariantes se transforman según el siguiente canon:

$$\bar{v}_i = A^j_i v_j$$

Estableceremos en seguida ciertos conceptos, relativos a sistemas de partículas en movimiento para aplicarlos más tarde al flujo de los fotones que emanan de una galaxia.

2) *El cuadrivector velocidad.*

Considérese un sistema de referencia inercial en el que se están moviendo un gran número de partículas de manera tal que el vector velocidad en el espacio físico  $(u^x, u^y, u^z)$  esté definido en la región ocupada por las partículas como una función vectorial de posición que pueda considerarse con suficiente aproximación como función continua de las coordenadas. A este vector velocidad le corresponde el cuadrivector en el espacio-tiempo de Minkowski cuyas componentes son:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1-(u)^2}}, \frac{u^x}{\sqrt{1-(u)^2}}, \frac{u^y}{\sqrt{1-(u)^2}}, \frac{u^z}{\sqrt{1-(u)^2}} \right)$$

Aquí  $(u)^2 = (u^x)^2 + (u^y)^2 + (u^z)^2$ .

El cuadrivector así construido se llama cuadrivector velocidad; sus componentes se designan como sigue:

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-(u)^2}} & u^2 &= \frac{u^x}{\sqrt{1-(u)^2}} \\ u^3 &= \frac{u^y}{\sqrt{1-(u)^2}} & u^4 &= \frac{u^z}{\sqrt{1-(u)^2}} \end{aligned}$$

Usamos el símbolo " $(u)^2$ " para designar el cuadrado de la velocidad en el espacio físico, y el símbolo  $u^2$  para denotar a la segunda componente del cuadri-

vector. En todas estas consideraciones se utilizan unidades relativistas en las que la unidad de distancia es el segundo-luz, la unidad de tiempo el segundo, y la velocidad límite es uno. Se supone que la velocidad de cualquier partícula material es menor que la velocidad límite:

$$(v)^2 < 1$$

Esto es válido aún en el caso de fotones.

### 3) *La densidad en reposo.*

Sea P una partícula y considérese un sistema inercial auxiliar de referencia que en el instante  $t$  se mueve con la velocidad de P. A este sistema inercial en el que P está instantáneamente en reposo en el tiempo  $t$ , se le llama "sistema en reposo de P". Como el sistema en reposo es inercial se mueve con velocidad constante. Para cada instante  $t$  habrá en general, para la partícula P, un sistema en reposo especial. El sistema en reposo para el instante  $t$  no será en general sistema en reposo en otros instantes. Solamente cuando P tiene velocidad constante existe un sistema inercial en el que esta partícula está permanentemente en reposo.

Constrúyase en el sistema en reposo de P, para el instante  $t$ , un elemento de volumen  $\Delta V_0$  que contenga a P en su interior, y que esté a su vez en reposo con respecto a P. Sea  $\Delta N$  el número de partículas del sistema que están en  $\Delta V_0$  en el instante  $t$ . Llamaremos "densidad en reposo de las partículas en P" al límite de  $\Delta N / \Delta V_0$  cuando todos los puntos de  $\Delta V_0$  tienden a P. Designemos a este límite con el símbolo  $\rho_0$ .

$$\rho_0 = \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V_0}$$

El límite tiene en este caso el sentido que en la física se les da a esas magnitudes que representan abundancias de objetos discretos por unidad de volumen.

La densidad en reposo en una partícula P no depende del sistema particular fundamental de referencia que se esté utilizando; cualquiera que sea éste se obtiene la misma  $\rho_0$  dada P y el instante  $t$ .  $\rho_0$  es pues una invariante en el sentido del cálculo tensorial; en general  $\rho_0$  es una función de  $t$ .

### 4) *El flujo de Partículas.*

El producto del invariante  $\rho_0$  y del cuádrivector contravariante de la velocidad se designa con el nombre de "flujo de las partículas", y es a su vez un cuádrivector contravariante. Denotemos a este flujo con el símbolo  $\phi^i$ ; entonces:

$$\epsilon' = \left[ \frac{\rho_0}{\sqrt{1-(u)^2}}, \frac{\rho_0 u^x}{\sqrt{1-(u)^2}}, \frac{\rho_0 u^y}{\sqrt{1-(u)^2}}, \frac{\rho_0 u^z}{\sqrt{1-(u)^2}} \right]$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Considérese otra vez a la partícula P moviéndose en el sistema inercial fundamental de referencia. Constrúyase en el tiempo  $t$  un elemento de volumen  $\Delta V$  que contenga a P en su interior, y que esté en reposo en el sistema fundamental de referencia. Sea  $\Delta N$  el número de partículas en  $\Delta V$ . Llamaremos "densidad de las partículas en P" al límite de  $\Delta N/\Delta V$  cuando todos los puntos de  $\Delta V$  tienden a P. Designemos a este límite con  $\rho$ . Entonces.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V}$$

De este límite debe decirse también que tiene el sentido que en la física se les da a las densidades en colecciones de objetos discretos.

La densidad de las partículas en P es en general una función del tiempo, y no es un invariante porque su valor depende del sistema inercial que se haya elegido como fundamental.

Para comparar la densidad de las partículas en P:  $\rho$  con la densidad en reposo de las partículas en P:  $\rho_0$ , háganse las siguientes consideraciones:

- Imagínese el volumen  $\Delta V_0$  en reposo con respecto a P, y conteniendo además de a P, a  $\Delta N$  partículas.
- Este volumen  $\Delta V_0$  se ve desde el sistema fundamental de referencia como una caja móvil que camina con la velocidad  $u$  y que contiene a  $\Delta N$  partículas.
- El volumen  $\Delta V$  de esa caja móvil calculado por el sistema fundamental de referencia es:

$$\Delta V = \Delta V_0 \sqrt{1-(u)^2}$$

La disminución del volumen se debe a la contracción de Lorentz de las dimensiones lineales en la dirección del movimiento. Se obtiene de un modo inmediato el siguiente resultado:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} = \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V_0 \sqrt{1-(u)^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-(u)^2}}$$

El flujo de partículas  $\varphi^i$  puede expresarse con auxilio de la densidad de partículas  $\rho$  del siguiente modo:

$$\varphi^i = (\rho, \rho\mu^x, \rho\mu^y, \rho\mu^z)$$

La primera componente del cuadrivector contravariante del flujo de las partículas  $\varphi^i$  es la densidad de las partículas.

5) *El elemento áreo-temporal.*

Considérese un elemento de área  $dS$  en el espacio físico, con un vector normal unitario  $(l, m, n)$ . Supongamos que en el instante  $t$ ,  $dS$  está en reposo en cierto sistema inercial de referencia. Si  $dS$  está en una región en la que se encuentra el sistema de partículas que hemos estado estudiando, entonces es fácil ver que el número total de partículas que atraviesan  $dS$  por unidad de tiempo es

$$(l\mu^x + m\mu^y + n\mu^z) \rho dS.$$

El número de partículas que pasan a través de  $dS$  en el intervalo  $dt$  es:

$$(l\mu^x + m\mu^y + n\mu^z) \rho dS dt$$

Asociamos ahora con el elemento de área  $dS$  y con el intervalo de tiempo  $dt$  un cuadrivector covariante cuyas componentes en el sistema en reposo de  $dS$  son:

$$d\sigma = (0, ldSdt, mdSdt, ndSdt)$$

Los valores de las componentes de un cuadrivector covariante en un sistema definen completamente al cuadrivector. Para obtenerlas para cualquier otro sistema, basta transformar de acuerdo con el canon para vectores covariantes.

Designamos a  $d\sigma$ , como "elemento áreo-temporal".

Supóngase que se tiene un elemento de área  $dS$  que se está moviendo en el sistema fundamental de referencia con cierta velocidad, y fíjese la atención en el intervalo  $t, t+dt$ . Para construir el elemento áreo-temporal en el sistema fundamental considérese el sistema inercial auxiliar, en el que  $dS$  está en reposo en el instante  $t$ . Sean  $(l, m, n)$  los cosenos directores de la normal a  $dS$  en el sistema auxiliar. Sea  $dt'$  el intervalo del sistema auxiliar correspondiente al intervalo  $dt$  del sistema fundamental. Sea por último  $dS'$  la magnitud en el sistema auxiliar del elemento de área considerado. El elemento áreo-temporal es entonces en el sistema auxiliar:

$$d\sigma' = (0, ldS'dt', mdS'dt', ndS'dt')$$

Si denotamos con  $x'^i$  a las coordenadas de un acontecimiento en el sistema auxiliar, y por  $x^i$  a las correspondientes del sistema fundamental, y si

$$\begin{aligned} x'^i &= a^i_j x^j + b^i \\ x^i &= A^i_j x'^j + B^i \end{aligned} ,$$

## LA CORRECCION BOLOMETRICA DE LAS MAGNITUDES DE LAS GALAXIAS 57

entonces el elemento áreo-temporal es en el sistema fundamental:

$$d\sigma_i = a^i_j d\sigma'_j$$

Si se considera el flujo de las partículas  $\varphi^i$  en el sistema auxiliar, y si se forma el invariante

$$\sigma'^i d\sigma'_i$$

se obtiene como resultado que esta expresión es igual a

$$(lu'^x + mu'^y + nu'^z) \rho' dS' dt'$$

Aquí  $(u'^x, u'^y, u'^z)$  es el vector velocidad de las partículas en el espacio físico del sistema de referencia auxiliar.  $\rho'$  es la densidad de las partículas en ese mismo sistema de referencia, y  $dt'$  es el intervalo de tiempo medido también por el observador auxiliar. El invariante no es otra cosa, que el número de partículas que pasan por  $dS'$  en el tiempo  $dt'$ .

Como  $\varphi'^i d\sigma'_i = \varphi^i d\sigma_i$ , podemos afirmar que el producto escalar del cuadvectores flujo de las partículas, por el cuadvectores del elemento áreo-temporal, es igual al número de partículas que pasan por el elemento de área en el intervalo elemental de tiempo, cualquiera que sea el sistema de referencia en el que se calculen las componentes de ambos vectores.

#### 6) El fotón en la Teoría de Birkhoff.

Los fotones se consideran en esta Teoría como límites de partículas materiales cuya masa tiende a cero, y cuya velocidad tiende simultáneamente a la velocidad límite 1; durante este proceso se obliga a mantenerse constante a la energía relativista total de la partícula, que es el cociente entre su masa y la raíz cuadrada de uno menos el cuadrado de su velocidad. La energía depende entonces del sistema de referencia inercial que se utilice. Se identifica además esta energía con la que Planck asigna al fotón, y que es igual a  $H/\lambda$ , siendo  $H$  la constante de Planck en unidades relativistas ( $H = 7.27 \cdot 10^{-32}$  gr. segundo-luz) y  $\lambda$  la longitud de onda en segundos-luz. Esta longitud de onda depende entonces del sistema de referencia inercial en el que se observe al fotón.

Para estudiar los movimientos de los fotones conviene hacer las siguientes hipótesis:

- a) Los fotones son partículas materiales que tienen todos la misma masa  $\mu$ .  $\mu$  es muy pequeña pero no es nula.

$$\mu = 0$$

$$\mu \neq 0$$

- b) Si la velocidad del fotón en un sistema de referencia inercial es  $v_\lambda$ , su energía en ese sistema es:

$$\frac{\mu}{\sqrt{1-v_\lambda^2}}$$

- c) La energía del fotón se expresa en función de su longitud de onda como

$$\frac{H}{\lambda}$$

$H$  es la constante de Planck en unidades relativistas.

$$H = 7.27 \cdot 10^{17} \text{ segundo-luz}$$

- d) En toda expresión que se refiera a fotones dejaremos tender  $\mu$  a cero y  $v_\lambda$  a uno, manteniendo constante  $\lambda$

$$\frac{\mu}{\sqrt{1-v_\lambda^2}}$$

Una consecuencia inmediata de estas hipótesis es la fórmula que rige al efecto Doppler: Sea  $\lambda'$  la longitud de onda de un fotón en el sistema de referencia anclado a su fuente, y sea  $v$  la velocidad con la que el observador se aleja de esta fuente, entonces se obtiene para la longitud de onda  $\lambda$  del fotón con respecto al observador la siguiente expresión:

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \lambda$$

Escribamos también la fórmula equivalente:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \lambda'$$

- 7) *Energía recibida de una galaxia en reposo con respecto al observador.*

Imaginemos un observador con un sistema inercial de referencia, y describamos los fenómenos desde su punto de vista; a este observador le llamaremos el "observador fundamental". Las coordenadas, utilizadas en el espacio físico serán cartesianas.

Considérese una fuente puntiforme de fotones  $G$  con un caudal de emisión constante. Supóngase que el número de fotones emitidos en la unidad de tiempo en la banda de longitudes de onda  $\lambda$ ,  $\lambda + d\lambda$  es:

$$f(\lambda) d\lambda.$$

Coloquemos a la fuente  $G$  permanentemente en el origen  $(0, 0, 0)$  del espacio físico, de manera que  $G$  estará en reposo con respecto al observador fundamental.

En el punto de coordenadas  $(r, 0, 0)$  imaginemos al elemento de área  $dS$ , también en reposo con respecto al observador fundamental y con cosenos directores  $(1, 0, 0)$ .  $dS$  entonces perpendicular al eje de las equis.

Calculemos el número de fotones que pasan a través de  $dS$  en el tiempo  $dt$ .

Para obtener este número es necesario encontrar primero la densidad  $\rho$  con respecto al observador fundamental, y en seguida establecer el cuadvivector del flujo  $\varphi^i$ .

Consideremos un cascarón esférico de centro en  $(0, 0, 0)$  de radio interior  $r$ , y de grueso  $dr$ . El volumen de este cascarón es  $dV = 4\pi r^2 dr$ . La diferencia entre los tiempos de emisión de los fotones que están penetrando en el cascarón y de los que lo están abandonando, es igual a

$$\frac{dr}{v_\lambda},$$

siendo  $v_\lambda$  la velocidad de los fotones. El número total de fotones dentro del cascarón es de

$$dN = f(\lambda) d\lambda \frac{dr}{v_\lambda}$$

o sea el número de fotones emitido en el intervalo de tiempo calculado antes. La densidad  $\rho$  la obtenemos como cociente de  $dN$  entre  $dV$

$$\rho = \frac{dN}{dV} = \frac{f(\lambda) d\lambda}{4\pi r^2 v_\lambda}$$

Con objeto de facilitar los cálculos nos conviene introducir ahora coordenadas polares esféricas, tales que:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

En este caso es el vector velocidad ( $u^i, u^r, u^z$ ) de los fotones en el espacio físico es:

$$\begin{aligned} u^x &= v_\lambda \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ u^y &= v_\lambda \operatorname{sen} \theta \sin \varphi \\ u^z &= v_\lambda \cos \theta \end{aligned}$$

El cuadrivector  $\varphi^i$  del flujo es entonces

$$\varphi^i = \left[ \begin{array}{c} \frac{f(\lambda) d\lambda}{4\pi r^2 v_\lambda}, \frac{f(\lambda) d\lambda}{4\pi r^2} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \frac{f(\lambda) d\lambda}{4\pi r^2} \operatorname{sen} \theta \sin \varphi, \\ \frac{f(\lambda) d\lambda}{4\pi r^2} \cos \theta \end{array} \right]$$

El elemento de área  $dS$  se encuentra en el punto  $(r, 0, 0)$ ; en ese punto  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $\varphi = 0$ ; allí

$$\varphi^i = \left[ \frac{f(\lambda) d\lambda}{4\pi r^2 v_\lambda}, \frac{f(\lambda) d\lambda}{4\pi r^2}, 0, 0 \right]$$

El elemento áreo-temporal  $d\sigma_i$ , es en este caso:

$$d\sigma_i = (0, dS dt, 0, 0)$$

El número de fotones de la banda  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  que pasan a través de  $dS$  en el tiempo  $dt$  es

$$\varphi^i d\sigma_i = \frac{f(\lambda) d\lambda dS dt}{4\pi r^2}$$

La energía de uno de tales fotones es  $\frac{\mu}{\sqrt{1-v_\lambda^2}}$

de manera que la energía elemental recibida en  $dS$  en el tiempo  $dt$ , en la banda  $(\lambda, \lambda + d)$ , es

$$d E_G = \frac{d(\lambda) d\lambda \mu dS dt}{4\pi r^2 \sqrt{1-v_\lambda^2}}$$

Dejemos tender finalmente  $v_\lambda$  hacia uno y  $\mu$  hacia cero, conservando constante

e igual a  $\frac{H}{\lambda}$  a  $\frac{\mu}{\sqrt{1-v_\lambda^2}}$ .

## LA CORRECCION BOLOMETRICA DE LAS MAGNITUDES DE LAS GALAXIAS 61

Para  $dE_G$  obtenemos entonces la expresión:

$$dE_G = \frac{HdSdt}{4\pi r^2} \cdot \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda}$$

8) *Energía recibida de una galaxia que se aleja del observador con la velocidad constante  $v$ .*

La descripción de los fenómenos la hará otra vez el observador fundamental en su sistema de referencia inercial.

Considérese una fuente puntiforme de fotones  $G'$  con un caudal de emisión constante. Un observador auxiliar  $O'$  en reposo con respecto a  $G'$  observa que el número de fotones emitidos por segundo en la banda  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  es  $f(\lambda) d\lambda$ .  $G'$  es pues intrínsecamente idéntica a  $G$ .

Supongamos que  $G'$  se aleja del observador fundamental con la velocidad  $-v$ .

En el punto de coordenadas  $(r, 0, 0)$  imaginemos otra vez al elemento de área  $dS$  en reposo con respecto al observador fundamental, y con cosenos directores  $(1, 0, 0)$ .  $dS$  es perpendicular al eje de las equis.

Para el observador auxiliar  $O'$ , que está en reposo con respecto a  $G'$  el vector del flujo  $\varphi'^i$  es:

$$\varphi'^i = \left[ \frac{f(\lambda)d\lambda}{4\pi r'^2 v_\lambda} \cdot \frac{f(\lambda)d\lambda}{4\pi r'^2} \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi' \cdot \frac{f(\lambda)d\lambda}{4\pi r'^2} \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}' \cdot \frac{f(\lambda)d\lambda}{4\pi r'^2} \cos\theta' \right]$$

Aquí  $r'$  es la distancia a  $G$  medida por  $O'$ .  $v_\lambda$  es la velocidad de los fotones emitidos medida también por  $O'$ .  $\theta'$  y  $\varphi'$  son los ángulos de colatitud y longitud medidos también por el observador auxiliar.

El elemento áreo-temporal  $d\sigma_i$  es como antes:

$$d\sigma_i = (0, dSdt, 0, 0)$$

Aquí  $dS$  significa el elemento de área medido por  $O$ , y  $dt$  el intervalo de tiempo transcurrido según  $O$ . Se hace notar que en ambos casos considerados  $dS$  está en reposo con respecto al observador fundamental, y que el área  $dS$  y el tiempo  $dt$  mide éste.

Conviene ahora traducir  $d\sigma_i$  al sistema de  $O'$ . Esto se hace por medio de la transformación de Lorentz:

$$t' = \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$y' = y \quad z' = z$$

En este caso el origen de  $O'$  se aleja del origen de  $O$  con una velocidad  $-v$ .

Los coeficientes  $A^i_j$  son:

$$A^i_j = \begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{+v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{+v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Los coeficientes de la transformación inversa son entonces:

$$A^i_j = \begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Las nuevas componentes del cuadrivector covariante  $d\sigma$ , se obtienen de acuerdo con la fórmula:

$$\begin{aligned} d\sigma'_i &= A^i_j d\sigma_j \\ &= \frac{-v dS dt}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{dS dt}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0 \end{aligned}$$

Como el elemento de área está también para  $O'$  en el eje de las equis, su colatitud es igual a  $\pi/2$  y su longitud igual a cero. Entonces:

$$\varphi'^i = \left[ \frac{f(\lambda)d\lambda}{4\pi v^2 r_\lambda}, \frac{f(\lambda)d\lambda}{4\pi v^2}, 0, 0 \right]$$

## LA CORRECCION BOLOMETRICA DE LAS MAGNITUDES DE LAS GALAXIAS 63

El número de fotones de la banda  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  que pasan por el elemento de área  $dS$  en el tiempo  $dt$ , —ambos medidos por el observador fundamental 0—, es:

$$\varphi' d\sigma' = \frac{J(\lambda)d\lambda dSdt}{4\pi r'^2 \sqrt{1-v^2}} \frac{V\lambda-v}{v_\lambda}$$

Supongamos que en el instante  $t = t' = 0$   $G$  y  $G'$  coincidían y estaban en el origen del sistema fundamental. En este caso las coordenadas del acontecimiento que consiste en la coincidencia de ambas galaxias son:  $(0, 0, 0, 0)$ .

Un fotón que sale de  $G'$  hacia  $dS$  con la velocidad  $v_\lambda$  según el observador auxiliar  $0'$  que ve a  $G'$  en reposo, camina según el observador fundamental con una velocidad igual a

$$\frac{v_\lambda - v}{1 - v_\lambda v}$$

expresión que se obtiene de la fórmula de la adición de las velocidades en la relatividad especial. El acontecimiento que significa la llegada del fotón a  $dS$ , tiene según 0 las coordenadas:

$$\left[ \frac{r(1 - v_\lambda v)}{v_\lambda - v}, r, 0, 0 \right]$$

Traduzcamos estos dos acontecimientos al sistema del observador auxiliar  $0'$ ; se obtiene:  $(0, 0, 0, 0)$  para el acontecimiento de la emisión, y

$$\left[ \frac{\sqrt{1-v^2} r}{v_\lambda - v}, \frac{v_\lambda \sqrt{1-v^2} r}{v_\lambda - v}, 0, 0 \right]$$

para el acontecimiento de la recepción. La distancia que separa en el espacio físico a ambos acontecimientos es

$$r' = \frac{v_\lambda \sqrt{1-v^2} r}{v_\lambda - v}$$

La energía con la que  $dS$  recibe a los fotones es según 0:

$$\frac{\mu}{\sqrt{1 - \left[ \frac{v_\lambda - v}{1 - v_\lambda v} \right]^2}} = \frac{\mu(1 - v_\lambda v)}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - v_\lambda^2)}}$$

La energía elemental recibida en  $dS$  en el intervalo de tiempo  $dt$ , y en la banda  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  es:

$$dE_{G'} = \frac{f(\lambda)d\lambda\mu dSdt}{4\pi r'^2 \sqrt{1-v'^2}} \cdot \frac{(v_\lambda - v)^2 (1 - v_\lambda v)}{r'^2 \lambda (1 - v^2)^2}$$

Dejemos tender finalmente  $v_\lambda$  hacia uno y  $\mu$  hacia cero conservando constante e

igual a  $\frac{H}{\lambda}$  a  $\frac{\mu}{\sqrt{1-v'^2}}$ .

Para  $dE_{G'}$  obtenemos entonces:

$$dE_{G'} = \frac{HdS dt}{4\pi r'^2} \cdot \left[ \frac{1-v}{1+v} \right]^2 \cdot \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda}$$

2) *Comparación de la energía  $dE_{G'}$  recibida de una galaxia  $G'$  en la que se aleja del observador con una velocidad constante  $v$ , con la energía  $dE_G$  recibida de otra galaxia en reposo con respecto al observador.*

Consideramos a ambas galaxias como intrínsecamente iguales. Ambas emiten por segundo el mismo caudal de fotones  $f(\lambda)d\lambda$  en la banda  $\lambda, \lambda + d\lambda$  con respecto a observadores en reposo con respecto a ellas. Una de ellas, la  $G$ , se encuentra en reposo con respecto al observador fundamental; la otra, la  $G'$ , se aleja de éste con la velocidad  $-v$ . Los fotones que el observador fundamental recibe partieron de ambas galaxias cuando éstas estaban a la distancia  $r$  del receptor; la distancia la mide el observador fundamental.  $G$  está permanentemente a la distancia  $r$  del receptor;  $G'$  sólo instantáneamente. El receptor es un elemento de área  $dS$  con su normal apuntando hacia las galaxias.

La energía que  $dS$  recibe de la galaxia en reposo  $G$  en el tiempo  $dt$ , y que es transportada por los fotones emitidos en la banda  $\lambda, \lambda + d\lambda$ , es:

$$dE_G = \frac{H dS dt}{4\pi r^2} \cdot \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda}$$

La energía que  $dS$  recibe de la galaxia en movimiento  $g'$  en el tiempo  $dt$ , y que es transportada por los fotones emitidos según un observador en  $G'$  misma en la banda  $\lambda, \lambda + d\lambda$ , es

$$dE_{G'} = \frac{HdSdt}{4\pi r'^2} \cdot \left[ \frac{1-v}{1+v} \right]^2 \cdot \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda}$$

## 1.A CORRECCION BOLOMETRICA DE LAS MAGNITUDES DE LAS GALAXIAS 65

Hay que hacer notar que  $dS$  y  $dt$  los mide un observador en reposo con respecto a ese elemento de área. Los fotones que salen de  $G'$  en la banda  $\lambda + \lambda d\lambda$  no llegan a  $dS$  en esa misma banda.

Comparando por división la energía  $dE_{G'}$  con la  $dE_G$  se obtiene:

$$\frac{dE_{G'}}{dE_G} = \left[ \frac{1-v}{1+v} \right]^2$$

Este resultado lo podemos expresar diciendo:

La energía emitida en cualquier banda por una galaxia que se aleja del observador con una velocidad  $v$  sufre una disminución que se expresa por el factor

$$\left[ \frac{1-v}{1+v} \right]^2$$

Como este factor es independiente de la colocación de la banda obtenemos el resultado siguiente: La energía total recibida por un observador, de una galaxia que se aleja de él con la velocidad  $v$ , es solamente una fracción de la que recibiría de esa galaxia, si ésta estuviera en reposo con respecto a él, y colocada a la misma distancia en el instante de la emisión. La fracción propia, relación de ambas energías es:

$$\frac{E_{G'}}{E_G} = \left[ \frac{1-v}{1+v} \right]^2$$

La magnitud bolométrica  $m_{G'}$  de la galaxia  $G'$  que se aleja del observador con la velocidad  $v$ , está relacionada con la energía total  $E_{G'}$  recibida de esa galaxia por medio de la ecuación:

$$2.512 \cdot m_{G'} = K + E_{G'}$$

en la que  $K$  es una constante. Una relación análoga liga a la energía total  $E_G$  recibida por el observador de la galaxia en reposo  $G$ , con la magnitud bolométrica  $m_G$  de la misma.

$$2.512 \cdot m_G = K + E_G$$

Se obtiene por división:

$$2.512 \cdot m_G - m_{G'} = \frac{E_{G'}}{E_G} = \left[ \frac{1-v}{1+v} \right]^2$$

Despejando la diferencia de magnitudes bolométricas se obtiene:

$$m_G - m_{G'} = \{ \log(1-v) - \log(1+v) \}$$

La aplicación astronómica de este resultado es la siguiente:

- 1) Suponemos que se conoce la magnitud bolométrica de  $m_G'$  de una galaxia  $G'$  que se aleja de nosotros con una velocidad  $v$ .
- 2) Se desea conocer la magnitud bolométrica  $m_G$  que tendría esa galaxia si en el instante de la emisión hubiese estado en reposo con respecto a nosotros.

$$m_G = m_G' + 5 [\log(1-v) - \log(1+v)]$$

## LA EXPANSION DEL UNIVERSO EN LA TEORIA DE BIRKHOFF

Por Carlos Graef Fernández

Presentado en el II Congreso Nacional de Matemáticas.

Birkhoff utiliza en su teoría de la gravitación un fluido en el que la velocidad de la onda de perturbación es igual a la velocidad de la luz, que a su vez es igual a uno en las unidades usadas. Si se considera la presión del fluido  $p$  como una función  $f(\rho)$  de la densidad  $\rho$ , entonces la velocidad de la onda de perturbación es: <sup>(1)</sup>

$$V_0 = \sqrt{\frac{\frac{df}{d\rho}}{1 - \frac{df}{d\rho}}}$$

Para  $V_0$  igual a uno se obtiene:

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{1}{2}$$

La integral de esta ecuación es:

$$f(\rho) = \frac{1}{2}(\rho) + \frac{K}{\pi}$$

La presión del fluido de Birkhoff es entonces:

$$p = \frac{1}{2}\rho + \frac{K}{\pi}$$

Si la constante  $K$ , que llamaremos en este trabajo "constante cosmológica", se hace igual a cero, se obtiene un universo estable con fuerzas gravitacionales cuyos efectos han sido estudiados en detalle. <sup>(2), (3) y (4)</sup>

Birkhoff sugirió que se utilizara una constante  $K$ , diferente de cero y que se exploraran las condiciones del universo bajo esta hipótesis. <sup>(5)</sup>

En este trabajo estudiamos las consecuencias de suponer que la constante cosmológica  $K$  tiene un valor distinto de cero.

El tensor de la energía y las cantidades de movimiento es en general

$$T^{ij} = \rho \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} - p \Delta^{ij};$$

$ds$  es aquí el elemento de arco de Minkowski definido por

$$ds^2 = \Delta_{ij} dx^i dx^j,$$

en donde:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Delta^{ij}$  es el tensor contravariante asociado al métrico fundamental  $\Delta_{ij}$ , y en este caso:

$$\Delta^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como  $p = \frac{1}{2} \rho + \frac{K}{\pi}$ , el tensor de la energía y las cantidades de movimiento tiene para nosotros la forma:

$$T^{ij} = \rho \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} - \left( \frac{1}{2} \rho + \frac{K}{\pi} \right) \Delta^{ij}.$$

De la ecuación fundamental del tensor de las fuerzas gravitacionales <sup>(6)</sup> que es:

$$\square h^{ij} = 8\pi T^{ij},$$

se obtiene:

$$\square h^{ij} = 8\pi \left[ \rho \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} - \left( \frac{1}{2} \rho + \frac{K}{\pi} \right) \Delta^{ij} \right].$$

de 1945]

45

Llamando  $H^{ij}$  a la parte del tensor gravitacional  $h^{ij}$  que se debe al término cosmológico, podemos escribir

$$\square H^{ij} = -8K \Delta^{ij}.$$

La solución de esta ecuación con derivadas parciales, que no tiene singularidades en ningún punto del espacio-tiempo de Minkowski y que es invariante en las transformaciones de Lorentz es:

$$H^{ij} = -K \Delta_{rs} (x^r - a^r) (x^s - a^s) \Delta^{ij}.$$

Usaremos por comodidad la anotación definida como sigue:

$$\begin{aligned} X^1 &= T = x^1 - a^1, \\ X^2 &= X = x^2 - a^2, \\ X^3 &= Y = x^3 - a^3, \\ X^4 &= Z = x^4 - a^4. \end{aligned}$$

Con estas formas de escribir, el tensor  $H^{ij}$  se expresa como sigue:

$$H^{ij} = K (T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) \Delta^{ij},$$

$$H^{ij} = K \Delta_{rs} X^r X^s \Delta^{ij}.$$

Conviene observar que las componentes no idénticamente nulas del tensor  $H^{ij}$  tienden al infinito cuando una o varias de las coordenadas espaciales tienden al infinito en valor absoluto, permaneciendo finita la coordenada temporal; y también cuando la coordenada temporal tiene a infinito en valor absoluto permaneciendo finitas las coordenadas espaciales.

Las fuerzas cósmicas asociadas al tensor  $H^{ij}$  son:

$$f^1 = \frac{d^2 T}{ds^2} = -2K \left[ T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} - Y \frac{dY}{ds} - Z \frac{dZ}{ds} \right] \frac{dT}{ds} + 2KT,$$

$$f^2 = \frac{d^2 X}{ds^2} = -2K \left[ T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} - Y \frac{dY}{ds} - Z \frac{dZ}{ds} \right] \frac{dX}{ds} + 2KX,$$

$$f^3 = \frac{d^2 Y}{ds^2} = -2K \left[ T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} - Y \frac{dY}{ds} - Z \frac{dZ}{ds} \right] \frac{dY}{ds} + 2KY,$$

$$f^4 = \frac{d^2 Z}{ds^2} = -2K \left[ T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} - Y \frac{dY}{ds} - Z \frac{dZ}{ds} \right] \frac{dZ}{ds} + 2KZ.$$

46

[Julio

De este sistema de ecuaciones diferenciales se deducen inmediatamente las integrales:

$$X^i \frac{dX^j}{ds} - X^j \frac{dX^i}{ds} = A^{ij} \cdot e^{-K(T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2)},$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4$$

en donde las  $A^{ij}$  son constantes de integración, y en donde

$$A^{ij} = -A^{ji}.$$

De las integrales anteriores se puede eliminar las primeras derivadas de las  $X^i$ , y se obtienen las cuatro ecuaciones:

$$A^{ij} X^k = A^{jk} X^i + A^{ki} X^j = 0,$$

$$i, j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Para que este sistema de ecuaciones lineales y homogéneas tenga soluciones distintas de la trivial  $X^i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) es condición necesaria que

$$\begin{vmatrix} 0 & A^{34} & A^{42} & A^{23} \\ A^{34} & 0 & A^{41} & A^{13} \\ A^{24} & A^{41} & 0 & A^{12} \\ A^{23} & A^{31} & A^{12} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

De la identidad:

$$\begin{vmatrix} X^1 & X^2 & X^3 & X^4 \\ \frac{dX^1}{ds} & \frac{dX^2}{ds} & \frac{dX^3}{ds} & \frac{dX^4}{ds} \\ X^1 & X^2 & X^3 & X^4 \\ \frac{dX^1}{ds} & \frac{dX^2}{ds} & \frac{dX^3}{ds} & \frac{dX^4}{ds} \end{vmatrix} = 0,$$

se deduce que:

$$0 = \begin{vmatrix} X^1 & X^2 \\ \frac{dX^1}{ds} & \frac{dX^2}{ds} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^3 & X^4 \\ \frac{dX^3}{ds} & \frac{dX^4}{ds} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X^1 & X^3 \\ \frac{dX^1}{ds} & \frac{dX^3}{ds} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^2 & X^4 \\ \frac{dX^2}{ds} & \frac{dX^4}{ds} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} X^2 & X^3 \\ \frac{dX^1}{ds} & \frac{dX^4}{ds} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^1 & X^4 \\ \frac{dX^2}{ds} & \frac{dX^3}{ds} \end{vmatrix}.$$

Esta identidad impone a las  $A^{ij}$  otra ecuación de condición, que es:

$$A^{12} A^{34} - A^{13} A^{24} + A^{14} A^{23} = 0.$$

Elijanse las  $A^{ij}$  de manera que satisfagan las dos condiciones:

$$\begin{vmatrix} 0 & A^{34} & A^{42} & A^{23} \\ A^{34} & 0 & A^{41} & A^{13} \\ A^{24} & A^{41} & 0 & A^{12} \\ A^{23} & A^{31} & A^{12} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A^{12} A^{34} - A^{13} A^{24} + A^{14} A^{23} = 0.$$

En este caso el rango de la matriz del determinante anterior es 2. Esto significa que dos de las coordenadas  $X^1, X^2, X^3, X^4$  son funciones lineales de las otras dos.

Entonces siempre es posible expresar a dos de las coordenadas espaciales, v. g.  $y$  y  $z$ , como funciones lineales de la otra coordenada espacial,  $x$ , y de la coordenada temporal  $t$ . Las partículas urgididas exclusivamente por fuerzas cósmicas describen trayectorias rectilíneas en el espacio físico, y tienen líneas de universo planas en el espacio de Minkowski.

Si se elige el sistema de coordenadas de manera que el movimiento se ejecute a lo largo del eje de las equis,  $Y$  y  $Z$  son nulas, y las ecuaciones del movimiento son entonces:

$$\frac{d^2T}{ds^2} = -2K \left( T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} \right) \frac{dT}{ds} + 2KT.$$

$$\frac{d^2X}{ds^2} = -2K \left( T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} \right) \frac{dX}{ds} + 2KX.$$

Multiplicando la primera ecuación por  $T$  y la segunda por  $X$ , y restando miembro a miembro, se obtiene:

$$T \frac{d^2T}{ds^2} - X \frac{d^2X}{ds^2} = -2K \left( T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} \right)^2 + 2K (T^2 - X^2).$$

48

[Julio

Definiendo una nueva función  $U$ :

$$U = T^2 - X^2,$$

se obtiene:

$$\frac{d^2U}{ds^2} + K \left( \frac{dU}{ds} \right)^2 - 4KU - 2 = 0.$$

La solución general de esta ecuación es:

$$s = -1/2 \int \frac{dU}{\sqrt{C^2 e^{-2KU} + U}}.$$

$C$  es una de las constantes de integración y la otra es la constante arbitraria aditiva de la integral indefinida que aparece en el segundo miembro.

La solución obtenida permite calcular inmediatamente la velocidad de una partícula sujeta únicamente a las fuerzas cósmicas.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{TX + C e^{-Ku} \sqrt{U^2 + C^2 e^{-2Ku}}}{T^2 + C^2 e^{-2Ku}}.$$

Si se supone que la partícula estaba en el origen del tiempo  $t = t_0$  en el lugar de  $x = x_0$ , entonces su velocidad era

$$\frac{dx}{dt} = C.$$

La constante de integración  $C$  es pues la velocidad de la partícula en el tiempo  $t = t_0$ .

Supongamos que del origen del tiempo  $t = t_0$  han transcurrido una enorme cantidad de segundos, y que la velocidad de la partícula es mucho menor que la de la luz; esto se puede expresar simbólicamente como sigue:

$$t \gg \gg t_0,$$

$$(t - t_0)^2 \gg \gg (x - x_0)^2,$$

$$U \gg \gg 0.$$

de 1945]

49

Si el valor de  $U$  es muy grande y si la constante cosmológica de Birkhoff es positiva entonces:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

Suponiendo que en el origen del tiempo  $t = t_0$  se encuentran varias partículas en la vecindad de un punto  $x = x_0$ , entonces tendrán, después de transcurrido el intervalo temporal  $T = t - t_0$ , velocidades  $\frac{dx}{dt}$  proporcionales a sus distancias  $X = x - x_0$  de ese punto.

La relación entre la velocidad de una partícula y su distancia es en este caso:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{T} X.$$

La distribución de galaxias en el universo obedece a esta ley. Si se coloca el punto  $x = x_0$  en nuestra galaxia entonces  $X = x - x_0$  significa la distancia de otra galaxia a la nuestra;  $\frac{dx}{dt}$  es su velocidad de recesión y  $\frac{1}{T}$  es la constante de Hubble. Es perfectamente lícito considerar que entre galaxias sólo operan las fuerzas cósmicas y que las fuerzas gravitacionales son despreciables. Entouces se llega de un modo inmediato a la conclusión que el recíproco de la constante de Hubble es el tiempo transcurrido desde  $t_0$ , en que las galaxias se encontraban en la vecindad del punto  $x = x_0$  y el instante actual. A este intervalo se le llama la edad del universo. En nuestro caso se obtiene:

$$T = 1860 \cdot 10^6 \text{ años.}$$

Hay que señalar que según los resultados que hemos obtenido el corrimiento hacia el rojo observado por los astrónomos en los espectros de las galaxias lejanas se debe en parte a la velocidad de recesión de las mismas y en parte al efecto de las fuerzas cósmicas sobre los fotones durante el trayecto que éstos siguen de la galaxia lejana a la nuestra. Es muy fácil de calcular el efecto total de energía debido a las dos degradaciones que esta

sufre. Estos resultados afectan a la distribución de la densidad de galaxias en la metagalaxia. Próximamente publicaremos las correcciones que hay que hacer a las densidades calculadas actualmente.

#### BIBLIOGRAFIA

- (1) GEORGE D. BIRKHOFF.—*El Concepto Matemático de Tiempo y la Gravitación*. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Vol. 1. Nos. 4 y 5, página 12.
- (2) CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ.—*El Movimiento de los Dos Cuerpos en la Teoría de Birkhoff*. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Vol. 1. Nos. 4 y 5, páginas 25-41.
- (3) ANTONIO ROMERO JUÁREZ.—*El Problema Restringido de los Tres Cuerpos en la Teoría de Birkhoff*. Trabajo hecho en el Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. (Inédito.)
- (4) FERNANDO ALBA ANDRADE.—*El Campo Gravitacional de una Esfera en Rotación en la Teoría de Birkhoff*. Trabajo ejecutado en el Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. (Este número, pág. 57.)
- (5) ALBERTO BARAJAS CELIS, GEORGE D. BIRKHOFF, CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ Y MANUEL SANDOVAL VALLARTA.—*On Birkhoff's New Theory of Gravitation*. Physical Review, vol. 66, nos 5 y 6, páginas 138-143.
- (6) GEORGE D. BIRKHOFF.—*Locus cictatus* (1), página 13. Ecuación (7).

México, D. F. mayo de 1945  
Instituto de Matemáticas de la U. N. A.

PRINCIPIOS DE CONSERVACION EN LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE  
BIRKHOFF\*.

Carlos Graef Fernández

En este trabajo se demuestra que en el movimiento de una partícula exploradora en el campo gravitacional Birkhoffiano debido a una masa fija en un sistema inercial, hay dos invariantes; uno de ellos es semejante a la energía de la Teoría de la Gravitación de Newton; el otro se parece al momento de la cantidad de movimiento. A la masa fija le llamamos: Sol; a la partícula exploradora: planeta. Coloquemos al Sol permanentemente en el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

El planeta describe una trayectoria colocada totalmente en un plano apoyado en Sol<sup>(1)</sup>. Conviene elegir al plano de la trayectoria como plano coordenado XOY. El espacio físico consiste en este caso de ese plano. Birkhoff<sup>(2)</sup> utiliza en su Teoría de la Gravitación el espacio-tiempo de Minkowski que tiene por cuadrado de la diferencial de arco a:

---

\* Presentado en la V Asamblea de Matemáticas. Mérida, Septiembre de 1948.

8

$$(1) \quad ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 .$$

Las ecuaciones del movimiento del planeta en el espacio-tiempo de Minkowski<sup>(3)</sup> son:

$$(2) \quad \begin{aligned} x'' &= -\frac{M_{\odot}x}{r^3} - \frac{2M_{\odot}x}{r^3} (x'^2 + y'^2) + \frac{M_{\odot}x'r'}{r^2} , \\ y'' &= -\frac{M_{\odot}y}{r^3} - \frac{2M_{\odot}y}{r^3} (x'^2 + y'^2) + \frac{M_{\odot}y'r'}{r^2} . \end{aligned}$$

En estas ecuaciones designamos con un acento la derivada con respecto a  $s$ ;  $r$  es el radio vector del planeta.  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .  $M_{\odot}$  es la masa del Sol. Sea  $M_p$  la masa en reposo del planeta. De las ecuaciones (2) obtenemos, por medio de una multiplicación por  $M_p$ , las que expresan a las fuerzas de Minkowski.

$$(3) \quad \begin{aligned} M_p x'' &= -\frac{M_{\odot} M_p}{r^3} x - 2 \frac{M_{\odot} M_p}{r^3} x (x'^2 + y'^2) + \frac{M_{\odot} M_p}{r^2} x'r' , \\ M_p y'' &= -\frac{M_{\odot} M_p}{r^3} y - 2 \frac{M_{\odot} M_p}{r^3} y (x'^2 + y'^2) + \frac{M_{\odot} M_p}{r^2} y'r' . \end{aligned}$$

Si se multiplican ambos miembros de la primera de las dos ecuaciones (3) por  $x'$ , ambos miembros de la segunda por  $y'$ , y si se suman miembro a miembro las dos ecuaciones resultantes, se obtiene:

$$(4) \quad M_p (x'x'' + y'y'') = - \frac{M_\odot M_p}{r^2} [1 + x'^2 + y'^2] r' .$$

Divídanse ambos miembros de (4) entre  $[1 + x'^2 + y'^2]$ .

$$(5) \quad M_p \frac{x'x'' + y'y''}{1 + x'^2 + y'^2} = - \frac{M_\odot M_p r'}{r^2} .$$

Por integración se obtiene:

$$(6) \quad \frac{1}{2} M_p \ln [1 + x'^2 + y'^2] = \frac{M_\odot M_p}{r} + E .$$

$E$  es una constante de integración. Despéjese a  $E$  de (6):

$$(7) \quad E = - \frac{M_\odot M_p}{r} + \frac{1}{2} M_p \ln [1 + x'^2 + y'^2] .$$

Los siguientes desarrollos tienen por objeto expresar a  $[1 + x'^2 + y'^2]$  en términos de la velocidad  $v$  del planeta.

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 .$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dt}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 - v^2 .$$

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{1}{1 - v^2} .$$

10

$$1 + x'^2 + y'^2 = \frac{ds^2 + dx^2 + dy^2}{ds^2} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 .$$

$$1 + x'^2 + y'^2 = \frac{1}{1 - v^2} .$$

Substituyendo esta última expresión en (7) se obtiene:

$$(8) \quad E = - \frac{M_{\odot} M_p}{r} + \frac{1}{2} M_p \ln \left[ \frac{1}{1 - v^2} \right] .$$

$E$  es una constante en el movimiento Birkhoffiano del planeta en torno del Sol. El término  $-\frac{M_{\odot} M_p}{r}$  es exactamente igual a la energía potencial clásica del planeta en el campo gravitacional del Sol. El término  $\frac{1}{2} M_p \ln \left[ \frac{1}{1 - v^2} \right]$  depende exclusivamente de la masa en reposo del planeta y de su velocidad.

Este término desempeña el papel de la energía cinética.

Llamemos  $V$  a la energía potencial Newtoniana del planeta:

$$(9) \quad V = - \frac{M_{\odot} M_p}{r} .$$

Designemos con  $T_B$  a la expresión:

$$(10) \quad T_B = \frac{M_p}{2} \ln \left[ \frac{1}{1 - v^2} \right] .$$

Llamemos  $T$  a la energía cinética clásica.

$$(11) \quad T = \frac{1}{2} M_p v^2 .$$

En la Teoría de Birkhoff se conserva:

$$(12) \quad E = v + T_B .$$

Como  $v$  es siempre menor que 1, se puede desarrollar  $T_B$  en una serie convergente de potencias de  $v$ :

$$(13) \quad T_B = \frac{1}{2} M_p \left[ v^2 + \frac{v^4}{2} + \frac{v^6}{3} + \frac{v^8}{4} + \dots \right] .$$

La diferencia entre la energía cinética Birkhoffiana y la clásica es la serie convergente:

$$(14) \quad T_B - T = \frac{1}{2} M_p \left[ \frac{v^4}{2} + \frac{v^6}{3} + \frac{v^8}{4} + \dots \right] .$$

Para las velocidades de los planetas conocidos y demás partículas exploradoras del sistema solar,  $T_B - T$  es prácticamente nula.

En las ecuaciones (2) cambiamos la variable independiente  $s$  por el tiempo  $t$ .

Se obtienen las ecuaciones (15):

12

$$\ddot{x} = -\frac{M_{\odot} x}{r^3} + \frac{M_{\odot} x}{r^3} \dot{x}^2 - \frac{M_{\odot} y}{r^3} \dot{y}^2 + \frac{2 M_{\odot} y}{r^3} \dot{x}\dot{y} ,$$

(15)

$$\ddot{y} = -\frac{M_{\odot} y}{r^3} + \frac{M_{\odot} y}{r^3} \dot{y}^2 - \frac{M_{\odot} x}{r^3} \dot{x}^2 + \frac{2 M_{\odot} x}{r^3} \dot{x}\dot{y} .$$

El punto designa la derivada con respecto al tiempo.

Multiplíquense ambos miembros de la primera de las ecuaciones (15) por  $-y$ , ambos miembros de la segunda por  $x$ , y sùmese miembro a miembro.

$$(16) \quad x \ddot{y} - \dot{x} \dot{y} = \frac{2 M_{\odot}}{r^3} \left[ xy (\dot{y}^2 - \dot{x}^2) + (x^2 - y^2) \dot{x}\dot{y} \right] .$$

El segundo miembro (16) puede descomponerse en factores:

$$(17) \quad x \ddot{y} - \dot{x} \dot{y} = \frac{2 M_{\odot}}{r^3} [\dot{x}\dot{y} - \dot{x}y] [x\dot{x} + y\dot{y}] .$$

Divídanse ambos miembros de (17) entre  $[\dot{x}\dot{y} - \dot{x}y]$

$$(18) \quad \frac{x\ddot{y} - \dot{x}\dot{y}}{\dot{x}\dot{y} - \dot{x}y} = \frac{2 M_{\odot} [x\dot{x} + y\dot{y}]}{r^3} .$$

Por medio de una integración obtenemos, a partir de la ecuación (18):

$$(19) \quad \ln (\dot{x}\dot{y} - \dot{x}y) = -\frac{2 M_{\odot}}{r} + \ln k ;$$

ln k es una constante de integración.

De la ecuación (19) se obtiene como consecuencia inmediata la (20):

$$(20) \quad x\dot{y} - \dot{x}y = k e^{-\frac{2M_{\odot}}{r}} .$$

Consideremos otra vez la ecuación (8) en su siguiente forma:

$$(8) \quad \frac{2E}{M_p} = -\frac{2M_{\odot}}{r} + \ln \frac{1}{1-v^2} .$$

Una consecuencia inmediata de la (8) es:

$$(21) \quad e^{-\frac{2M_{\odot}}{r}} = e^{\frac{2E}{M_p}} (1-v^2) .$$

Multipliquemos ambos miembros de (20) por  $M_p$ , y eliminemos de la ecuación resultante y de (21) a la masa del sol.

$$(22) \quad M_p (x\dot{y} - \dot{x}y) = k M_p e^{\frac{2E}{M_p}} (1-v^2) .$$

Llamemos H a la constante:

$$(23) \quad H = k M_p e^{\frac{2E}{M_p}} ,$$

y despejémosla de (22):

14

$$(24) \quad H = \frac{M_p}{1 - v^2} (\dot{x}y - \dot{y}x) .$$

H es un invariante en el movimiento del planeta en torno del Sol en la Teoría de Birkhoff. Este invariante merece el nombre de momento de la cantidad de movimiento.

Instituto de Física.

#### B I B L I O G R A F I A .

- (1) G.D. Birkhoff. El Concepto Matemático de Tiempo y la Gravitación. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Vol. 1, Nos. 4 y 5. Pag. 18.
- (2) Locus Citatus. Pag. 10.
- (3) Locus Citatus. Pag. 18.

CAMPO GRAVITACIONAL DE BIRKHOFF DE UN PUNTO MASA EN MOVIMIENTO ARBITRARIO  
 TRÁJICO EN LA TEORÍA DE BIRKHOFF.

Carlos Graef Ferrández.

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México

(Recibido: Diciembre 15, 1951)

RESUMEN.

*En este artículo se obtiene el campo gravitacional de Birkhoff generado por un punto masa en movimiento arbitrario. En el espaciotiempo de Minkowski este campo es un tensor doblemente covariante proporcional a la masa que lo genera. Es también proporcional a una combinación lineal del tensor métrico fundamental y del tensor cuadrático en las componentes covariantes del cuadrivector velocidad retardada. Es además inversamente proporcional a la distancia del acontecimiento en que se calcula al soporte del cuadrivector velocidad retardada del punto masa con respecto a ese acontecimiento. El campo satisface la ecuación fundamental de Birkhoff ya que su D'Alembertiano es nulo, y se reduce al campo central cuando la velocidad es nula.*

1. El Marco de Referencia de la Teoría.

Birkhoff<sup>1</sup> utiliza en su teoría de la gravitación el espaciotiempo llano de Minkowski que es también el marco de referencia de la teoría de la relatividad especial de Einstein. El cuadrado del

elemento de arco de ese espacio-tiempo es:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \quad (1)$$

Aquí  $t$  significa el tiempo medido en segundos; las literales  $x, y, z$  son las coordenadas cartesianas del lugar en que ocurrió el acontecimiento, medidas en segundos-luz. Con estas unidades la velocidad de la luz es igual a uno. El marco de referencia  $t, x, y, z$  es un marco de referencia inercial.

En muchas ocasiones es conveniente utilizar la notación tensorial para expresar el cuadrado del elemento de arco. En esta notación se escribe:

$$x^1 = t, \quad x^2 = x; \quad x^3 = y; \quad x^4 = z . \quad (2)$$

El tensor métrico fundamental<sup>2</sup> se designa con  $\Delta_{ij}$ , sus componentes son:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} = 1, \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1; \\ \Delta_{ij} = 0 \quad \text{cuando } i \neq j . \end{aligned} \quad (3)$$

El cuadrado del elemento de arco se expresa con esta notación como sigue:

$$ds^2 = \Delta_{ij} dx^i dx^j . \quad (4)$$

En este trabajo los índices latinos pueden adquirir los valores 1, 2, 3, 4. Siguiendo a Einstein utilizamos la convención, de que una expresión con un índice latino repetido significa la suma de los cuatro valores que adquiere esa expresión al recorrer el índice la lista 1, 2, 3, 4.

## 2. Las Transformaciones de la Teoría.

Las transformaciones que dejan invariante la forma del cuadrado del elemento de arco (4) forman el grupo general de Lorentz. Es-

tas transformaciones son del tipo:

$$\bar{x}^i = a_j^i x^j + b^i . \quad (5)$$

Aquí las  $a_j^i$  y las  $b^i$  son constantes. Las  $b^i$  son enteramente arbitrarias, pero las  $a_j^i$  satisfacen las ecuaciones de condición:

$$\Delta_{ij} a_m^i a_n^j = \Delta_{mn} . \quad (6)$$

En una transformación (5) en que las  $a_j^i$  satisfacen las ecuaciones de condición (6), el cuadrado del elemento de arco (4) se transforma en

$$ds^2 = \Delta_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j .$$

El grupo general de Lorentz tiene un subgrupo que se utiliza de preferencia en la relatividad especial. Las transformaciones de este subgrupo son de la forma:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \frac{x^1 - vx^2}{\sqrt{1-v^2}} , & \bar{x}^2 &= \frac{x^2 - vx^1}{\sqrt{1-v^2}} , \\ \bar{x}^3 &= x^3 , & \bar{x}^4 &= x^4 \end{aligned} \quad (7)$$

Aquí  $|v| < 1$ . La transformación (7) tiene un significado físico muy simple: el sistema  $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$  se mueve con respecto al sistema  $x^2, x^3, x^4$  con la velocidad constante  $v$ ; los dos sistemas coinciden en el instante  $x^1 = \bar{x}^1 = 0$ ; el eje de las  $\bar{x}^2$  se desliza a lo largo del eje de las  $x^2$ ; el eje  $\bar{x}^3$  permanece paralelo al eje  $x^3$ ; el eje  $\bar{x}^4$  permanece paralelo al eje  $x^4$ . Designaremos con  $L(v)$  a la transformación definida por (7), que como se ve está completamente caracterizada por la velocidad  $v$ .

Otro subgrupo del grupo general de Lorentz es el de las rotaciones rígidas. En las transformaciones de este subgrupo  $\bar{x}^1 = x^1$ , y el sistema cartesiano  $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$  se obtiene del sistema  $x^2, x^3, x^4$

por medio de una rotación rígida. Aquí, los dos sistemas cartesianos tienen distinta orientación, y están en reposo uno con respecto al otro. Llamaremos  $R$  a una rotación rígida.

Consideraremos ahora una subfamilia del grupo general de Lorentz. Los miembros de la subfamilia se definen como sigue:

$$R^{-1} L(v) R. \quad (8)$$

Aquí  $R^{-1}$  es la recíproca de la rotación  $R$ , y  $L(v)$  es la transformación (7). En una transformación del tipo (8) el sistema  $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$  se está moviendo en el sistema  $x^2, x^3, x^4$  con una velocidad constante; esta velocidad se caracteriza por medio del vector  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ . La transformación (8) queda completamente definida por los tres parámetros  $v^x, v^y, v^z$ . Los orígenes de los sistemas  $x^2, x^3, x^4$  y  $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$  coinciden en el instante  $x^1 = \bar{x}^1 = 0$ .

Para escribir explícitamente las ecuaciones de la transformación (8) es útil hacer las siguientes convenciones:

- 1) Un índice griego adquiere los valores 2,3,4.
- 2) El símbolo  $v^\alpha$  significa  $v^x$  para  $\alpha = 2$ ; el símbolo  $v^\alpha$  significa  $v^y$  para  $\alpha = 3$ ; el símbolo  $v^\alpha$  significa  $v^z$  para  $\alpha = 4$ .
- 3) Una expresión en la que aparece un índice griego repetido significa la suma de los tres valores que adquiere esa expresión al recorrer el índice la lista 2,3,4.

Con estas convenciones se obtienen para las ecuaciones<sup>3</sup> de la transformación (8).

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} x^1 - \frac{v^\beta x^\beta}{\sqrt{1-v^2}} \\ \bar{x}^\alpha &= -\frac{v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}} x^1 + \left[ \delta_{\beta}^{\alpha} + \frac{v^\alpha v^\beta (1-\sqrt{1-v^2})}{\sqrt{1-v^2}} \right] x^\beta \end{aligned} \quad (9)$$

Aquí  $v^2 = (v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2$ ;  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  es la delta de Kronecker.

Si se escribe:

$$q = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (10)$$

se obtiene para la matriz de la transformación (9):

$$\|a_j^i\| = \begin{vmatrix} q & -qv^x & -qv^y & -qv^z \\ -qv^x & 1 + \frac{q-1}{v^2} v^x v^x & \frac{q-1}{v^2} v^x v^y & \frac{q-1}{v^2} v^x v^z \\ -qv^y & \frac{q-1}{v^2} v^x v^y & 1 + \frac{q-1}{v^2} v^y v^y & \frac{q-1}{v^2} v^y v^z \\ -qv^z & \frac{q-1}{v^2} v^x v^z & \frac{q-1}{v^2} v^y v^z & 1 + \frac{q-1}{v^2} v^z v^z \end{vmatrix} \quad (11)$$

### 3. Campo Gravitacional de un Punto Masa en Movimiento Uniforme.

En la nueva formulación de la teoría de la gravitación de Birkhoff, debida a A. Barajas y al autor, se postula el campo gravitacional de un punto masa en reposo en el origen de coordenadas de un sistema inercial. Sea  $r$  la distancia del punto  $x, y, z$  del espacio físico, al punto de masa  $M$  colocado en el origen.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} \quad (12)$$

El tensor gravitacional de Birkhoff<sup>4</sup> que describe el campo de ese punto masa es:

$$\|h_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M}{r} \end{vmatrix} \quad (13)$$

Usando la delta de Kronecker, (13) se puede escribir como:

$$h_{ij} = \frac{M}{r} \delta_{ij} \quad (14)$$

El tensor del campo gravitacional debido a un punto masa que se mueve con un vector velocidad constante  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$  y que pasa por el origen en el instante  $x^i=0$ , se calcula aplicándole a (14) la transformación inversa de (9) cuya matriz se obtiene de (11) cambiándoles de signo a las componentes de la velocidad.

El tensor del campo gravitacional de un punto masa tal, tiene por expresión:

$$\|h_{ij}\| = \frac{M}{r} \begin{vmatrix} \frac{1+v^2}{1-v^2} & -\frac{2v^x}{1-v^2} & -\frac{2v^y}{1-v^2} & -\frac{2v^z}{1-v^2} \\ -\frac{2v^x}{1-v^2} & 1 + \frac{2v^x v^x}{1-v^2} & \frac{v^x v^y}{1-v^2} & \frac{v^x v^z}{1-v^2} \\ -\frac{2v^y}{1-v^2} & \frac{v^x v^y}{1-v^2} & 1 + \frac{2v^y v^y}{1-v^2} & \frac{v^y v^z}{1-v^2} \\ -\frac{2v^z}{1-v^2} & \frac{v^x v^z}{1-v^2} & \frac{v^y v^z}{1-v^2} & 1 + \frac{2v^z v^z}{1-v^2} \end{vmatrix} \quad (15)$$

Conviene introducir las cuatro componentes  $v^1, v^2, v^3, v^4$  del cuadrivector velocidad de Minkowski, que se definen como sigue:

$$v^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v^2 = \frac{v^x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v^3 = \frac{v^y}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v^4 = \frac{v^z}{\sqrt{1-v^2}} \quad (16)$$

Nota: El símbolo  $v^2$  significa algunas veces el cuadrado de la velocidad y otras la segunda componente del cuadrivector velocidad de Minkowski; es fácil distinguir entre los dos significados.

Las componentes covariantes del cuadrivector velocidad de Minkowski se obtienen de las componentes contravariantes siguiendo el procedimiento de bajar un índice:

$$v_i = \Delta_{ij} v^j \quad . \quad (17)$$

La ecuación (17) se descompone en las cuatro siguientes:

$$v_1 = v^1, \quad v_2 = -v^2, \quad v_3 = -v^3, \quad v_4 = -v^4. \quad (18)$$

El campo gravitacional de un punto masa en movimiento uniforme se puede expresar de un modo muy sencillo en términos de las componentes covariantes del cuadrivector velocidad de Minkowski:

$$h_{ij} = \frac{M}{r} (2v_i v_j - \Delta_{ij}) \quad . \quad (19)$$

En la fórmula (19)  $r$  significa la distancia entre el punto masa  $M$  y el punto del espacio físico en el que se calculan las componentes del tensor del campo; esta distancia  $r$  está medida en el marco de referencia inercial en el que el punto masa  $M$  está en reposo. Conviene expresar todas las cantidades que intervienen en (19) en el marco de referencia inercial en el que están medidas las  $h_{ij}$  del primer miembro; esto, es en el marco inercial en que el punto masa  $M$  se mueve con el vector velocidad  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ . Sean ahora  $(x, y, z)$  las coordenadas del punto del espacio en el que se calculan las componentes del campo  $h_{ij}$  en el instante  $t$ ; el tiempo  $t$  y las coordenadas  $x, y, z$  pertenecen al marco de referencia inercial en el que  $M$  se mueve con el vector velocidad  $\vec{v}$ . Aplicando la transformación inversa de la (9) a las coordenadas espaciales y al tiempo, se obtiene que la  $r$  de la fórmula (19):

$$r = \frac{\sqrt{(t - xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}}{\sqrt{1 - v^2}} \quad . \quad (20)$$

Combinando (19) con (20) se obtiene:

$$h_{ij} = \frac{M \sqrt{1-v^2} (2 v_i v_j - \Delta_{ij})}{\sqrt{(t-xv^x-yv^y-zv^z)^2 + (1-v^2)(x^2+y^2+z^2-t^2)}} \quad (21)$$

La fórmula (21) expresa el tensor potencial gravitacional en el instante  $t$ , en el punto  $x, y, z$  debido a un punto masa  $M$  que pasa por el origen en el instante  $t = 0$ , y que se mueve con el vector velocidad constante  $\vec{v} = v^x, v^y, v^z$ .

#### 4. Potenciales Gravitacionales Retardados.

El tensor potencial gravitacional (21) se puede escribir en una forma más adecuada para los desarrollos ulteriores, si se utilizan algunas relaciones de la teoría de los potenciales retardados<sup>5</sup> que se deducen a continuación. Supóngase una fuente puntual  $F$  que emite un efecto físico que se transmite con la velocidad de la luz; en el sistema de unidades que usamos, esta velocidad es igual a uno. Sean  $\xi^2 = \xi$ ,  $\xi^3 = \eta$  y  $\xi^4 = \zeta$  las coordenadas de la fuente  $F$ . Si la fuente  $F$  está en movimiento en el marco de referencia inercial que estamos usando, entonces sus coordenadas son funciones del tiempo:

$$\xi^a = \xi^a(t) : \quad \xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \zeta = \zeta(t). \quad (22)$$

Considérese ahora el punto  $P(x, y, z)$  del espacio físico del marco de referencia inercial. Sean  $\underline{\xi}^2 = \underline{\xi}$ ,  $\underline{\xi}^3 = \underline{\eta}$ ,  $\underline{\xi}^4 = \underline{\zeta}$  las coordenadas de la posición de la fuente  $F$  en el instante  $\underline{\xi}^1 = \underline{t}$ , en el que salió el efecto físico que llega a  $P$  en el instante  $t$ . A  $\underline{\xi}^1 = \underline{t}$  se le llama tiempo retardado de la fuente  $F$  con respecto al punto  $P$  en el instante  $t$ ; a las coordenadas  $\underline{\xi}^2 = \underline{\xi}$ ,  $\underline{\xi}^3 = \underline{\eta}$ ,  $\underline{\xi}^4 = \underline{\zeta}$ , se les llama coordenadas retardadas de  $F$  con respecto al punto  $P$  en el instante  $t$ .

Consideremos ahora una fuente  $F$  que se mueve en el marco de referencia inercial con el vector velocidad constante  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ . Supongamos que  $F$  pasa por el origen del sistema de coordenadas en

el instante  $t = 0$ . Las ecuaciones del movimiento de  $F$  son entonces:

$$\xi^2 = \xi = v^x t, \quad \xi^3 = \eta = v^y t, \quad \xi^4 = \zeta = v^z t. \quad (23)$$

Para la posición retardada de  $F$  con respecto a  $P$  en el instante  $t$  se tiene:

$$\underline{\xi} = v^x \underline{t}, \quad \underline{\eta} = v^y \underline{t}, \quad \underline{\zeta} = v^z \underline{t}. \quad (24)$$

La distancia entre la posición retardada de  $F$  y  $P$  se llama distancia retardada, y se designa con  $r$ .

$$r = \sqrt{(x - \underline{\xi})^2 + (y - \underline{\eta})^2 + (z - \underline{\zeta})^2}. \quad (25)$$

Como el efecto emitido por  $F$  se propaga con la velocidad uno, el tiempo  $t - \underline{t}$  que ese efecto tarda en llegar de  $F$  a  $P$  es igual a la distancia retardada  $r$ .

$$t - \underline{t} = r. \quad (26)$$

De (24), (25) y (26) se obtiene:

$$t - \underline{t} = \sqrt{(x - v^x \underline{t})^2 + (y - v^y \underline{t})^2 + (z - v^z \underline{t})^2}. \quad (27)$$

Despejando  $\underline{t}$  de la ecuación (27), teniendo en cuenta que  $\underline{t} < t$ , se obtiene:

$$\underline{t} = \frac{(t - xv^x - yv^y - zv^z) - \sqrt{(t - xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}}{1 - v^2}. \quad (28)$$

De (26) y (28) se obtiene para la distancia retardada  $r$ :

$$r = \frac{(xv^x + yv^y + zv^z - v^2 t) + \sqrt{(t - xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}}{1 - v^2}. \quad (29)$$

Considérese el vector  $\vec{r}$  que tiene por origen a la fuente  $F$  en su posición retardada, y por extremo al punto  $P$ .

$$\vec{r} = (x-v^x t, y-v^y t, z-v^z t) \quad (30)$$

Fórmese el producto escalar del vector  $\vec{r}$  y del vector constante  $\vec{v}$ ; se obtiene:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = xv^x + yv^y + zv^z - v^2 t \quad (31)$$

Substituyendo (28) en (31) resulta:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \frac{-v^2 t + (xv^x + yv^y + zv^z) + v^2 \sqrt{(t-xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1-v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}}{1-v^2} \quad (32)$$

Calculemos ahora la expresión:

$$r - \vec{r} \cdot \vec{v} = \sqrt{(t-xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1-v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)} \quad (33)$$

La fórmula (33) se dedujo para una fuente  $F$  que emite un efecto físico que se propaga con la velocidad de la luz;  $F$  se mueve con un vector velocidad constante  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ , y pasa por el origen del sistema de coordenadas del marco de referencia inercial en el instante  $t = 0$ . Como en la teoría de la gravitación de Birkhoff se supone que los efectos gravitacionales se propagan con la velocidad de la luz, el punto masa de la fórmula (21) está en las condiciones de la fuente  $F$ . Aplicando (33) a la fórmula (21), se obtiene:

$$h_{ij} = \frac{M \sqrt{1-v^2} [2v_i v_j - \Delta_{ij}]}{r - \vec{r} \cdot \vec{v}} \quad (34)$$

El tensor gravitacional  $h_{ij}$  de la fórmula (34) está calculado en el instante  $t$  en el punto  $(x, y, z)$ ; se debe a un punto masa  $M$  que se mueve con el vector velocidad constante  $\vec{v} = v^x, v^y, v^z$ ; la

distancia  $r$  es la distancia retardada del punto masa, al punto P; el vector  $\vec{r}$  es el que tiene por origen la posición retardada del punto masa, y por extremo el punto P;  $v_1, v_2, v_3, v_4$  son las componentes covariantes del cuadvivector de Minkowski; se obtienen de las componentes del vector  $\vec{v}$  como sigue:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v_2 = -\frac{v^x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v_3 = -\frac{v^y}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v_4 = -\frac{v^z}{\sqrt{1-v^2}}.$$

De este examen se ve que la fórmula (34) es independiente de que el punto masa pase o no por el origen.

Como (34) se dedujo para un punto masa en movimiento uniforme,  $v$  es constante y  $v^x, v^y, v^z, v_1, v_2, v_3, v_4$  son constantes. Si se designa con  $\vec{v}$  al vector velocidad retardado del punto masa, o sea el vector velocidad de este punto para el tiempo retardado  $t$ , se obtiene:

$$\vec{v} = \vec{v}; \quad \underline{v}^x = v^x, \quad \underline{v}^y = v^y, \quad \underline{v}^z = v^z;$$

$$\underline{v}_1 = v_1, \quad \underline{v}_2 = v_2, \quad \underline{v}_3 = v_3, \quad \underline{v}_4 = v_4;$$

$$\underline{v} = v.$$

La fórmula (34) puede escribirse entonces como:

$$h_{ij} = \frac{M \sqrt{1-v^2} [2\underline{v}_i \underline{v}_j - \Delta_{ij}]}{r - \vec{r} \cdot \vec{v}}. \quad (35)$$

La fórmula (35) es susceptible de generalización<sup>6</sup>. No interviene en ella sino el vector velocidad  $\vec{v}$  retardado del punto masa, y el vector  $\vec{r}$  que une la posición retardada del punto masa, con el punto P en el que se calcula  $h_{ij}$ . Con las seis componentes de esos dos vectores y la masa  $M$  se obtienen las 16 componentes de  $h_{ij}$ . Todas las cantidades que se refieren al punto masa

aparecen retardadas.

### 5. Campo Gravitacional de un Punto Masa en Movimiento Arbitrario

Conviene introducir el concepto de "campo gravitacional instantáneo" generado por el punto masa  $M$  al pasar por el punto  $F(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\zeta})$  del espacio físico en el instante  $\tau$ . Consideremos un punto  $P(x, y, z)$  del espacio físico. El efecto gravitacional generado por  $M$  al pasar por  $F$  llega a  $P$  en el instante  $t$ :

$$t = \tau + \sqrt{(x-\underline{\xi})^2 + (y-\underline{\eta})^2 + (z-\underline{\zeta})^2} \quad (36)$$

Si  $M$  se está moviendo con el vector velocidad constante  $(\underline{v}^x, \underline{v}^y, \underline{v}^z)$  al pasar por  $F$ , entonces el campo gravitacional  $h_{ij}$  calculado en  $P(x, y, z)$  en el instante  $t$  (36), está dado por la fórmula (35). Definimos como "campo gravitacional instantáneo" generado por el punto masa  $M$  al pasar por  $F(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\zeta})$  en el instante  $\tau$ , al que se calcula según (35).

Si se generaliza la fórmula (35) al caso del campo de un punto masa en movimiento arbitrario, se está asentando el siguiente postulado:

*Postulado.* El campo gravitacional instantáneo generado por un punto masa es independiente de su aceleración.

El campo gravitacional para todos los tiempos, de un punto masa en movimiento arbitrario, es el conjunto de los campos gravitacionales instantáneos generados por ese punto masa en todas sus posiciones. El campo está dado por la fórmula (35)

Esta expresión del campo es compatible con la ecuación fundamental de la teoría de Birkhoff<sup>7</sup> para el campo gravitacional en el espacio vacío, que es

$$\square h_{ij} = 0 \quad (37)$$

Aquí " $\square$ " es el operador de D'Alembert.

En la teoría de los potenciales retardadas se establece el he

cho notable que la función:

$$\frac{f(\underline{t})}{\underline{r} - \vec{\underline{E}} \cdot \vec{\underline{v}}} \quad (39)$$

satisface la ecuación

$$\square \frac{f(\underline{t})}{\underline{r} - \vec{\underline{E}} \cdot \vec{\underline{v}}} = 0 \quad (39)$$

Aquí  $\underline{t}$  es el tiempo retardado del punto masa con respecto a  $P(x, y, z)$  y al instante  $t$ . La función  $f$  es una función que tiene primera y segunda derivada continuas. Se ve claramente que las componentes de  $h_{ij}$  en (35) son del tipo (39).

La fórmula (35) admite una simplificación considerable. Recordando que  $\underline{r} = t - \underline{t}$  según (28), y recordando que las componentes del vector  $\vec{\underline{E}}$  son  $(x-\underline{\xi}, y-\underline{\eta}, z-\underline{\zeta})$ , se obtiene:

$$h_{ij} = \frac{M \sqrt{1-\underline{v}^2} [2v_i v_j - \Delta_{ij}]}{(t-\underline{t}) - (x-\underline{\xi})\underline{v}^x - (y-\underline{\eta})\underline{v}^y - (z-\underline{\zeta})\underline{v}^z} \quad (40)$$

Introduciendo el lenguaje de cuadvectores, se puede escribir:

$$\begin{aligned} t-\underline{t} &= x^1 - \underline{\xi}^1, & x-\underline{\xi} &= x^2 - \underline{\xi}^2, & y-\underline{\eta} &= x^3 - \underline{\xi}^3, \\ & & z-\underline{\zeta} &= x^4 - \underline{\xi}^4; \\ \underline{v}^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\underline{v}^2}}, & \underline{v}^2 &= \frac{\underline{v}^x}{\sqrt{1-\underline{v}^2}}, & \underline{v}^3 &= \frac{\underline{v}^y}{\sqrt{1-\underline{v}^2}}, \\ & & \underline{v} &= \frac{\underline{v}^a}{\sqrt{1-\underline{v}^2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

La expresión (40) se convierte en:

$$h_{ij} = \frac{M (2v_i v_j - \Delta_{ij})}{\Delta_{mn} (x^m - \xi^m) v^n} \quad (42)$$

El denominador de (42) tiene una interpretación geométrica sencilla en el espacio-tiempo. Las cuatro coordenadas  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  se refieren al acontecimiento  $A$  en el que se calcula el tensor  $h_{ij}$ . Las cuatro coordenadas  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$  son del acontecimiento retardado en la línea de universo del punto masa, con respecto a  $A$ . Las diferencias

$$(x^1 - \xi^1, \quad x^2 - \xi^2, \quad x^3 - \xi^3, \quad x^4 - \xi^4)$$

son las componentes del cuadrivector que une el acontecimiento retardado del punto masa con el acontecimiento  $A$ . Como el cuadrivector velocidad es unitario en el espacio tiempo, la expresión

$$\Delta_{mn} (x^m - \xi^m) v^n \quad (43)$$

es la proyección del cuadrivector  $(x^m - \xi^m)$  sobre el cuadrivector velocidad.

Consideremos un acontecimiento  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . Ese acontecimiento está compuesto del instante  $x^1$  y del punto  $(x^2, x^3, x^4)$  del espacio físico. Hay para ese punto  $(x^2, x^3, x^4)$  y para ese instante  $x^1$  un tiempo retardado  $\xi^1$ , y una posición retardada  $(\xi^2, \xi^3, \xi^4)$  del punto masa. Estas cuatro coordenadas  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$  definen el acontecimiento retardado  $g$  en la línea de universo del punto masa, con respecto al acontecimiento  $A$ . Las componentes del cuadrivector  $gA$  son:

$$gA = (x^1 - \xi^1, \quad x^2 - \xi^2, \quad x^3 - \xi^3, \quad x^4 - \xi^4). \quad (44)$$

Las componentes del cuadrivector velocidad retardada de Minkowski del punto masa en  $g$ , son:

$$\underline{v}^i = (\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^3, \underline{v}^4) \quad (45)$$

El denominador de (42) es la proyección del cuadrivector  $\underline{a}$  sobre el cuadrivector velocidad retardada de Minkowski.

Tracemos por  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$  un hiperplano perpendicular al cuadrivector velocidad retardada de Minkowski  $(\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^3, \underline{v}^4)$  que es unitario. La ecuación de este hiperplano es:

$$\Delta_{mn} (X^m - x^m) \underline{v}^n = 0. \quad (46)$$

Aquí  $X^m$  son las coordenadas corrientes del hiperplano. Consideremos ahora la recta soporte del cuadrivector velocidad retardada de Minkowski. Su ecuación paramétrica es:

$$x^i = \underline{\xi}^i + \lambda \underline{v}^i. \quad (47)$$

Aquí  $\lambda$  es un parámetro, y  $x^i$  son las coordenadas corrientes en la recta. La recta (47) corta al hiperplano (46) en un punto para el que el parámetro  $\lambda$  vale

$$\lambda = \Delta_{mn} (x^m - \underline{\xi}^m) \underline{v}^n. \quad (48)$$

Las coordenadas del punto de intersección se obtienen substituyendo  $\lambda$  de (48) en (47).

Calcúlese ahora la distancia del punto de intersección al acontecimiento  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . El cuadrado de esta distancia es:

$$\Delta_{ij} (X^i - x^i) (X^j - x^j) = \Delta_{ij} (\underline{\xi}^i - x^i) (\underline{\xi}^j - x^j) + 2\lambda \Delta_{ij} (\underline{\xi}^i - x^i) \underline{v}^j + \lambda^2. \quad (49)$$

La línea que une los acontecimientos  $\underline{a}$  y  $A$  es la línea de universo de un rayo de luz. Por lo tanto tenemos:

$$\Delta_{ij} (\underline{\xi}^i - x^i) (\underline{\xi}^j - x^j) = 0. \quad (50)$$

En vista de (50) y de (48) se obtiene de (49):

$$\Delta_{ij} (X^i - x^i) (X^j - x^j) = -\lambda^2 . \quad (51)$$

Si llamamos  $p$  a la distancia del acontecimiento  $A$  al soporte del cuadrivector de la velocidad retardada de Minkowski, obtenemos:

$$p^2 = - [\Delta_{mn} (x^m - \underline{x}^m) \underline{v}^n]^2 . \quad (52)$$

El signo menos del segundo miembro de (52) indica que  $p$  es una distancia espacialoide. Obtenemos como resultado: que el denominador del tensor gravitacional (42) es un valor absoluto igual a la distancia del acontecimiento en el que se calcula ese tensor al soporte del cuadrivector velocidad retardada de Minkowski del punto masa. De (42) y (52) se obtiene:

$$h_{ij} = \frac{M [2\underline{v}_i \underline{v}_j - \Delta_{ij}]}{|p|} . \quad (53)$$

La fórmula (53) expresa el tensor gravitacional de Birkhoff debido a un punto masa en movimiento arbitrario en forma extraordinariamente compacta.

Conviene interpretar la expresión (53) en el espacio-tiempo. Supóngase un punto masa  $M$  en movimiento arbitrario. Sea  $L$  la línea de universo de ese punto masa en el espacio-tiempo. Sea  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$  un acontecimiento para el que se quiere calcular el campo gravitacional  $h_{ij}$  debido a  $M$ . El campo se obtiene de la siguiente manera:

- i) Se construye con  $A$  como vértice el cono de luz del pasado.
- ii) Se encuentra la intersección  $F$  de ese cono con la línea de universo  $L$  del punto masa.
- iii) En  $F$  se construye el cuadrivector unitario tangente a  $L$ ; este cuadrivector tiene por componentes covariantes:  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ .
- iv) Se construye la recta apoyada en  $A$  y perpendicular al soporte del cuadrivector  $\underline{v}_1$ .

v) La distancia de A al soporte del cuadrivector  $\underline{v}_1$  es p.

El campo en A está dado por (53).

Nótese que si

$$\underline{v}^x = \underline{v}^y = \underline{v}^z = 0$$

entonces  $\underline{v}^1 = 1$ ,  $\underline{v}^2 = \underline{v}^3 = \underline{v}^4 = 0$  y  $|p| = r$ .

En ese caso  $h_{ij} = \frac{M}{r} \delta_{ij}$ .

Esto significa que en el marco de referencia inercial en  $e^1$  que el punto-masa en movimiento arbitrario está instantáneamente en reposo, el campo gravitacional se reduce al campo central de Birkhoff<sup>4</sup>.

#### REFERENCIAS.

1. G.D.Birkhoff. Proc.Nat.Acad.Sci. 29, 232, (1943).
2. G.D.Birkhoff. Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1, Nums.4,5, p.10, (1944).
3. L.Page y N.I.Adams. Electrodynamics. D.Van Nostrand & Co. New York (1940), p.119.
4. G.D.Birkhoff, Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1, Nums.4,5, p.17, (1944).
5. L.Page y N.I.Adams. loc.cit. p.144.
6. C.Sraef Fernández. Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1, Nums.4,5, p.20, (1944).
7. G.D.Birkhoff. Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1, Nums.4,5, p.13, (1944).

PRINCIPIOS VARIACIONALES PARA EL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS  
EN EL CAMPO CENTRAL DE BIRKHOFF.

Carlos Graef Fernández

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México.

(Recibido: Abril 15, 1953)

RESUMEN

*En este artículo se demuestra que las trayectorias de los planetas en la teoría de la gravitación de Birkhoff son las extremales de un principio variacional. Existe un Lagrangiano para el movimiento de un planeta en torno del Sol. Se hace ver que ese Lagrangiano es muy aproximadamente igual al de la mecánica Newtoniana para el movimiento de los planetas reales en torno del Sol real.*

*Se demuestra también que las líneas de universo de los planetas en la teoría de Birkhoff son las extremales*

de un principio variacional.

I. Ecuaciones diferenciales Birkhoffianas de las trayectorias de los planetas.

George D. Birkhoff<sup>1</sup> utiliza en su teoría de la gravitación los marcos de referencia inerciales de la teoría de la relatividad especial de Einstein. Cada uno de estos marcos consiste de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y de relojes que permiten asignar a los acontecimientos el tiempo  $t$  en que estos ocurren. Las coordenadas de un acontecimiento son entonces:  $(t, x, y, z)$ .

El conjunto de todos los acontecimientos posibles es el espacio-tiempo de Minkowski. Nosotros usamos el segundo-luz para unidad de longitud, y el segundo para unidad de tiempo. Con estas unidades resulta el cuadrado del elemento de arco para el espacio-tiempo de Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 ; \quad (1)$$

$$ds^2 = \Delta_{ij} dx^i dx^j . \quad (2)$$

La ecuación (2) es la expresión tensorial de la (1); habiéndose hecho las identificaciones:

$$t = x^1 , \quad x = x^2 , \quad y = x^3 , \quad z = x^4 .$$

El tensor  $\Delta_{ij}$  es el tensor métrico fundamental<sup>2</sup> del espacio-tiempo de Minkowski. Sus componentes son:

$$\Delta_{11} = 1 ; \quad \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1 ;$$

$$\Delta_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j .$$

El campo central gravitacional lo genera un punto masa, de masa  $M$ , colocado en el origen  $O$  del sistema de coordenadas de un marco de referencia inercial. A este punto masa lo llamamos "Sol". Designamos con  $r$  a la distancia de un punto de coordenadas  $x, y, z$  al Sol.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} . \quad (3)$$

El campo central generado por el Sol se describe por medio del tensor<sup>3</sup>:

$$h_{ij} = \frac{M}{r} \delta_{ij} . \quad (4)$$

Aquí  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Las unidades de masa se eligen de manera que la constante gravitacional  $G$  sea igual a uno.

Llamamos "planeta" a una partícula exploradora del campo gravitacional del Sol. En la teoría de Birkhoff, las ecuaciones diferenciales de las líneas de universo de las partículas exploradoras de un campo descrito por el tensor  $h_{ij}$  son:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \Delta^{im} \left( \frac{\partial h_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^m} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} . \quad (5)$$

Aquí  $\Delta^{im}$  es el tensor doblemente contravariante asíq

ciado al covariante fundamental  $\Delta_{ij}$  del espacio-tiempo de Minkowski. Las componentes correspondientes de estos dos tensores son numéricamente iguales.

$$\Delta^{im} = \Delta_{im} \quad . \quad (6)$$

[La ecuación (6) no es tensorial].

Para el campo del Sol (4), las ecuaciones (5) se convierten<sup>4</sup> en:

$$\begin{aligned} t'' &= -\frac{Mr't'}{r^2} \quad , \\ x'' &= -\frac{Mx}{r^3} - \frac{2Mx}{r^3} (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{Mr'x'}{r^2} \quad , \\ y'' &= -\frac{My}{r^3} - \frac{2My}{r^3} (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{Mr'y'}{r^2} \quad , \\ z'' &= -\frac{Mz}{r^3} - \frac{2Mz}{r^3} (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{Mr'z'}{r^2} \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

En las ecuaciones (7) el acento denota a la derivada con respecto a la longitud de arco  $s$  en el espacio-tiempo.

Abandonamos ahora al espacio-tiempo  $(t, x, y, z)$  para fijar la atención en el espacio físico  $(x, y, z)$ . Un planeta describe en el espacio físico una "trayectoria". Las ecuaciones diferenciales de las trayectorias de los planetas se obtienen eliminando de las tres últimas de las ecuaciones (7) el parámetro  $s$ , e introduciendo al tiempo  $t$  como nuevo parámetro. De la ecuación (1) se obtiene:

$$ds = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad .$$

Si introducimos la velocidad  $v$  del planeta en su trayectoria, podemos escribir:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad ;$$

$$ds = \sqrt{1 - v^2} \quad dt \quad .$$

Esta relación nos permite transformar derivadas con respecto a  $s$  en derivadas con respecto a  $t$ . La relación operacional es:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{d}{dt} \quad . \quad (8)$$

Designamos con un punto escrito sobre el símbolo de la función a su derivada con respecto al tiempo. Al eliminar el tiempo de las tres últimas de las ecuaciones (7) se obtiene<sup>5</sup>:

$$\ddot{x} = \frac{M}{r^3} [-x - xv^2 + 2 \dot{x} r \dot{r}] \quad ,$$

$$\ddot{y} = \frac{M}{r^3} [-y - yv^2 + 2 \dot{y} r \dot{r}] \quad , \quad (9)$$

$$\ddot{z} = \frac{M}{r^3} [-z - zv^2 + 2 \dot{z} r \dot{r}] \quad .$$

Salvo un error de imprenta, las ecuaciones (9) se reducen a las ecuaciones (15) del artículo del autor "Principios de Conservación en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff" publicado en los Nos. 1-4 del Volumen V del Boletín

tin de la Sociedad Matemática Mexicana (Enero a Octubre de 1948). Para efectuar esta reducción basta escribir

$$z = 0 ; \quad \dot{z} = 0 ; \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 ;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

II. Las trayectorias de los planetas en la teoría de Birkhoff como extremales de un principio variacional.

Las ecuaciones (9) se pueden obtener de un principio variacional. Esto significa que las trayectorias de los planetas en la teoría de la gravitación de Birkhoff son las extremales de un principio del cálculo de variaciones. Este principio tiene la siguiente expresión:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} e^{2M/r} (1 + v^2) dt = 0 \quad (10)$$

Aquí  $m$  es la masa del planeta.

La ecuación (10) puede expresarse de un modo equivalente afirmando que el movimiento de los planetas en la teoría de Birkhoff admite el Lagrangiano:

$$L = -\frac{m}{2} e^{2M/r} (1 + v^2) . \quad (11)$$

A continuación obtenemos una de las tres ecuaciones

diferenciales de Euler que se deducen del principio (10).  
Elegimos la que se refiere a la coordenada  $x$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = me^{2M/r} \dot{x} \quad ;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = me^{2M/r} \left[ \ddot{x} - \frac{2M\dot{x}}{r^2} \right] \quad ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -me^{2M/r} \left[ \frac{Mx}{r^3} (1 + v^2) \right] \quad ;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 = me^{2M/r} \left[ \ddot{x} - \frac{M}{r^3} \left\{ -x - xv^2 + 2x\dot{r}\dot{r} \right\} \right]$$

Se ve que la ecuación de Euler correspondiente a la coordenada  $x$ , y obtenida del Lagrangiano (11), es equivalente a la primera de las ecuaciones (9). De un modo semejante se demuestra que las ecuaciones de Euler para las coordenadas  $y$  y  $z$  obtenidas del Lagrangiano (11), son rigurosamente equivalentes a las dos últimas de las ecuaciones diferenciales (9). Hemos demostrado entonces que las trayectorias de los planetas en la teoría de la gravitación de Birkhoff son las extremales del principio variacional (10). Esto es equivalente a haber demostrado que el movimiento de los planetas en la teoría de Birkhoff admite el Lagrangiano (11).

### III. Aproximación Newtoniana.

En seguida haremos ver que el Lagrangiano (11) de la teoría de Birkhoff es muy aproximadamente igual al Lagran-

giano de la Mecánica de Newton para el Sol real y los planetas reales. En las unidades que estamos usando, la masa del Sol real es igual a 0.0005. La distancia mínima a la que se puede acercar un planeta real al Sol real es igual al radio del Sol, que en segundos-luz es de 2.3. Para el movimiento de un planeta en el campo del Sol real:

$$\frac{2M}{r} < 0.0005 .$$

En el Lagrangiano (11) podemos substituir la exponencial  $e^{2M/r}$  por su desarrollo en serie. Despreciando los términos de orden superior al primero, se obtiene:

$$L \doteq \frac{m}{2} \left( 1 + \frac{2M}{r} \right) (1 + v^2) . \quad (12)$$

Las velocidades de todos los planetas reales son inferiores a 80 Km/seg., o expresado en nuestras unidades, son inferiores a 0.0002 segundos-luz por segundo. En el Lagrangiano L podemos despreciar los diezmillonésimos ante cantidades del orden de diezmilésimos. Así obtenemos:

$$L \doteq \frac{m}{2} \left[ 1 + \frac{2M}{r} + v^2 \right] ;$$

$$L = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{Mm}{r} . \quad (13)$$

El Lagrangiano aproximado (13) de la teoría de Birkhoff es idéntico -salvo la constante no esencial  $\frac{m}{2}$ - al Lagrangiano de la mecánica de Newton para el movimiento de los

planetas reales en torno del Sol real.

El Lagrangiano aproximado (12) puede usarse para el movimiento de cualquier partícula exploradora en el campo del Sol real, pues no se ha hecho ninguna hipótesis sobre la velocidad de la misma.

IV. Las líneas de universo de los planetas en la teoría de Birkhoff como extremales de un principio variacional.

Alberto Barajas<sup>6</sup> demostró que las líneas de universo de las partículas exploradoras de un campo gravitacional de Birkhoff no son las geodésicas de ningún espacio-tiempo curvo de cuatro dimensiones. El teorema de Barajas se puede complementar en el caso particular del campo central, demostrando que las líneas de universo de los planetas son las extremales de un principio variacional. Estas líneas de universo son extremales, pero no geodésicas. Para pasar de las trayectorias a las líneas de universo basta considerar como funciones por determinarse a  $t, x, y, z$  y como variable de integración a la longitud de arco  $s$ . El principio variacional (10) sigue siendo válido, pero hay que tener en cuenta que el elemento de arco  $ds$  no es independiente de las diferenciales de las coordenadas del espacio-tiempo  $dt, dx, dy, dz$ . El elemento de arco  $ds$  y esas diferenciales están ligadas por la ecuación (1). Dividiendo ambos miembros de esa relación entre  $ds^2$  se obtiene una ecuación que liga a las derivadas de las coordenadas con respecto a  $s$ :

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 1. \quad (14)$$

Introduciendo en el principio variacional (10) la

variable de integración  $s$ , podemos escribir:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'} ;$$

$$dt = t' ds ;$$

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \frac{m}{2} e^{2M/r} \left[ 1 + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} \right] t' ds = 0. \quad (15)$$

El principio variacional (10) es equivalente al principio variacional (15) con la condición auxiliar (14).

Transformando con el método del multiplicador de Lagrange el principio (15) con su condición auxiliar (14), se obtiene

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{m}{2} e^{2M/r} \left[ 1 + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} \right] t' + \lambda [t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 - 1] \right\} ds = 0. \quad (16)$$

En el principio variacional (16)  $\lambda$  es una función de  $s$  que hay que elegir de manera que se satisfaga la condición auxiliar (14).

Obtengamos la ecuación de Euler correspondiente a  $x$ , del principio variacional (16):

$$\begin{aligned} m e^{2M/r} \left[ \frac{t'x'' - x't''}{t'^2} + \frac{M}{r^3} \left\{ x \frac{t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'} - \frac{2rr'x'}{t'} \right\} \right] &= \\ &= 2\lambda x'' + 2\lambda' x' \end{aligned} \quad (17)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{t' \mathbf{x}'' - \mathbf{x}' t''}{t'^3} ; \quad v^2 = \frac{\mathbf{x}'^2 + \mathbf{y}'^2 + \mathbf{z}'^2}{t'^2} ;$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}'}{t'} ; \quad \dot{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}'}{t'} ; \quad \dot{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}'}{t'} ;$$

la ecuación (17) se puede escribir como sigue:

$$m e^{2M/r} t' \left[ \ddot{\mathbf{x}} - \frac{M}{r^3} \left\{ -\mathbf{x} - \mathbf{x} v^2 + 2\mathbf{x} r \dot{r} \right\} \right] = 2\lambda \mathbf{x}'' + 2\lambda' \mathbf{x}' . \quad (18)$$

Comparando la ecuación (18) con la primera de las ecuaciones (9), se ve que en este caso

$$\lambda = \lambda' = 0 .$$

Obtengamos ahora la ecuación de Euler correspondiente a  $t$ , del principio variacional (16):

$$-\frac{m}{2} \frac{d}{ds} \left\{ e^{2M/r} \left[ 1 - \frac{\mathbf{x}'^2 + \mathbf{y}'^2 + \mathbf{z}'^2}{t'^2} \right] \right\} = 2\lambda t'' + 2\lambda' t' . \quad (19)$$

El primer miembro de la ecuación (19) es la derivada con respecto a  $s$  de:

$$-\frac{m}{2} e^{2M/r} (1 - v^2) . \quad (20)$$

El autor demostró que en el movimiento de los planetas en la teoría de Birkhoff, se conserva la expresión

$$E = -\frac{M}{r} + \frac{1}{2} M \ln \frac{1}{1 - v^2} . \quad (21)$$

Comparando la expresión (20) con la (21) se obtiene:

$$-\frac{m}{2} e^{2M/r} (1 - v^2) = -\frac{m}{2} e^{-2R} . \quad (22)$$

Como el segundo miembro de la ecuación (22) es constante, se tiene:

$$-\frac{m}{2} \frac{d}{ds} \left\{ e^{2M/r} (1 - v^2) \right\} = 0 . \quad (23)$$

Comparando la ecuación (23) con la (9) se obtiene una vez más:

$$\lambda = \lambda' = 0 .$$

Hemos demostrado entonces que las líneas de universo de los planetas en el campo central de Birkhoff son las extremales del principio variacional (16). Si no se utiliza la relación

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 1$$

para alterar la forma del integrando en (16),  $\lambda$  tiene que elegirse igual a cero.

Para las líneas de universo de las partículas exploradoras del campo central de Birkhoff vale el principio variacional:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \frac{m}{2} e^{2M/r} \left[ t' + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'} \right] ds = 0 ; \quad (24)$$

siempre y cuando no se utilice la relación entre  $t'$ ,  $x'$ ,  $y'$

---

y  $z'$  para alterar la forma del integrando.

#### REFERENCIAS.

1. G.D.Birkhoff. Bol. Soc. Mat. Mexicana I, 4,5, p.10, 1944
2. C.Graef Fernández. Revista Mexicana de Física I, 1, p.12 1952.
3. C.Graef Fernández. Revista Mexicana de Física I, 1, p.16 1952.
4. G.D.Birkhoff. Bol.Soc.Mat. Mexicana I, 4,5, p.18, 1944.
5. C.Graef Fernández. Bol.Soc.Mat. Mexicana V, 1,2,3,4, p.12 1948.
6. A.Barajas. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 30, 3, pp. 54-67 1944.

## CAMPO GRAVITACIONAL DE UN PUNTO MASA EN MOVIMIENTO ARBITRARIO EN LA TEORIA DE BIRKHOFF

por CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ

**B**IRKHOFF UTILIZA en su teoría de la gravitación el espacio-tiempo llano de Minkowski que es también el marco de referencia de la teoría de la relatividad especial de Einstein. El cuadrado del elemento de arco de ese espacio-tiempo es:

$$(1) \quad ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Aquí  $t$  significa el tiempo medido en segundos; las literales  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son las coordenadas cartesianas del lugar en que ocurrió el acontecimiento medido en segundos-luz. Con estas unidades la velocidad de la luz es igual a uno. El marco de referencia  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  es un marco de referencia inercial.

En muchas ocasiones es conveniente utilizar la notación tensorial para expresar el cuadrado del elemento de arco. En esta notación se escribe:

$$(2) \quad x^1 = t; x^2 = x, x^3 = y, x^4 = z.$$

El tensor métrico fundamental se designa con  $\Delta_{ij}$ , sus componentes son:

$$(3) \quad \Delta_{11} = 1, \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1;$$

$$\Delta_{ij} = 0 \text{ cuando } i \neq j.$$

El cuadrado del elemento de arco se expresa con esta notación como sigue:

$$(4) \quad ds^2 = \Delta_{ij} dx^i dx^j.$$

En este trabajo los índices latinos pueden adquirir los valores 1, 2, 3, 4. Siguiendo a Einstein utilizamos la convención de que una expresión

con un índice latino repetido significa la suma de los cuatro valores que adquiere esa expresión al recorrer el índice la lista 1, 2, 3, 4.

$$(4) \quad ds^2 = \Delta_{ij} dx^i dx^j.$$

El tensor doblemente contravariante asociado al métrico fundamental se designa con  $\Delta^{ij}$ ; sus componentes son numéricamente iguales a las correspondientes de  $\Delta_{ij}$ .

$$(5) \quad \Delta^{ij} = \Delta_{ij}$$

Las transformaciones que dejan invariante la forma del cuadrado del elemento de arco 4. forman el grupo general de Lorentz. Estas transformaciones son del tipo:

$$(6) \quad x'^i = a^i_j x^j + b^i.$$

Aquí las  $a^i_j$  y las  $b^i$  son constantes. Las  $b^i$  son enteramente arbitrarias, pero las  $a^i_j$  satisfacen las ecuaciones de condición:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta_{ij} a^i_m a^j_n &= \Delta_{mn}, \\ \Delta^{ij} a^m_i a^n_j &= \Delta^{mn} \end{aligned}$$

En una transformación 6 en que las  $a^i_j$  satisfacen las ecuaciones de condición 7, el cuadrado del elemento de arco 4 se transforma en 8:

$$(8) \quad ds^2 = \bar{\Delta}_{ij} dx'^i dx'^j$$

Como la forma del cuadrado del elemento de arco es invariante en estas transformaciones:

$$(9) \quad \bar{\Delta}_{ij} = \Delta_{ij}$$

El grupo general de Lorentz tiene un subgrupo que se utiliza de preferencia en la relatividad especial. Las transformaciones de este subgrupo son de la forma:

$$(10) \quad \begin{aligned} x^{-1} &= \frac{x^1 - vx^2}{\sqrt{1-v^2}}, & x^{-2} &= \frac{x^2 - vx^1}{\sqrt{1-v^2}}, \\ x^{-3} &= x^3, & x^{-4} &= x^4. \end{aligned}$$

Aquí  $|v| < 1$ . La transformación 10 tiene un significado físico muy simple: el sistema  $x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$  se mueve con respecto al sistema  $x^2, x^3, x^4$  con la velocidad constante  $v$ ; los dos sistemas coinciden en el instante  $x^1 = x^{-1} = 0$ ; el eje de las  $x^{-2}$  se desliza a lo largo del eje de las  $x^2$ ; el eje  $x^{-3}$  permanece paralelo al eje  $x^3$ ; el eje  $x^{-4}$  permanece paralelo al eje  $x^4$ . Designaremos con  $L(v)$  a la transformación definida por 10, que como se ve está completamente caracterizada por la velocidad  $v$ .

Otro subgrupo del grupo general de Lorentz es el de las rotaciones rígidas. En las transformaciones de este subgrupo  $x^{-1} = x^1$ , y el sistema cartesiano  $x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$  se obtiene del sistema  $x^2, x^3, x^4$  por medio de una rotación rígida. Aquí, los dos sistemas cartesianos tienen distinta orientación, y están en reposo uno con respecto al otro. Llamaremos  $R$  a una rotación rígida.

Consideraremos ahora una subfamilia del grupo general de Lorentz. Los miembros de la subfamilia se definen como sigue:

$$(11) \quad R^{-1} L(v) R.$$

Aquí  $R^{-1}$  es la recíproca de la rotación rígida  $R$ , y  $L(v)$  es la transformación 10. En una transformación del tipo 11 el sistema  $x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$  se está moviendo en el sistema  $x^2, x^3, x^4$  con una velocidad constante; esta velocidad se caracteriza por medio del vector  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ . La transformación 11 queda completamente definida por los tres parámetros  $v^x, v^y, v^z$ . Los orígenes de los sistemas  $x^2, x^3, x^4$  y  $x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$  coinciden en el instante  $x^1 = x^{-1} = 0$ .

Para escribir explícitamente las ecuaciones de la transformación 11 es útil hacer las siguientes convenciones:

- 1) Un índice griego adquiere los valores 2, 3, 4.
- 2) El símbolo  $v^\alpha$  significa  $v^x$  para  $\alpha = 2$ ; el símbolo  $v^\alpha$  significa  $v^y$  para  $\alpha = 3$ ; el símbolo  $v^\alpha$  significa  $v^z$  para  $\alpha = 4$ .

3) Una expresión en la que aparece un índice griego repetido significa la suma de los tres valores que adquiere esa expresión al recorrer el índice la lista 2, 3, 4.

Con estas convenciones se obtienen para las ecuaciones de la transformación 11

$$(12) \quad \begin{aligned} x^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} x^1 - \frac{v^\beta x^\beta}{\sqrt{1-v^2}}, \\ x^{-\alpha} &= -\frac{v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}} x^1 + \left[ \delta_{\beta}^{\alpha} + \frac{v^\alpha v^\beta (1-\sqrt{1-v^2})}{\sqrt{1-v^2}} \right] x^\beta. \end{aligned}$$

Aquí  $v^2 = (v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2$ ;  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  es la delta de Kronecker.

Si se escribe:

$$(13) \quad q = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

se obtiene para la matriz de la transformación 12:

$$(14) \quad ||a_{ij}|| = \left\| \begin{array}{cccc} q & -qv^x & -qv^y & -qv^z \\ -qv^x & 1 + \frac{q-1}{v^2} v^x v^x & \frac{q-1}{v^2} v^x v^y & \frac{q-1}{v^2} v^x v^z \\ -qv^y & \frac{q-1}{v^2} v^x v^y & 1 + \frac{q-1}{v^2} v^y v^y & \frac{q-1}{v^2} v^y v^z \\ -qv^z & \frac{q-1}{v^2} v^x v^z & \frac{q-1}{v^2} v^y v^z & 1 + \frac{q-1}{v^2} v^z v^z \end{array} \right\|$$

En la teoría de la gravitación de Birkhoff se postula el campo gravitacional de un punto masa en reposo en el origen de coordenadas de un sistema inercial. Sea  $r$  la distancia del punto  $x, y, z$ , del espacio físico al punto de masa  $M$  colocado en el origen.

$$(15) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}.$$

El tensor gravitacional de Birkhoff que describe el campo de ese punto masa es:

$$(16) \quad \parallel h_{ij} \parallel = \begin{vmatrix} \frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M}{r} \end{vmatrix}$$

Usando la delta de Kronecker, 16 se puede escribir como

$$(17) \quad h_{ij} = \frac{M}{r} \delta_{ij}$$

El tensor del campo gravitacional debido a un punto masa que se mueve con un vector velocidad constante  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$  y que pasa por el origen en el instante  $x^1 = 0$ , se obtiene aplicándole a 17 la transformación inversa de 14 que es

$$(18) \quad \parallel a_i \parallel = \begin{vmatrix} q & +qv^x & +qv^y & +qv^z \\ +qv^x & 1 + \frac{q-1}{v^2} v^x v^x & \frac{q-1}{v^2} v^x v^y & \frac{q-1}{v^2} v^x v^z \\ +qv^y & \frac{q-1}{v^2} v^x v^y & 1 + \frac{q-1}{v^2} v^y v^y & \frac{q-1}{v^2} v^y v^z \\ +qv^z & \frac{q-1}{v^2} v^x v^z & \frac{q-1}{v^2} v^y v^z & 1 + \frac{q-1}{v^2} v^z v^z \end{vmatrix}$$

Se obtiene para el tensor del campo gravitacional de un punto masa tal:

$$(19) \quad \parallel h_{ij} \parallel = \frac{M}{r} \begin{vmatrix} 1 + v^2 & 2v^x & 2v^y & 2v^z \\ \frac{2v^x}{1 - v^2} & 1 + \frac{2v^x v^x}{1 - v^2} & \frac{v^x v^y}{1 - v^2} & \frac{v^x v^z}{1 - v^2} \\ \frac{2v^y}{1 - v^2} & \frac{v^x v^y}{1 - v^2} & 1 + \frac{2v^y v^y}{1 - v^2} & \frac{v^y v^z}{1 - v^2} \\ \frac{2v^z}{1 - v^2} & \frac{v^x v^z}{1 - v^2} & \frac{v^y v^z}{1 - v^2} & 1 + \frac{2v^z v^z}{1 - v^2} \end{vmatrix}$$

Conviene introducir las cuatro componentes  $v^1, v^2, v^3, v^4$  del cuadvector velocidad de Minkowski, que se definen como sigue:

$$(20) \quad v^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad v^2 = \frac{v^x}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad v^3 = \frac{v^y}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad v^4 = \frac{v^z}{\sqrt{1 - v^2}}$$

NOTA.—El símbolo  $v^2$  significa algunas veces el cuadrado de la velocidad y otras la segunda componente del cuadvector velocidad de Minkowski; es fácil distinguir entre los dos significados.

Las componentes covariantes del cuadvector velocidad de Minkowski se obtienen de las componentes contravariantes siguiendo el procedimiento de bajar un índice:

$$(21) \quad v_i = \Delta_{ij} v^j$$

La ecuación 21 se descompone en las cuatro siguientes:

$$(22) \quad v_1 = v^1, \quad v_2 = v^2, \quad v_3 = v^3, \quad v_4 = v^4.$$

El campo gravitacional de un punto masa en movimiento uniforme se puede expresar de un modo muy sencillo en términos de las componentes covariantes del cuadvectores velocidad de Minkowski:

$$(23) \quad h_{ij} = \frac{M}{r} (2v_i v_j - \Delta_{ij}).$$

En la fórmula 23  $r$  significa la distancia entre el punto masa  $M$  y el punto del espacio físico en el que se calculan las componentes del tensor del campo; esta distancia  $r$  está medida en el marco de referencia inercial en el que el punto masa  $M$  está en reposo. Conviene expresar todas las cantidades que intervienen en 23 en el marco de referencia inercial en el que están medidas las  $h_{ij}$  del primer miembro; esto es, en el marco inercial en que el punto masa  $M$  se mueve con el vector velocidad  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ . Sean ahora  $(x, y, z)$  las coordenadas del punto del espacio en el que se calculan las componentes del campo  $h_{ij}$  en el instante  $t$ ; el tiempo  $t$  y las coordenadas  $x, y, z$  pertenecen al marco de referencia inercial en el que  $M$  se mueve con el vector velocidad  $v$ . Aplicando una transformación del tipo 18 a las coordenadas espaciales y al tiempo, se obtiene para la  $r$  de la fórmula 23:

$$(24) \quad r = \frac{\sqrt{(t - xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Combinando 23 con 24 se obtiene:

$$(25) \quad h_{ij} = \frac{M \sqrt{1 - v^2} [2v_i v_j - \Delta_{ij}]}{\sqrt{(t - xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}}$$

La fórmula 25 expresa el tensor potencial gravitacional en el instante  $t$ , en el punto  $x, y, z$ , debido a un punto masa  $M$  que pasa por el vector velocidad constante  $\vec{v} = v^x, v^y, v^z$ .

El tensor potencial gravitacional 25 se puede escribir en una forma más adecuada para los desarrollos ulteriores, si se utilizan algunas relaciones de la teoría de los potenciales retardados que se deducen a conti-

nuación. Supóngase una fuente puntual  $F$  que emite un efecto físico que se transmite con la velocidad de la luz; en el sistema de unidades que usamos, esta velocidad es igual a uno. Sean  $\xi^2 = \xi$ ,  $\xi^3 = \eta$  y  $\xi^4 = \phi$  las coordenadas de la fuente  $F$ . Si la fuente  $F$  está en movimiento en el marco de referencia inercial que estamos usando, entonces sus coordenadas son funciones del tiempo:

$$(26) \quad \xi^a = \xi^a(t); \quad \xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \phi = \phi(t).$$

Considérese ahora el punto  $P(x, y, z)$  del espacio físico del marco de referencia inercial. Sean  $\underline{\xi}^2 = \underline{\xi}$ ,  $\underline{\xi}^3 = \underline{\eta}$ ,  $\underline{\xi}^4 = \underline{\phi}$  las coordenadas de la posición de la fuente  $F$  en el instante  $\underline{\xi}^1 = \underline{t}$ , en el que salió el efecto físico que llega a  $P$  en el instante  $t$ . A  $\underline{\xi}^1 = \underline{t}$  se le llama tiempo retardado de la fuente  $F$  con respecto al punto  $P$  en el instante  $t$ ; a las coordenadas  $\underline{\xi}^2 = \underline{\xi}$ ,  $\underline{\xi}^3 = \underline{\eta}$ ,  $\underline{\xi}^4 = \underline{\phi}$ , se les llama coordenadas retardadas de  $F$  con respecto al punto  $P$  en el instante  $t$ .

Consideremos ahora una fuente  $F$  que se mueve en el marco de referencia inercial con el vector velocidad constante  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ . Supongamos que  $F$  pasa por el origen del sistema de coordenadas en el instante  $t = 0$ . Las ecuaciones del movimiento de  $F$  son entonces:

$$(27) \quad \xi^2 = \xi = v^x t, \quad \xi^3 = \eta = v^y t, \quad \xi^4 = \phi = v^z t.$$

Para la posición retardada de  $F$  con respecto a  $P$  en el instante  $t$  se tiene:

$$(28) \quad \underline{\xi} = v^x \underline{t}, \quad \underline{\eta} = v^y \underline{t}, \quad \underline{\phi} = v^z \underline{t}.$$

La distancia entre la posición retardada de  $F$  y  $P$  se llama distancia retardada, y se designa con  $r$ .

$$(29) \quad r = \sqrt{(x - \underline{\xi})^2 + (y - \underline{\eta})^2 + (z - \underline{\phi})^2}.$$

Como el efecto emitido por  $F$  se propaga con la velocidad uno, el tiempo  $t - \underline{t}$  que ese efecto tarda en llegar de  $F$  a  $P$  es igual a la distancia retardada  $r$ .

$$(30) \quad t - \underline{t} = r.$$

De 28, 29 y 30 se obtiene:

270

## RELATIVIDAD Y GRAVITACION

$$(31) \quad t - \underline{t} = \sqrt{(x - v^x \underline{t})^2 + (y - v^y \underline{t})^2 + (z - v^z \underline{t})^2}.$$

Despejando  $\underline{t}$  de la ecuación 31, teniendo en cuenta que  $\underline{t} < t$ , se obtiene:

$$(32) \quad t = \frac{(t - xv^x - yv^y - zv^z) - \sqrt{(t - xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}}{1 - v^2}$$

De 30 y 32 se obtiene para la distancia retardada  $\underline{r}$ :

$$(33) \quad \underline{r} = \frac{(xv^x + yv^y + zv^z - v^2 t) + \sqrt{(t - xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}}{1 - v^2}$$

Considérese el vector  $\vec{r}$  que tiene por origen a la fuente F en su posición retardada, y por extremo al punto P.

$$(34) \quad \vec{r} = (x - v^x \underline{t}, y - v^y \underline{t}, z - v^z \underline{t}).$$

Fórmese el producto escalar del vector  $\vec{r}$  y del vector constante  $\vec{v}$ ; se obtiene:

$$(35) \quad \vec{r} \cdot \vec{v} = xv^x + yv^y + zv^z - v^2 \underline{t}.$$

Sustituyendo 32 en 35 resulta:

$$(36) \quad \vec{r} \cdot \vec{v} = \frac{-v^2 t + (xv^x + yv^y + zv^z) + v^2}{1 - v^2}$$

Calculemos ahora la expresión:

$$(37) \quad \underline{r} - \vec{r} \cdot \vec{v} = \sqrt{(t - xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)}.$$

La fórmula 37 se dedujo para una fuente F que emite un efecto físico que se propaga con la velocidad de la luz; F se mueve con un vector ve-

locidad constante  $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ , y pasa por el origen del sistema de coordenadas del marco de referencia inercial en el instante  $t = 0$ . Como en la teoría de la gravitación de Birkhoff se supone que los efectos gravitacionales se propagan con la velocidad de la luz, el punto masa de la fórmula 25 está en las condiciones de la fuente F. Aplicando 37 a la fórmula 25, se obtiene:

$$(38) \quad h_{ij} = \frac{M \sqrt{1-v^2} [2 v_i v_j - \Delta_{ij}]}{r - \vec{r} \cdot \vec{v}}$$

El tensor gravitacional  $h_{ij}$  de la fórmula 38 está calculado en el instante  $t$  en el punto  $(x, y, z)$ ; se debe a un punto masa  $M$  que se mueve con el vector velocidad constante  $\vec{v} = v^x, v^y, v^z$ ; la distancia  $r$  es la distancia retardada del punto masa al punto P; el vector  $\vec{r}$  es el que tiene por origen la posición retardada del punto masa y por extremo el punto P;  $v_1, v_2, v_3, v_4$  son las componentes covariantes del cuadvivector velocidad de Minkowski; se obtienen de las componentes del vector  $\vec{v}$  como sigue:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v_2 = -\frac{v^x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v_3 = -\frac{v^y}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$v_4 = -\frac{v^z}{\sqrt{1-v^2}}$$

De este examen se ve que la fórmula 38 es independiente de que el punto masa pase por el origen.

Como 38 se dedujo para un punto masa en movimiento uniforme,  $v$  es constante y  $v^x, v^y, v^z, v_1, v_2, v_3, v_4$  son constantes. Si se designa con  $\vec{v}$  al vector velocidad retardado del punto masa, o sea el vector velocidad de este punto para el tiempo retardado  $t_1$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{v}} &= \underline{\underline{v}}; \underline{\underline{v}}^x = v^x, \underline{\underline{v}}^y = v^y, \underline{\underline{v}}^z = v^z; \\ \underline{\underline{v}}_1 &= v_1, \underline{\underline{v}}_2 = v_2, \underline{\underline{v}}_3 = v_3, \underline{\underline{v}}_4 = v_4; \\ \underline{\underline{v}} &= v. \end{aligned}$$

La fórmula 38 puede escribirse entonces como:

$$(40) \quad h_{ij} = \frac{M \sqrt{1-v^2} [2 \underline{\underline{v}}_i \underline{\underline{v}}_j - \Delta_{ij}]}{\underline{\underline{r}} - \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{v}}}$$

La fórmula 40 es susceptible de generalización. No intervienen en ella sino el vector velocidad  $\underline{\underline{v}}$  retardado del punto masa, y el vector  $\underline{\underline{r}}$  que une la posición retardada del punto masa con el punto P en el que se calcula  $h_{ij}$ . Con las seis componentes de esos dos vectores y la masa M se obtienen las 16 componentes de  $h_{ij}$ . Todas las cantidades que se refieren al punto masa aparecen retardadas.

Consideremos un punto masa M en movimiento arbitrario. En la teoría de la gravitación de Birkhoff se establece un postulado sobre el campo gravitacional de un punto masa en esas condiciones. Se introduce un punto masa auxiliar que se mueve uniformemente. El postulado se enuncia a continuación.

*Postulado.* El tensor gravitacional  $h_{ij}$ , para el instante t y el punto P(x, y, z) de un marco de referencia inercial, debido a un punto masa M en movimiento arbitrario, es igual al tensor gravitacional  $H_{ij}$  para el mismo instante t y el mismo punto P(x, y, z), debido a un punto masa auxiliar en movimiento uniforme; este punto masa auxiliar satisface las siguientes condiciones:

- a) su masa M es igual a la del punto masa en movimiento arbitrario;
- b) el punto masa auxiliar coincide instantáneamente con el punto masa en movimiento arbitrario, en la posición retardada de este último con respecto a P y al instante t;

- c) el punto masa auxiliar tiene su vector velocidad constante, e igual al vector retardado de la velocidad del punto masa en movimiento arbitrario; la posición retardada de este último calculada con respecto a P y al instante t.

Este postulado es equivalente a decir que la fórmula 40 expresa el tensor gravitacional de un punto masa en movimiento arbitrario. También se puede enunciar el postulado diciendo, que el tensor gravitacional generado instantáneamente por un punto masa en movimiento arbitrario sólo depende de la velocidad del punto masa, y que no depende de la aceleración del mismo.

La fórmula 40 expresa entonces el tensor gravitacional de un punto masa en movimiento arbitrario. Esta fórmula es compatible con la ecuación del campo en la teoría de Birkhoff. Para el espacio vacío la ecuación del campo es:

$$(41) \quad \square \quad h_{ij} = 0$$

En la teoría de los potenciales retardados se establece el hecho notable que la función:

$$(42) \quad \frac{f(t)}{r - \vec{r} \cdot \vec{v}}$$

satisface la ecuación

$$(43) \quad \square \quad \frac{f(\underline{t})}{r - \vec{r} \cdot \vec{v}} = 0.$$

Aquí  $\underline{t}$  es el tiempo retardado del punto masa con respecto a P(x, y, z) y al instante t. La función f es una función que tiene primera y segunda derivada continuas. Se ve claramente que las componentes de  $h_{ij}$  en 40 son del tipo 43.

La fórmula 40 admite una simplificación considerable. Recordando que  $\underline{r} = t - \underline{t}$  según 30, y recordando que las componentes del vector  $\underline{r}$  son  $(x - \xi, y - \eta, z - \phi)$ , se obtiene:

$$(44) \quad h_{ij} = \frac{M \sqrt{1-v^2} \left[ \underset{-i-j}{v} \underset{ij}{\Delta} \right]}{(t-\underline{t}) - (x-\underline{\xi})\underline{v}^x - (y-\underline{\eta})\underline{v}^y - (z-\underline{o})\underline{v}^z}$$

Introduciendo el lenguaje de cuadvectores, se puede escribir:

$$(45) \quad t-\underline{t} = x^1-\underline{\xi}^1, \quad x-\underline{\xi} = x^2-\underline{\xi}^2, \quad y-\underline{\eta} = x^3-\underline{\xi}^3, \quad z-\underline{o} = x^4-\underline{\xi}^4;$$

$$\underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \underline{v}^2 = \frac{\underline{v}^x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \underline{v}^3 = \frac{\underline{v}^y}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \underline{v}^4 = \frac{\underline{v}^z}{\sqrt{1-v^2}}.$$

La expresión 44 se convierte en:

$$(46) \quad h_{ij} = \frac{M \left[ 2 \underset{-i-j}{v} \underset{ij}{\Delta} \right]}{\Delta_{mn} (x^m - \underline{\xi}^m) \underline{v}^n}$$

El denominador de 46 tiene una interpretación geométrica sencilla en el espacio-tiempo. Las cuatro coordenadas  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  se refieren al acontecimiento A en el que se calcula el tensor  $h_{ij}$ . Las cuatro coordenadas  $(\underline{\xi}^1, \underline{\xi}^2, \underline{\xi}^3, \underline{\xi}^4)$  son del acontecimiento retardado en la línea de universo del punto masa con respecto a A. Las diferencias

$$(x^1-\underline{\xi}^1, x^2-\underline{\xi}^2, x^3-\underline{\xi}^3, x^4-\underline{\xi}^4)$$

son las componentes del cuadvector que une el acontecimiento retardado del punto masa con el acontecimiento A. Como el cuadvector velocidad es unitario en el espacio tiempo, la expresión

$$(47) \quad \Delta_{mn} (x^m - \underline{\xi}^m) \underline{v}^n,$$

es la proyección del cuadvector  $(x^m - \underline{\xi}^m)$  sobre el cuadvector velocidad.

Consideremos un acontecimiento A  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . Ese acontecimiento está compuesto del instante  $x^1$  y del punto  $(x^2, x^3, x^4)$  del espacio

físico. Hay para ese punto  $(x^2, x^3, x^4)$  y para ese instante  $x^1$  un tiempo retardado  $\underline{\xi}^1$ , y una posición retardada  $(\underline{\xi}^2, \underline{\xi}^3, \underline{\xi}^4)$  del punto masa. Estas cuatro coordenadas  $(\underline{\xi}^1, \underline{\xi}^2, \underline{\xi}^3, \underline{\xi}^4)$  definen al acontecimiento retardado  $\underline{\alpha}$  en la línea de universo del punto masa, con respecto al acontecimiento A. Las componentes del cuadrivector  $\underline{\alpha} A$  son:

$$(48) \quad \underline{\alpha} A = (x^1 - \underline{\xi}^1, x^2 - \underline{\xi}^2, x^3 - \underline{\xi}^3, x^4 - \underline{\xi}^4) .$$

Las componentes del cuadrivector velocidad retardada de Minkowski del punto masa en  $\underline{\alpha}$ , son:

$$(49) \quad \underline{v}^i = (\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^3, \underline{v}^4)$$

El denominador de 46 es la proyección del cuadrivector  $\underline{\alpha} A$  sobre el cuadrivector velocidad retardada de Minkowski.

Tracemos por  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$  un hiperplano perpendicular al cuadrivector velocidad retardada de Minkowski  $(\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^3, \underline{v}^4)$  que es unitario. La ecuación de este hiperplano es:

$$(50) \quad \Delta_{mn} (x^m - x^m) \underline{v}^n = 0.$$

Aquí  $x^m$  son las coordenadas corrientes del hiperplano. Consideremos ahora la recta soporte del cuadrivector velocidad retardada de Minkowski. Su ecuación paramétrica es:

$$(51) \quad x^i = \underline{\xi}^i + \lambda \underline{v}^i .$$

Aquí  $\lambda$  es un parámetro, y  $x^i$  son las coordenadas corrientes en la recta. La recta 51 corta al hiperplano 50 en un punto para el que el parámetro  $\lambda$  vale

$$(52) \quad \lambda = \Delta_{mn} (x^m - \underline{\xi}^m) \underline{v}^n .$$

Las coordenadas del punto de intersección se obtienen substituyendo  $\lambda$  de 52 en 51.

Calcúlese ahora la distancia del punto de intersección al acontecimiento  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . El cuadrado de esta distancia es:

276

$$(53) \quad \Delta_{ij} (X^i - x^i) (X^j - x^j) = \Delta_{ij} (\xi^i - x^i) (\xi^j - x^j) + \\ 2 \lambda \Delta_{ij} (\xi^i - x^i) \underline{v}^j \\ + \lambda^2 .$$

La línea que une los acontecimientos  $\underline{\alpha}$  y A es la línea de universo de un rayo de luz. Por lo tanto tenemos:

$$(54) \quad \Delta_{ij} (\xi^i - x^i) (\xi^j - x^j) = 0 .$$

En vista de 54 y de 52 se obtiene de 53:

$$(55) \quad \Delta_{ij} (X^i - x^i) (X^j - x^j) = -\lambda^2$$

Si llamamos  $p$  a la distancia del acontecimiento A al soporte del cuadvivector de la velocidad retardada de Minkowski, obtenemos:

$$(56) \quad p^2 = - [\Delta_{mn} (x^m - \xi^m) \underline{v}^n]^2 .$$

El signo menos del segundo miembro de 56 indica que  $p$  es una distancia espacialoide. Obtenemos como resultado: que el denominador del tensor gravitacional 46 es en valor absoluto igual a la distancia del acontecimiento en el que se calcula ese tensor al soporte del cuadvivector velocidad retardada de Minkowski del punto masa. De 46 y 56 se obtiene:

$$(57) \quad h_{ij} = \frac{M [2v_{-j} v_{-j} - \Delta_{ij}]}{|p|} .$$

Nótese que cuando  $v^* = v^* = v^* = 0$   $|p|$  es igual a  $r$ .

La fórmula 57 expresa el tensor gravitacional de Birkhoff debido a un punto masa en movimiento arbitrario en forma extraordinariamente compacta.

## ESTADO ACTUAL DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE BIRKHOFF

*por* CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ

**B**IRKHOFF UTILIZA en su teoría de la gravitación los marcos de referencia inerciales de la teoría de la relatividad especial de Einstein. Esto significa que la teoría de Birkhoff se desarrolla en el espacio-tiempo de Minkowski.

Birkhoff fundó su teoría en un fluido perfecto. Este fluido obedece las leyes de la hidrodinámica de la relatividad especial, y tiene además la característica de que la velocidad de una onda de perturbación que se propaga en él, es igual a la velocidad de la luz. Toda masa se concibe como constituida por gotas del fluido perfecto. Birkhoff introduce un tensor potencial gravitacional  $h_{ij}$  que satisface la ecuación de campo:

$$(1) \quad \square h_{ij} = 8\pi T_{ij}$$

Aquí el D'Alembertiano del tensor  $h_{ij}$  es igual a  $8\pi$  por el tensor de la energía y las cantidades de movimiento del fluido perfecto. Partiendo de la ecuación del campo Birkhoff desarrolló una teoría completa de la gravitación.

Posteriormente Alberto Barajas y el autor fundaron la teoría de Birkhoff en los 8 postulados siguientes:

I) Los fenómenos físicos se desarrollan en el espacio-tiempo llano de Minkowski de la teoría de la relatividad especial de Einstein;

II) en un campo gravitacional siempre se pueden elegir coordenadas de tal manera, que sus segundas derivadas con respecto al tiempo local sean nulas, para todas las líneas de universo de partículas que pasan por un acontecimiento dado;

III) el potencial gravitacional es un tensor de dos índices;

IV) las fuerzas gravitacionales son combinaciones lineales de las derivadas parciales del tensor gravitacional con respecto a las coordenadas en el espacio-tiempo;

V) la velocidad de propagación de una perturbación gravitacional es igual a la velocidad de la luz;

VI) el tensor gravitacional de un punto masa en reposo en un marco de referencia inercial es

$$h_{ij} = -\frac{m}{r} \delta_{ij} ;$$

aquí  $m$  es la masa del punto masa;  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, y  $r$  es la distancia al punto masa en el espacio físico;

VII) el tensor potencial de una perturbación gravitacional generada cada instante por un punto masa en movimiento arbitrario depende sólo de su velocidad;

VIII) los tensores potenciales gravitacionales de varios puntos masa son aditivos.

Las dos fundamentaciones de la teoría de Birkhoff son equivalentes. Partiendo del fluido perfecto se pueden demostrar los postulados, y partiendo de los postulados se puede establecer la ecuación del campo I. y la teoría del fluido perfecto.

Alberto Barajas demostró que la teoría de Birkhoff *no* es equivalente a la teoría de la relatividad general de Einstein para campos débiles.

En la teoría de Birkhoff se obtienen los tres efectos cruciales:

I) el corrimiento del perihelio de Mercurio;

II) la desviación de los rayos luminosos en torno del sol;

III) el corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales en los campos gravitacionales.

La magnitud de los efectos es igual a la de la relatividad general de Einstein.

El autor resolvió en la teoría de Birkhoff el problema de los dos cuerpos, habiendo encontrado una rotación secular de la línea de los ápsides. Para calcular el campo gravitacional debido a dos o más puntos masa en movimiento es necesario introducir potenciales retardados.

Fernando Alba obtuvo el campo gravitacional de una esfera en rotación, y calculó los efectos de la rotación en el movimiento de partículas exploradoras.

La mayor sencillez matemática de la teoría de Birkhoff con respecto a la relatividad general de Einstein, permite resolver con relativa facilidad en la primera, problemas que son de una complejidad extraordinaria en

la segunda; p. e. el problema de los dos cuerpos, y el problema del campo de un cuerpo en rotación.

Como el espacio-tiempo de la gravitación de Birkhoff es el mismo que el espacio-tiempo de la teoría electromagnética, es posible establecer la interacción de los campos. Ya Birkhoff había obtenido las ecuaciones del movimiento de una partícula grave y cargada de electricidad:

$$(2) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} = m G^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + q E^i_j \frac{dx^j}{ds}$$

Aquí  $E^i_j$  es el tensor del campo electromagnético;  $G^i_{jk}$  es el tensor del campo gravitacional y es una combinación lineal de las derivadas parciales con respecto a las coordenadas, del tensor potencial del campo  $h_{ij}$ ;  $x^1 x^2 x^3 x^4$  son las coordenadas del espacio-tiempo y  $ds$  es el elemento de arco de Minkowski;  $m$  es la masa de la partícula y  $q$  es su carga.

Recientemente estableció Marcos Moshinsky la interacción de los campos electromagnético y gravitacional de Birkhoff. Moshinsky obtuvo de esa interacción, la curvatura de los rayos luminosos en torno del Sol, y el corrimiento de las rayas espectrales hacia el rojo de los campos gravitacionales.

El autor estableció una Cosmología postulando que el espacio-tiempo de Minkowski vale una escala cósmica. Se obtiene un universo que consiste en una esfera dentro del espacio físico, que está poblada de galaxias. La esfera está en expansión; su cáscara se aleja con la velocidad de la luz de cualquier galaxia interior. La edad de la expansión es nula para la cáscara. La edad de la expansión es de dos mil millones de años como mínimo dentro de este modelo.

Postulando una simetría perfecta del Cosmos, se obtiene la distribución de las galaxias en el espacio físico, y el número de galaxias por grado cuadrado comprendidas entre dos magnitudes dadas. La función de distribución de las galaxias para magnitudes muy débiles. Hay que esperar los conteos de galaxias del Observatorio de Monte Palomar para que la observación permita discriminar entre las cosmologías propuestas.

Las ventajas de la teoría de la gravitación de Birkhoff son:

I) usa el espacio-tiempo llano de Minkowski que es el marco de referencia de la teoría electromagnética;

II) la matemática de la teoría es sencilla;

III) las coordenadas tienen un significado concreto.

MOVIMIENTO DE UNA MASA QUE ANIQUILA  
SU PROPIO CAMPO GRAVITACIONAL  
Carlos Graef Fernández.

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México  
(Recibido: Octubre 31, 1954)

RESUMEN

*En este trabajo se demuestra que es posible mover un punto masa -de masa tan grande como se quiera- de modo que una partícula exploradora no lo sienta gravitacionalmente. La partícula exploradora está inicialmente en reposo en un sistema inercial. El punto masa inicia su movimiento con la velocidad de la luz, partiendo de la partícula exploradora, y describiendo una línea recta. La velocidad del punto masa disminuye gradualmente hasta cero; en seguida regresa el*

punto masa sobre sus bases, mas no simétricamente. Su velocidad aumenta gradualmente hasta alcanzar otra vez su valor límite: el de la velocidad de la luz. Durante todo este movimiento -o durante cualquier parte del mismo- el punto masa no provoca ninguna aceleración en la partícula exploradora.

Los fenómenos que se analizan en este trabajo se desarrollan en un marco de referencia inercial de la teoría de la Relatividad Especial. Consiste el marco de un espacio físico de una dimensión, y del tiempo  $t$ . En el espacio físico se localizan los puntos por medio de su abscisa  $x$ . Se utiliza la Teoría de la Gravitación de Birkhoff. El cuadrado del elemento de arco del espacio-tiempo correspondiente al marco de referencia es:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \quad (1)$$

Se utilizan aquí el segundo-luz para unidad de longitud, y el segundo para unidad de tiempo.

Se plantea y resuelve en este artículo el problema de encontrar como debe moverse un punto masa, para que se anulen las aceleraciones físicas que este provoca sobre una partícula exploradora en reposo en el marco de referencia inercial.

En la Teoría de la Gravitación de Birkhoff se caracteriza el campo gravitacional por un tensor<sup>1</sup>doblemente covariante  $h_{ij}$ . Las líneas de universo<sup>2</sup>de las partículas exploradoras son senderos (paths) dados por las ecuaciones di

ferenciales:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = \left( \frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t} \right) \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} + \left( \frac{\partial h_{12}}{\partial x} - \frac{\partial h_{22}}{\partial t} \right) \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 ; \quad (2)$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \left( \frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t} \frac{dt}{ds} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_{12}}{\partial x} - \frac{\partial h_{22}}{\partial t} \right) \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} . \quad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) obtenemos la expresión para la aceleración en el espacio físico, utilizando tiempo  $t$  como variable independiente. Designaremos a las derivadas con respecto a  $s$  por medio de un acento, y a las derivadas con respecto a  $t$  por medio de un punto. Entonces se obtiene

$$\dot{x} = \frac{x'}{t'} ;$$

$$\ddot{x} = \frac{t' x'' - x' t''}{t'^3} = \frac{x''}{t'^2} - \dot{x} \frac{t''}{t'^2} . \quad (4)$$

De las ecuaciones (4), (3) y (2) se deduce:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \left( \frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial h_{12}}{\partial x} - \frac{\partial h_{22}}{\partial t} \right) \dot{x} \\ & - \left( \frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t} \right) \dot{x}^2 - \left( \frac{\partial h_{12}}{\partial x} - \frac{\partial h_{22}}{\partial t} \right) \dot{x}^3 . \end{aligned} \quad (5)$$

Llamamos a  $\ddot{x}$  velocidad física de la partícula exploradora, para contrastarla con el vector velocidad  $(t', x')$  del espacio tiempo; análogamente llamamos a  $\ddot{x}$  aceleración

física. La ecuación (5) indica, que en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff la aceleración física es un polinomio de tercer grado en la velocidad física, con coeficientes que son funciones de acontecimiento, o sea de tiempo y de lugar.

El problema que se trata aquí consiste en encontrar qué movimiento hay que imprimirle a un punto masa, para que se anule la aceleración  $\ddot{x}$  que éste causa en una partícula exploradora en reposo en el punto  $x$ . Como la partícula exploradora está en reposo  $\dot{x} = 0$ . Hay que mover al punto masa de manera que

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

en el punto  $x$ , y para todo tiempo  $t$ .

El tensor potencial gravitacional de Birkhoff<sup>3</sup> de un punto masa en movimiento arbitrario, está dado por:

$$h_{ij} = \frac{M[2v_i v_j - \Delta_{ij}]}{\Delta_{mn}(x^m - \xi^m) v^n} \quad (7)$$

Aquí  $M$  es la masa del punto generador del campo. El tensor  $h_{ij}$  está calculado para el acontecimiento  $A(t, x)$ . El vector covariante  $(v_1, v_2)$  es el vector velocidad retardado del punto masa en el espacio-tiempo. Se subrayan en (7) las cantidades retardadas con respecto al acontecimiento  $A(t, x)$ . Así  $\xi^1 = \tau$  es el tiempo en el que partió la señal gravitacional que llega al punto  $x$  en el instante  $t$ . El punto masa tiene en el instante  $\xi^1 = \tau$  la abscisa  $\xi^2 = \xi$ , y la velocidad física

$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{d\underline{\tau}} \quad (8)$$

El vector covariante  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$  tiene además la siguiente expresión:

$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \left( \frac{1}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}}, \frac{-\underline{v}}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}} \right). \quad (9)$$

Sus componentes contravariantes son:

$$(\underline{v}^1, \underline{v}^2) = \left( \frac{1}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}}, \frac{\underline{v}}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}} \right). \quad (10)$$

Tanto en (9) como en (10)  $(\underline{v})^2$  significa el cuadrado de la velocidad física retardada.

El tensor  $\Delta_{ij}$  o  $\Delta_{mn}$  que aparece en (7) es el tensor métrico fundamental del espacio-tiempo de Minkowski; en el caso del espacio físico de una dimensión, está dado por:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

El denominador del tensor (7) es explícitamente igual a:

$$\Delta_{mn} (\underline{x}^m - \underline{x}^n) \underline{v}^n = \frac{(t-\underline{\tau}) - (\underline{x}-\underline{\xi}) \underline{v}}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}} \quad (12)$$

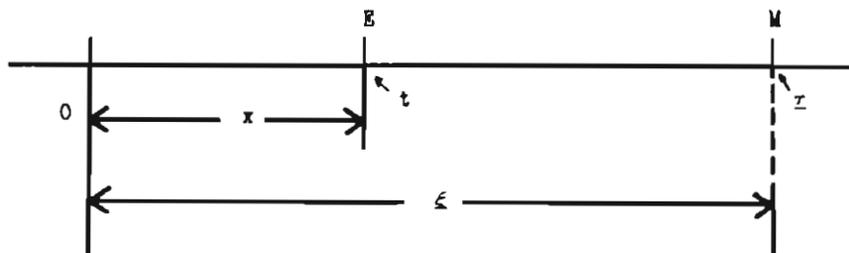
Las cuatro componentes del tensor (7) son entonces:

$$\left. \begin{aligned}
 h_{11} &= \frac{M[1 + (\underline{v})^2]}{\sqrt{1 - (\underline{v})^2} [(t - \underline{\tau}) - (x - \underline{\xi}) \underline{v}]} & ; \\
 h_{12} = h_{21} &= \frac{-2M\underline{v}}{\sqrt{1 - (\underline{v})^2} [(t - \underline{\tau}) - (x - \underline{\xi}) \underline{v}]} & ; \\
 h_{22} &= \frac{M[1 + (\underline{v})^2]}{\sqrt{1 - (\underline{v})^2} [(t - \underline{\tau}) - (x - \underline{\xi}) \underline{v}]} & .
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

De aquí en adelante no habrá peligro de que se confunda el cuadrado de la velocidad física retardada  $(\underline{v})^2$  con la segunda componente contravariante  $\underline{v}^2$  del vector velocidad en el espacio-tiempo. Designaremos pues a ese cuadrado con  $\underline{v}^2$ .

Al moverse un punto masa en forma arbitraria  $\underline{\xi}$  es una función de  $\underline{\tau}$ . El tiempo retardado  $\underline{\tau}$  y la abscisa retardada  $\underline{\xi}$  del punto masa, son funciones de la  $t$  y de la  $x$  del acontecimiento  $A$ , para el que se está calculando el campo. Como la velocidad retardada  $\underline{v} = \frac{d\underline{\xi}}{d\underline{\tau}}$ , las componentes del tensor  $h_{ij}$  en (13) dependen exclusivamente de  $t$  y de  $x$ . Nuestro problema se reduce a determinar una función  $\underline{\xi}$  de  $\underline{\tau}$  tal, que las  $h_{ij}$  satisfagan la ecuación (6).

Para poder calcular las derivadas parciales con respecto a  $t$  y con respecto a  $x$  que intervienen en la ecuación (6), es indispensable tener a la mano las derivadas parciales de  $\underline{\tau}$  y  $\underline{\xi}$  con respecto a esas mismas variables. Estas últimas se obtienen fácilmente de las siguientes consideraciones:



Sea  $E$  la partícula exploradora. La abscisa de  $E$  es  $x$ . Se considera a esa partícula en el instante  $t$ . Sea  $M$  la posición del punto masa en el instante  $\tau$ ; sea  $\xi$  su abscisa en ese instante. La señal gravitacional que sale del punto masa en el instante  $\tau$  llega a la partícula exploradora en el instante  $t$ . La velocidad de propagación de la gravitación en la Teoría de Birkhoff es igual a la velocidad de la luz, que es a su vez igual a uno con las unidades que se usan. El tiempo que se tarda la señal gravitacional en llegar de  $M$  a  $E$  es igual a  $t - \tau$ . La distancia que recorre la señal es igual a  $\xi - x$ . Como la velocidad de propagación es igual a uno, se tiene:

$$t - \tau = \xi - x. \quad (14)$$

Recordando que  $\xi$  es una función de  $\tau$ , que a su vez es una función de  $t$  y de  $x$ , y que  $\frac{d\xi}{d\tau} = v$ , se obtiene de (14) derivando parcialmente con respecto a  $t$  y con respecto a  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{1 + \underline{v}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\underline{v}}{1 + \underline{v}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Las ecuaciones (13) se simplifican con ayuda de la (14) y adquieren la forma:

$$\left. \begin{aligned} h_{11} &= \frac{M[1 + \underline{v}^2]}{[1 - \underline{v}]^{\frac{1}{2}} [1 + \underline{v}]^{3/2} (\xi - x)} ; \\ h_{12} = h_{21} &= \frac{-2M\underline{v}}{[1 - \underline{v}]^{\frac{1}{2}} [1 + \underline{v}]^{3/2} (\xi - x)} ; \\ h_{22} &= \frac{M[1 + \underline{v}^2]}{[1 - \underline{v}]^{\frac{1}{2}} [1 + \underline{v}]^{3/2} (\xi - x)} . \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Las cantidades retardadas  $\underline{v}$  y  $\xi$  son funciones del tiempo retardado  $\tau$ ; éste a su vez es función de  $t$  y de  $x$ . Llamaremos  $\underline{a}$  a la aceleración retardada del punto masa;  $\underline{a}$  resulta también función de  $\tau$ , y está dada por:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{d\tau} = \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \quad (17)$$

Con ayuda de (15), (16) y (17), se obtienen para las derivadas parciales que intervienen en la ecuación (6):

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial x} = \frac{M}{(1 - \underline{v})^{\frac{1}{2}} [1 + \underline{v}]^{5/2} (\xi - x)} \left[ \frac{-1 + 4\underline{v} - \underline{v}^2}{1 - \underline{v}^2} \underline{a} + \frac{1 + \underline{v}^2}{\xi - x} \right]; \quad (18)$$

$$\frac{\partial t_{12}}{\partial t} = \frac{v}{(1-v)^{\frac{1}{2}} (1+v)^{\frac{1}{2}} (\xi-x)} \left[ \frac{-2+2v-2v^2}{1-v^2} a + \frac{\partial v^2}{\xi-x} \right]. \quad (19)$$

Substituyendo (18) y (19) en la ecuación (6), se obtiene después de simplificar:

$$\frac{1+v}{1-v} a + \frac{1-v^2}{\xi-x} = 0. \quad (20)$$

De la ecuación (20) se obtiene para la aceleración retardada del punto masa:

$$a = - \frac{(1-v)^2}{\xi-x}. \quad (21)$$

Elijamos para origen de las abscisas el punto del espacio físico en el que se encuentra la partícula exploradora - en reposo; entonces se tiene  $x = 0$ , y:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = - \frac{\left(1 - \frac{d\xi}{d\tau}\right)^2}{\xi}. \quad (22)$$

La ecuación diferencial (22) nos proporciona a la abscisa retardada  $\xi$  en función del tiempo retardado  $\tau$ . La función  $\xi = \xi(\tau)$  es idéntica a la función  $\xi = \xi(\tau)$ ; por eso podemos suprimir en (22) las líneas que subrayan a  $\xi$  y a  $\tau$ . Para el movimiento del punto masa que no provoca ninguna aceleración en una partícula exploradora en reposo en el origen de las coordenadas espaciales, se tiene entonces:

$$\ddot{\xi} = - \frac{(1 - \dot{\xi})^2}{\xi}. \quad (23)$$

Una primera integral de la ecuación (23) se obtiene muy fácilmente:

$$\xi(1-\xi) e^{\frac{t}{1-\xi}} = C \quad . \quad (24)$$

Aquí  $C$  es la constante de integración.

La ecuación (24) se puede normalizar mediante la transformación:

$$\begin{aligned} \xi &= CX \quad ; \\ \tau &= CT \quad . \end{aligned} \quad (25)$$

La ecuación diferencial tiene, con las nuevas variables la forma:

$$X(1-\dot{X}) e^{\frac{1}{1-\dot{X}}} = 1 \quad . \quad (26)$$

Aquí el punto designa la derivada con respecto a  $T$ .

De la ecuación (26) se obtiene:

$$X = \frac{1}{1-\dot{X}} e^{-\frac{1}{1-\dot{X}}} \quad . \quad (27)$$

Introduciendo el parámetro  $u$  definido por

$$u = \frac{1}{1-\dot{X}} \quad , \quad (28)$$

se obtiene para  $X$ :

$$X = ue^{-u} \quad . \quad (29)$$

De esta última ecuación se obtiene

$$\frac{dX}{du} = e^{-u} [1 - u] \quad . \quad (30)$$

De la definición de  $u$  se deduce inmediatamente que

$$\frac{dX}{dT} = \frac{u - 1}{u} \quad . \quad (31)$$

De las ecuaciones (30) y (31) se obtiene la ecuación diferencial de  $T$ :

$$\frac{dT}{du} = -ue^{-u} \quad . \quad (32)$$

Integrando resulta:

$$T = e^{-u} [1 + u] \quad . \quad (33)$$

La constante de integración se eligió igual a cero. Un valor arbitrario de esa constante significa un corrimiento en el origen de los tiempos que no tiene importancia. Las variables  $T$  y  $X$  son proporcionales al tiempo  $\tau$  y la abscisa  $\xi$  del punto masa en movimiento [ecuaciones (25)].

La velocidad  $\dot{\xi}$  del punto masa es igual a

$$\dot{\xi} = \frac{dX}{dT} \quad . \quad (34)$$

El movimiento del punto masa está totalmente descrito

por las ecuaciones:

$$T = e^{-u} (1 + u) \quad ,$$

$$X = ue^{-u} \quad , \quad (35)$$

$$\frac{dX}{dT} = \frac{u - 1}{u} \quad .$$

La Teoría de la Relatividad Especial le impone una restricción a la velocidad del punto-masa:

$$\left[ \frac{dX}{dT} \right] \leq 1 \quad . \quad (36)$$

De aquí se deduce para el parámetro  $u$ :

$$u \geq \frac{1}{2} \quad . \quad (37)$$

La tabla de la siguiente hoja, muestra los valores de  $T$ , de  $X$  y de la velocidad del punto masa.

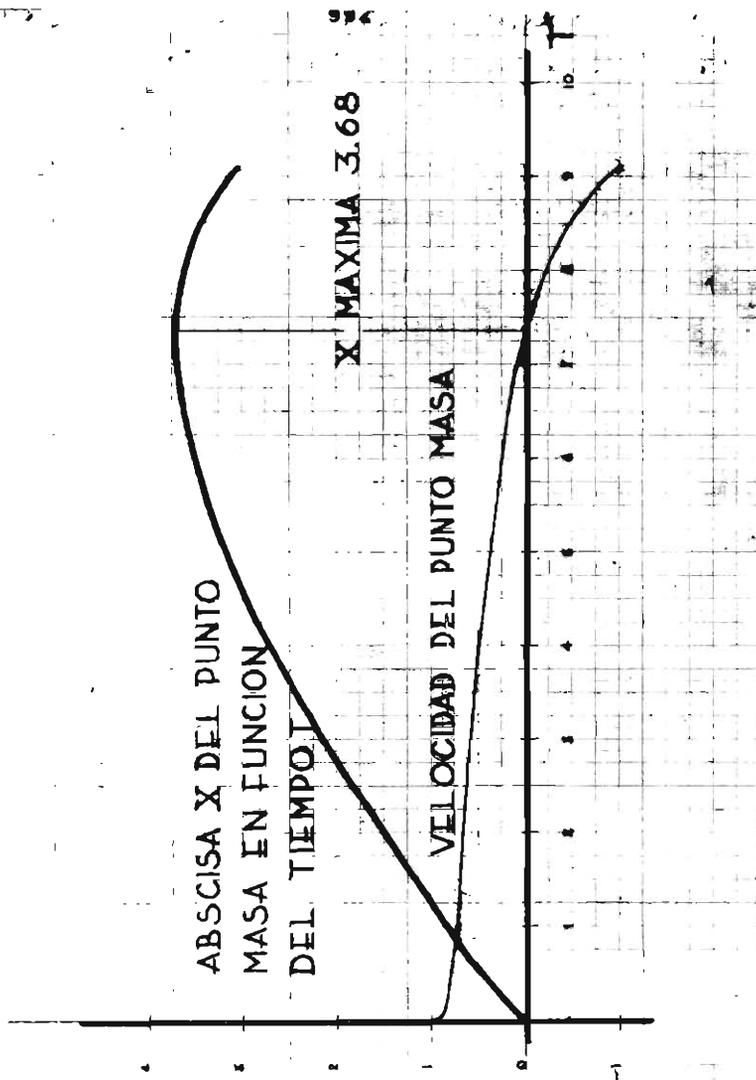
La gráfica exhibe a  $X$  y a la velocidad como función de  $T$ . De la figura se deduce que el punto masa parte del origen con la velocidad de la luz, alejándose en línea recta. Su velocidad disminuye hasta anularse. Esto acaece cuando - la abscisa del punto masa vale 0.367879 C. En seguida invierte el punto masa el sentido de su velocidad, acercándose al origen, hasta adquirir la velocidad de la luz cuando tiene la abscisa 0.303268 C. Durante todo este movimiento el punto masa no provoca ninguna aceleración en una partícula exploradora que se haya colocado en el origen de las coordenadas al -

TABLA

$$\xi = CX \quad ; \quad \tau = CT \quad ; \quad v = \frac{d\xi}{d\tau} \quad ;$$

C es una constante arbitraria.

T	X	v
0.0000	0.0000	+1.0000
0.0005	0.0004	+0.9000
0.0012	0.0011	+0.8889
0.0030	0.0027	+0.8750
0.0073	0.0064	+0.8511
0.0174	0.0149	+0.8333
0.0404	0.0337	+0.8000
0.0916	0.0733	+0.7500
0.1991	0.1494	+0.6667
0.4060	0.2707	+0.5000
0.6626	0.3614	+0.1667
0.6990	0.3661	+0.0909
0.7174	0.3674	+0.0476
0.7358	0.3679 <i>máximo</i>	0.0000
0.7541	0.3674	-0.0528
0.7725	0.3659	-0.1111
0.7907	0.3633	-0.1785
0.8088	0.3605	-0.2500
0.8266	0.3543	-0.3333
0.8442	0.3476	-0.4286
0.8614	0.3393	-0.5385
0.8781	0.3293	-0.6667
0.8943	0.3173	-0.8182
0.9099	0.3033	-1.0000



iniciarse el movimiento. Como  $C$  es una constante arbitraria, hay toda una familia monoparamétrica de movimientos del punto masa que tienen la propiedad de no ser sentidos por la partícula exploradora. Todos estos movimientos se obtienen del dado por  $X(T)$ , por medio de la transformación de semejanza

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{X}{C} \\ \tau &= \frac{T}{C} \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{dX}{dT} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

La velocidad en puntos homólogos es la misma en todos los movimientos. Cualquier parte de uno de esos movimientos no es sentido gravitacionalmente por la partícula exploradora.

#### REFERENCIAS.

1. G.D. Birkhoff, Bol. Soc. Mat. Mex., 1, Nos. 4 y 5 (1944).
2. A. Barajas, Bol. Soc. Mat. Mex., 1, Nos. 4 y 5 (1944).
3. C. Graef-Fernandez, Rev. Mex. Fis. 1, No. 1 (1952).

## LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE BIRKHOFF

Carlos Graef Fernández

## RESUMEN

*La Teoría de la gravitación de Newton explica excelentemente casi todos los fenómenos gravitacionales. Hay unos efectos residuales finos que no se pueden explicar dentro de esta teoría. La teoría de Newton supone una propagación instantánea de la gravedad; hipótesis incompatible con la teoría de la relatividad especial de Einstein, que está tan bien comprobada y fundada. La teoría de la relatividad general de Einstein explica los efectos residuales finos que deja sin explicar la teoría de Newton. Para lograr ésto se introduce un espacio-tiempo curvo de gran complejidad matemática. Las líneas de universo de las partículas son las geodésicas de ese espacio-tiempo. En este trabajo se expone la teoría de la gravitación de Birkhoff, propuesta por este matemático Estadounidense y desarrollada en México por un grupo de investi-*

gadores. G.D. Birkhoff utiliza para marco de referencia de su teoría el espacio-tiempo llano de Winkowski que se usa también en la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein. Birkhoff supone que las perturbaciones gravitacionales se propagan en el vacío con la velocidad de la luz. Con un aparato matemático mucho más sencillo que el de la teoría de la relatividad general de Einstein, se explican en la teoría de Birkhoff los efectos residuales finos. El marco de referencia de la teoría sirve tanto para los fenómenos gravitacionales, como para los electromagnéticos y cósmicos.

#### 1. LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE NEWTON.

La teoría de la gravitación de Newton explica excelentemente los movimientos de las componentes de las estrellas múltiples y los de los cuerpos que integran el sistema solar. En lo que se refiere a estos últimos sólo deja sin explicación el avance del perihelio de Mercurio. Este hecho, y la hipótesis que se hace en esta teoría de que la gravitación se propaga instantáneamente por el espacio, hacen necesaria una revisión radical. La hipótesis de la propagación instantánea es incompatible con la teoría de la relatividad especial de Einstein, que está perfectamente comprobada, y en la que se supone que hay una velocidad límite para la propagación de las señales físicas en el espacio.

#### 2. LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD GENERAL DE EINSTEIN.

Einstein<sup>1</sup> propuso una nueva teoría de la gravitación: su teoría de la relatividad general. En ésta utiliza como marco de referencia de los fenómenos físicos el espacio-tiempo. En

la relatividad general se suprimen las fuerzas gravitacionales. Las líneas de universo de las partículas exploradoras de los campos gravitacionales son las geodésicas de un espacio-tiempo curvo. La curvatura de este espacio-tiempo está determinada por la distribución de las masas. El principio Einsteiniano de substituir un campo de fuerzas por las características geométricas del espacio-tiempo sólo tuvo éxito en el caso de los campos gravitacionales. Todos los intentos hechos por los físicos hasta ahora para reducir un campo combinado, electromagnético y gravitacional, a características geométricas del espacio-tiempo, han fracasado. El principio Einsteiniano adinámico de suprimir las fuerzas, y de substituir sus efectos por los de la estructura geométrica del espacio-tiempo no es de aplicación universal; vale únicamente para un campo de fuerzas: el campo gravitacional. Por esta razón se impone la construcción de una nueva teoría de la gravitación.

### 3. FORMA ORIGINAL DE LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF.

G.D. Birkhoff<sup>2</sup> estableció una teoría de la gravitación fundada en las propiedades de un fluido perfecto, en el que las ondas de perturbación se propagan con la velocidad de la luz. En esta teoría se utiliza como marco de referencia el espacio-tiempo llano de Minkowski<sup>3</sup>, que es también el escenario de los fenómenos electromagnéticos en la teoría de la relatividad especial de Einstein. Birkhoff supone que las perturbaciones gravitacionales se propagan con la velocidad de la luz, lo que está de acuerdo con la relatividad especial. Supone además que existen fuerzas gravitacionales. Su teoría

es dinámica. Por haber surgido varias críticas a la teoría, dirigidas especialmente contra el fluido perfecto, decidieron los colaboradores mexicanos de Birkhoff: A. Barajas y el autor, desarrollar la teoría independientemente de este fluido. En este trabajo se presenta ese desarrollo de la teoría de la gravitación de Birkhoff. A. Barajas y el autor agradecen profundamente a Garrett Birkhoff la ayuda que les brindó para poder fundar postulacionalmente la teoría de su padre.

#### 4. POSTULADOS DE LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF.

Esta forma de la teoría de la gravitación de Birkhoff se funda en los siguientes postulados:

- B.1. El marco de referencia de los fenómenos gravitacionales es el espacio-tiempo llano de Minkowski.
- B.2. El principio de equivalencia de Einstein: es posible elegir siempre un sistema de coordenadas y un reloj tales, que los efectos de un campo gravitacional desaparezcan en la vecindad de un punto arbitrario del espacio físico, durante un pequeño intervalo de tiempo, centrado en un instante arbitrario.
- B.3. Un campo gravitacional está totalmente caracterizado en el espacio-tiempo por un tensor potencial simétrico y doblemente covariante. Las fuerzas gravitacionales son combinaciones lineales de las derivadas parciales primeras del tensor potencial.
- B.4. El tensor potencial gravitacional de un punto masa en reposo en un marco de referencia inercial es igual, en el espacio-tiempo, al producto del potencial Newtoniano por la delta de Kronecker doblemente covariante.

- B.5. Las perturbaciones gravitacionales se propagan con la velocidad de la luz en el espacio físico vacío de un marco de referencia inercial.
- B.6. El tensor potencial de un punto masa en movimiento arbitrario, es igual al conjunto de los campos gravitacionales instantáneos generados por ese punto masa en todas sus posiciones en el espacio físico.
- B.7. El tensor potencial de un campo gravitacional debido a varios puntos masa, es igual a la suma de los tensores potenciales gravitacionales de los campos generados por cada uno de esos puntos.

#### 5. EL MARCO DE REFERENCIA.

El marco de referencia de la teoría de la gravitación de Birkhoff es, según el postulado B.1., el espacio-tiempo llano de Minkowski. En este marco de referencia se caracterizan los acontecimientos por su coordenada temporal  $t$ , y por sus tres coordenadas espaciales  $x, y, z$ . El acontecimiento  $A$  es tá pues caracterizado por cuatro números reales  $(t, z, y, \hat{z})$ . Se utiliza también la notación tensorial de las coordenadas, definida por las siguientes relaciones:

$$x^1 = t, \quad x^2 = x, \quad x^3 = y, \quad x^4 = z ;$$

$$A(x^1, x^2, x^3, x^4) .$$

El espacio-tiempo llano de Minkowski es inercial; esto significa que son rectas las líneas de universo de las partículas exploradoras que no están urgidas por fuerzas. Utilizando pa ra unidad de longitud el segundo-luz ( $2.99798 \cdot 10^{10}$  cm), y pa

ra unidad de tiempo el segundo, se consigue que la velocidad de la luz sea igual a uno, y se obtiene para el cuadrado del elemento de arco en el espacio-tiempo de Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \Delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (1)$$

Aquí se está utilizando la convención de Einstein sobre los índices repetidos. Las componentes del tensor métrico fundamental  $\Delta_{ij}$  tienen los valores:

$$\Delta_{11} = 1; \quad \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1; \quad ;$$

$$\Delta_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j.$$

El tensor doblemente contravariante  $\Delta^{ij}$  asociado al métrico fundamental tiene componentes numéricamente iguales a las de este último; esta relación se puede expresar por medio de la ecuación no tensorial:

$$\Delta_{ij} = \Delta^{ij}.$$

## 6. EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA DE EINSTEIN.

El punto arbitrario del espacio físico, y el instante arbitrario, de los que habla el postulado B.2. se pueden combinar en el acontecimiento arbitrario A del espacio-tiempo. La vecindad del punto arbitrario del espacio físico, combinada con el intervalo de tiempo centrado en el instante arbitrario, producen una vecindad del acontecimiento A en el espacio-tiempo. La desaparición de los efectos de un campo gravitacional

cional en la vecindad de  $A$ , equivale a afirmar que existe un sistema de coordenadas  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$  en el espacio-tiempo tal, que en ese sistema son nulas las aceleraciones, y en consecuencia son rectas las líneas de universo en esa vecindad. Esto se expresa como sigue:

$$\left( \frac{d^2 \xi^i}{ds^2} \right)_A = 0 \quad . \quad (2)$$

Esta ecuación afirma, que dado un acontecimiento arbitrario  $A$ , existe siempre un sistema de coordenadas  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$  en el espacio-tiempo tal, que las aceleraciones Minkowskianas  $\frac{d^2 \xi^i}{ds^2}$  son nulas en  $A$ , para todas las partículas exploradoras cuyas líneas de universo pasan por ese acontecimiento. La ecuación (2) es el enunciado riguroso del principio de equivalencia de Einstein. De esta ecuación se deduce inmediatamente la forma de las ecuaciones del movimiento en las coordenadas inerciales  $x^1, x^2, x^3, x^4$ :

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = B_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad . \quad (3)$$

En esta ecuación las  $B_{jk}^i$  son funciones del acontecimiento  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . La semejanza de la ecuación (3) con la de las geodésicas indujo a Einstein a postular que las líneas de universo de las partículas exploradoras de un campo gravitacional debían de ser las geodésicas de un espacio-tiempo curvo; en este caso las  $B_{jk}^i$  son los símbolos de Christoffel con signo contrario. Para Einstein la  $ds$  de la ecuación (3) es la de un espacio-tiempo curvo. Birkhoff interpretó la ecua-

ción (3) en el espacio-tiempo llano de Minkowski. En este caso la  $ds$  es la definida por la ecuación (1). La ecuación (3) no corresponde entonces a las geodésicas, sino a senderos en el espacio-tiempo llano.

Es evidente que las coordenadas  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$  no son inerciales; por lo tanto son coordenadas curvilíneas en el espacio-tiempo. Se ha afirmado que es un grave defecto de la teoría de Birkhoff, el utilizar coordenadas curvilíneas en el espacio-tiempo llano. Esta crítica es tan improcedente como la de objetar el uso de coordenadas polares -que son curvilíneas- en el plano, que es un espacio llano de dos dimensiones.

La investigación sobre las consecuencias del principio de equivalencia de Einstein para todas las teorías de la gravitación que lo postulen se debe a Alberto Barajas<sup>4</sup>.

#### 7. LAS FUERZAS GRAVITACIONALES DE BIRKHOFF.

La ecuación (3) expresa que las fuerzas gravitacionales son funciones cuadráticas y homogéneas en las velocidades de Minkowski  $\frac{dx^j}{ds}$ . El tensor  $B_{jk}^i$  es la intensidad del campo gravitacional. Según el postulado 8.3. el campo gravitacional está totalmente caracterizado en el espacio-tiempo, por un tensor potencial doblemente covariante  $h_{ij}$ . Ese mismo postulado afirma que las fuerzas gravitacionales son combinaciones lineales de las derivadas parciales primeras de  $h_{ij}$ . Según la ecuación (3) las fuerzas son funciones cuadráticas de las velocidades de Minkowski  $\frac{dx^j}{ds}$ , con coeficientes  $B_{jk}^i$  que dependen del acontecimiento  $x^1, x^2, x^3, x^4$ . Estos coeficientes son entonces -según 8.3.- combinaciones lineales de las derivadas parciales primeras del tensor potencial gravitacional

$h_{ij}$ . Usando las componentes completamente covariantes de la intensidad del campo, se tiene:

$$B_{ijk} = \alpha \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} + \beta \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \gamma \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i}$$

$$B_{ijk} = \Delta_{i\mu} B_{jk}^{\mu}$$

Los coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma$  de la combinación lineal se determinan usando la relación

$$\Delta_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{d^2 x^j}{ds^2} = 0,$$

que se obtiene inmediatamente de (1). Para  $B_{ijk}$  se obtiene:

$$B_{ijk} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i}$$

Para las componentes Minkowskianas de la fuerza que obra sobre una partícula exploradora de masa en reposo  $m$  se obtiene:

$$f_i = m \frac{d^2 x^i}{ds^2} \quad ; \quad f_i = \Delta_{ip} f^p \quad ;$$

$$f_i = m B_{ijk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = m \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

Resumiendo: las componentes Minkowskianas de las fuerzas gravitacionales de Birkhoff son funciones cuadráticas de las ve-

locidades de Minkowski; los coeficientes de esas funciones cuadráticas son las componentes del tensor intensidad del campo de Birkhoff, y son a su vez combinaciones lineales de las derivadas parciales primeras del tensor potencial de Birkhoff  $h_{ij}$ .

Alberto Barajas<sup>5</sup> demostró que no es posible convertir a los senderos de Birkhoff en geodésicas de un espacio-tiempo curvo por medio de una transformación de coordenadas.

#### 8. LOS TRES EFECTOS CRUCIALES.

Consideremos un punto masa, de masa  $M$ , colocado permanentemente en el origen del sistema de coordenadas  $x, y, z$ , del espacio físico de un marco de referencia inercial. Sea  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  la distancia de un punto  $P$  del espacio físico al origen. Según el postulado B.4. el tensor potencial gravitacional  $h_{ij}$  del campo generado por ese punto masa es:

$$h_{ij} = \frac{M}{r} \delta_{ij} \quad . \quad (4)$$

Aquí  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker;  $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{44} = 1$  y  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ . La masa  $M$  esta medida en unidades adecuadas para que la constante de la gravitación resulte igual a 1. Una de estas unidades equivale a  $4.04 \cdot 10^{38}$  gramos. El tensor  $h_{ij}$  está definido para todos los acontecimientos del espacio-tiempo, con excepción de los puntos de la línea de universo del punto masa. Nótese que el tensor potencial es en este caso independiente del tiempo  $t$ . La ecuación (4) define al campo central.

Es fácil demostrar que las líneas de universo de las partículas exploradoras del campo central son planas. Las

ecuaciones diferenciales<sup>6</sup> de la trayectoria de una partícula exploradora que se mueve en el plano  $x, y$  son:

$$x'' = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{2Mx}{r^3}(x'^2 + y'^2) + \frac{4x'r'}{r^2} \quad (5)$$

$$y'' = -\frac{My}{r^3} - \frac{2My}{r^3}(x'^2 + y'^2) + \frac{4y'r'}{r^2}$$

Aquí el acento significa la derivada con respecto al elemento de arco  $s$ . La unidad de masa está elegida de manera que la constante gravitacional  $G$  resulte igual a uno.

De las ecuaciones (5) se obtiene para la órbita de un planeta en el sistema solar, aproximadamente una elipse, que está girando lentamente en su propio plano. Para el avance del perihelio por revolución se obtiene en primera aproximación<sup>6</sup>

$$\frac{6\pi M}{a(1-e^2)} \quad (6)$$

Aquí  $a$  es el semi-eje mayor de la órbita y  $e$  es la excentricidad. La fórmula (6) es idéntica a la de la Relatividad General de Einstein.

Para estudiar en la teoría de Birkhoff al fotón cuya línea de universo pasa por el acontecimiento  $A$ , y que se mueve en la dirección de coeficientes directores  $(\lambda, \mu, \nu)$  en el espacio físico, se introduce una familia de partículas. Las partículas de esta familia se mueven todas en la misma dirección  $(\lambda, \mu, \nu)$  en la que se mueve el fotón. Las líneas de universo de todas ellas pasan por  $A$ . Las masas en reposo de

las partículas de la familia forman una sucesión

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_n \dots$$

Las velocidades que tienen esas partículas en el acontecimiento A forman también una sucesión

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \dots$$

La energía total de todas las partículas de la familia es la misma:

$$E = \frac{m_n}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{para toda } n.$$

Para estudiar al fotón que tiene en A la energía  $h\nu$  se utiliza una familia de partículas tal que:

$$h\nu = \frac{m_n}{\sqrt{1-v_n^2}} \quad \text{para toda } n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1.$$

Una familia de este tipo se obtiene en la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1;$$

$$m_n = h\nu \sqrt{1-v_n^2}.$$

El fotón es entonces una partícula límite de una familia de

partículas de masa y de velocidad variables; la masa tiende a cero cuando la velocidad tiende a uno, conservándose constante la energía total de las partículas en un acontecimiento particular.

Para la desviación de los fotones en torno del Sol se posee en la teoría de Birkhoff<sup>6</sup> la fórmula Einsteiniana

$$\frac{4M}{p}$$

Aquí  $M$  es la masa del Sol, y  $p$  es la distancia de máximo acercamiento del fotón al centro del astro.

Para el corrimiento de las rayas espectrales hacia el rojo<sup>6</sup> se obtiene también, en primera aproximación, el mismo resultado que en la teoría de Einstein

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{M}{R} - \frac{m}{r}$$

Aquí  $\frac{d\lambda}{\lambda}$  mide el corrimiento relativo hacia el rojo de la raya espectral de longitud de onda  $\lambda$ ;  $M$  es la masa del Sol,  $R$  el radio del mismo;  $m$  es la masa de la tierra y  $r$  su radio. En la teoría de la gravitación de Birkhoff se obtienen en primera aproximación los mismos resultados que en la teoría de la relatividad general de Einstein, para los tres efectos cruciales que son:

- 1) el avance del perihelio de un planeta en su movimiento alrededor del Sol;
- 2) la desviación de los rayos luminosos en torno del Sol.
- 3) el corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales de la luz emitida por átomos que se encuentran en un

campo gravitacional.

Conviene hacer notar que el corrimiento de las rayas espectrales hacia el rojo se calcula como un efecto sobre el fotón viajero, y que todavía no se exploran los efectos del campo gravitacional sobre los niveles de energía de los electrones en los átomos.

### 9. PRINCIPIO VARIACIONAL.

De las ecuaciones (5) del movimiento de un planeta en torno del Sol se puede eliminar el parámetro elemento de arco, y substituir por el parámetro tiempo. Con el tiempo  $t$  como variable independiente, y designando con un punto la derivada con respecto a esta variable, las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{M}{r^3} [-x - xv^2 + 2\dot{x}r\dot{r}] \\ \ddot{y} &= -\frac{M}{r^3} [-y - yv^2 + 2\dot{y}r\dot{r}]\end{aligned}\quad (7)$$

Estas ecuaciones (7) se obtienen del siguiente principio variacional

$$\delta \int \frac{m}{2} e^{2M/r} (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt = 0 \quad (8)$$

Aquí  $m$  es la masa del planeta.

Las trayectorias de las partículas exploradoras (planetas) en el campo central de Birkhoff son pues las extremales del principio variacional (8). Este resultado obtenido por el autor<sup>7</sup> complementa el establecido por Alberto Barajas<sup>8</sup>

que afirma que las líneas de universo de estas partículas no son geodésicas de ningún espacio-tiempo.

El principio variacional (8) implica un teorema de conservación de energía. De (8) se obtiene para el Lagrangiano de la partícula exploradora del campo central:

$$L = \frac{m}{2} e^{2M/r} (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad . \quad (9)$$

Las cantidades de movimiento conjugadas de las coordenadas  $x$  y  $y$  son

$$p_x = m e^{2M/r} \dot{x} \quad ; \quad p_y = m e^{2M/r} \dot{y} \quad .$$

La energía de la partícula es entonces:

$$E = -\frac{m}{2} e^{2M/r} + \frac{m}{2} e^{2M/r} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad . \quad (10)$$

Para el caso del movimiento de los planetas reales en torno del Sol real,  $\frac{2M}{r} < 0.0005$ . La velocidad de los planetas reales es menor que  $2 \cdot 10^{-4}$  segundos-luz/segundo. La energía total  $E$  de un planeta es en primera aproximación igual a

$$E' = -\frac{Mm}{r} + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad . \quad (11)$$

[Se suprimió la constante aditiva  $-\frac{m}{2}$ ].

La energía  $E$  dada por (10) es en primera aproximación igual a la energía Newtoniana  $E'$  dada por (11). El autor estableció también<sup>6</sup> la conservación de una cantidad  $H$  que corresponde al momento angular clásico

$$H = \frac{E}{1 - v^2} (x\dot{y} - \dot{x}y) \quad . \quad (12)$$

En esta ecuación (12),  $v$  significa la velocidad del planeta.

#### 10. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS.

El campo de un punto masa en movimiento uniforme en un marco de referencia inercial, se obtiene por medio de una transformación de Lorentz del tensor potencial gravitacional de un punto masa en reposo en otro marco de referencia inercial.

Para calcular el campo de un punto masa en movimiento arbitrario es necesario introducir el concepto de campo instantáneo de un punto masa. Considérese un punto masa que sólo existe para el acontecimiento  $\underline{a}(\underline{\xi}^1, \underline{\xi}^2, \underline{\xi}^3, \underline{\xi}^4)$ , y que tiene allí una velocidad Minkowskiana cuyas componentes covariantes son  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$ . Según el postulado B.5 el campo de este punto masa se propaga con la velocidad de la luz. Este campo sólo existe para acontecimientos  $A$  tales que  $\underline{a}$  esté en su cono de luz del pasado; expresado de otro modo  $\underline{a}A$  debe ser segmento de la línea de universo de un rayo luminoso. Si  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ , entonces:

$$\Delta_{ij}(x^i - \underline{\xi}^i)(x^j - \underline{\xi}^j) = 0 \quad . \quad (13)$$

El campo  $h_{ij}$  del punto masa de masa  $M$  en  $A$ , es entonces:

$$h_{ij} = \frac{M(2 \underline{v}_i \underline{v}_j - \Delta_{ij})}{\Delta_{pq}(x^p - \underline{\xi}^p) \underline{v}^p} \quad . \quad (14)$$

La expresión<sup>9</sup> (14) es el "campo instantáneo" generado por

el punto masa de masa  $M$  en el acontecimiento  $a(\underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^3, \underline{x}^4)$ ; el punto masa tiene allí una velocidad cuyas componentes Minkowskianas covariantes son  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$ , y cuyas componentes contravariantes son  $(\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^3, \underline{v}^4)$ . El campo instantáneo sólo existe en los acontecimientos  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$  cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (13).

Es muy fácil generalizar la expresión (14) al caso de un punto masa en movimiento arbitrario. Basta hacer la hipótesis que llamamos postulado B.6. Esta suposición es equivalente a postular que el campo de un punto masa en movimiento arbitrario es independiente de su aceleración, y que sólo depende de su velocidad y de su posición en el espacio-tiempo. Para un punto masa en movimiento arbitrario vale la fórmula (14). El tensor  $h_{ij}$  está calculado para el acontecimiento  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . El acontecimiento  $a(\underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^3, \underline{x}^4)$  significa ahora el acontecimiento retardado con respecto a  $A$ , en la línea de universo del punto masa.

Con ayuda de la expresión (14) se pueden establecer las ecuaciones del movimiento de dos puntos masa de masas comparables, o sea las ecuaciones diferenciales del problema de los dos cuerpos. Estas ecuaciones admiten una solución plana<sup>7</sup> que es una aproximación a la Newtoniana. Para los movimientos de una estrella binaria se obtiene un avance del periastron que está dado por la expresión:

$$2\pi \frac{3m_1^2 + 7m_1 m_2 + 3m_2^2}{(m_1 + m_2) a^3 (1-e^2)^2}$$

La fórmula expresa el avance por revolución. Las masas de las componentes de la binaria en unidades relativistas son  $m_1$  y  $m_2$ .

$m_2$ . La distancia media entre los astros es  $a$ ;  $e$  es la excentricidad de la órbita.

Fernando Alba<sup>10</sup> ha calculado, usando la expresión (14), el campo gravitacional debido a una esfera en rotación rápida. Obtuvo también las ecuaciones del movimiento de una partícula exploradora en ese campo.

#### 11. LA ECUACION DEL CAMPO.

El postulado B.5. puede expresarse simbólicamente como sigue:

$$\square h_{ij} = 0 \quad (15)$$

para el espacio físico vacío de un marco de referencia inercial. Aquí " $\square$ " es el d'Alembertiano.

$$\square = \Delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} .$$

Es fácil comprobar que la expresión (14) satisface la ecuación (15) del campo para el espacio físico vacío. Esto vale para todos los acontecimientos del espacio-tiempo con excepción de los que están colocados en la línea de universo del punto masa que genera el campo.

Según el postulado B.7. el tensor potencial gravitacional debido a varios puntos masa, es igual a la suma de los tensores potenciales gravitacionales de los campos generados por cada uno de ellos. Como el d'Alembertiano es distributivo con respecto a una suma de funciones, la ecuación (15) sigue siendo válida para el caso del campo generado por varios puntos masa

sa. Los acontecimientos excepcionales son los de las líneas de universo de las masas generadoras del campo.

El tensor potencial gravitacional de una distribución continua de materia se obtiene por el método usual de dividir el espacio físico en elementos de volumen  $\Delta V$ , y en seguida considerar la masa encerrada en cada uno de esos  $\Delta V$  como punto masa concentrado en un punto interior de  $\Delta V$ .

El campo del conjunto de tales puntos masa es aproximadamente igual al de la distribución continua. La expresión exacta del campo de la distribución continua se obtiene haciendo tender a cero la cuerda máxima en  $\Delta V$ , y haciendo tender simultáneamente a infinito el número total de los  $\Delta V$ .

Para la distribución continua de materia se obtiene la ecuación del campo<sup>6</sup>:

$$\square h_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad . \quad (16)$$

Aquí  $T_{ij}$  es el tensor de la energía y cantidades de movimiento. La ecuación (16) es la ecuación general del campo en la teoría de Birkhoff.

Marcos Moshinsky<sup>11</sup> logró establecer la interacción de un campo electromagnético y un campo gravitacional de Birkhoff. Obtuvo por ese camino la desviación de los rayos luminosos en torno del Sol. La presencia de un campo gravitacional perturbador de un campo electromagnético se acusa en los fenómenos luminosos por la aparición de un índice de refracción.

## 12. VENTAJAS DE LA TEORIA DE BIRKHOFF.

El éxito de la teoría de Birkhoff para explicar los tres

efectos cruciales, y para establecer la interacción entre los campos electromagnético y gravitacional, sugiere la posibilidad de una cosmología Birkhoffiana. El autor<sup>12</sup> desarrolló esta teoría obteniendo resultados muy semejantes a los de la cosmología de Milne en un espacio-tiempo llano. Para la edad de la expansión del universo se obtienen 1860 millones de años. El autor<sup>13</sup> estableció también la teoría de las correcciones de las magnitudes de las galaxias para la cosmología Birkhoffiana.

La teoría de la gravitación de Birkhoff permite usar como marco de referencia el espacio-tiempo llano de Minkowski para fenómenos gravitacionales, electromagnéticos y cósmicos. Una partícula exploradora que se mueve en un campo combinado electromagnético y gravitacional, tiene por ecuaciones del movimiento:

$$m \frac{d^2 x^i}{ds^2} = q E_j^i \frac{dx^j}{ds} + m B_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} .$$

Aquí  $E_j^i$  es el tensor del campo electromagnético. La masa en reposo de la partícula exploradora es  $m$  y su carga eléctrica es  $q$ . Tanto el tensor electromagnético  $E_j^i$  como la intensidad del campo gravitacional  $B_{jk}^i$  satisfacen la misma ecuación del campo en el espacio físico vacío:

$$\square E_j^i = 0 .$$

$$\square B_{jk}^i = 0 .$$

G.D. Birkhoff sugirió que se exploraran las posibilidades de otros términos de la fuerza Minkowskiana, considerando a ésta

como un desarrollo en serie según potencias crecientes de las velocidades:

$$m \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \varphi^i + E_j^i \frac{dx^j}{ds} + E_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + C_{jkl}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} + \dots$$

La teoría de la gravitación de Birkhoff explica todos los fenómenos que se han podido explicar dentro de la teoría de la relatividad general de Einstein. Para desarrollos ulteriores tiene la teoría de Birkhoff la enorme ventaja de la simplicidad de la geometría del espacio-tiempo llano de Minkowski, comparada con lo terriblemente complejo de la geometría del espacio-tiempo curvo de cuatro dimensiones. Como ventajas fundamentales de la teoría de Birkhoff están las siguientes:

- 1) En un mismo marco de referencia -en el espacio-tiempo llano de Minkowski- se colocan todos los fenómenos físicos: gravitacionales, electromagnéticos y cósmicos.
- 2) No se recurre a un principio que se aplica a un solo caso, como es el de substituir al campo de fuerzas gravitacionales por la estructura geométrica del espacio-tiempo curvo.
- 3) La teoría de Birkhoff es perfectamente compatible con la teoría de la relatividad especial de Einstein que se ha comprobado en numerosos experimentos.

#### Referencias.

1. A. Einstein, *Annalen der Physik* 40 (1916).
2. G.D. Birkhoff, *Proc. of the Nat. Acad. Sc.* 29, No. 9, pp. 231-239 (Agosto 1943).

3. H. Minkowski, Conferencia sustentada ante la 90 asamblea de los naturalistas y médicos alemanes en Colonia. (21 de septiembre de 1908). Publicada bajo el título Raum und Zeit. Teubner. Leipzig y Berlin (1909).
4. A. Barajas. Anuario de la Comisión Impulsora y Coordinadora de la Investigación Científica de México, pp. 25-30 (1945).
5. A. Barajas, Proc. of the Nat. Acad. Sc., 30, No. 30 pp. 54-57 (Marzo, 1944).
6. J. D. Birkhoff. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Vol. I Nos. 4 y 5, pp. 1-23 (Julio y Octubre, 1944).
7. C. Graef Fernández. Rev. Mex. Fis. II, No. 2 pp 180-191 (1953).
8. J. Graef Ferrández. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. V, Nos. 1-4, pp. 7-14 (1948).
9. C. Graef Ferrández. Rev. Mex. Fis. I, No. 1 pp 11-27 (1952)
10. F. Alba Andrade. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. II, No. 3, pp. 57-63 (Julio, 1945).
11. M. Moshinsky, Phys. Rev. 80, pp. 514-519 (1950).
12. C. Graef Fernández. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. II, No. 3, pp. 43-50 (Julio, 1945).
13. C. Graef Fernández. Anuario de la Comisión Impulsora y Coordinadora de la Investigación Científica de México. pp. 51-66 (1945).

LAS FUERZAS GRAVITACIONALES DE BIRKHÖFF EN EL  
ESPACIO FÍSICO.

C. Graef Fernández.

La teoría de la gravitación de Birkhoff<sup>1</sup> se desarrolló en el espacio-tiempo plano de Minkowski. El instrumento matemático más adecuado para su análisis es la geometría seudoeuclídea de cuatro dimensiones correspondiente a la métrica<sup>2</sup> definida por el cuadrado del elemento de arco:

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2 \quad (1)$$

Aquí  $x^1 \equiv t$  es el tiempo, y  $x^2, x^3, x^4$ , son las tres coordenadas espaciales  $x, y, z$ , en ese orden.

La velocidad de la luz en el vacío se elige igual a uno, midiendo las distancias en el espacio físico en segundos-luz y los tiempos en segundos.

Para la interpretación física de los resultados matemáticos no es la geometría seudoeuclídea de cuatro dimensiones la más adecuada. Los cuadrivectores de la velocidad, la aceleración, la fuerza y la cantidad de movimientos no tienen la misma nitidez intuitiva que los correspondientes vectores del espacio físico de tres dimen-

siones. Tampoco se presta la geometría pseudo-euclidiana de cuatro dimensiones para la estimación de órdenes de magnitud de los distintos términos. El cuadrivector velocidad tiene por magnitud uno, independientemente de la magnitud del vector velocidad en el espacio físico. Cuando una partícula tiene una velocidad moderada comparada con la velocidad de la luz, la primera componente del cuadrivector velocidad es aproximadamente igual a uno, y las otras tres componentes son muy pequeñas. Conviene expresar la teoría de la Gravitación de Birkhoff en el espacio físico de tres dimensiones para comparar sus resultados con los Newtonianos. En el espacio físico se perciben además relaciones que no se habían visto en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

El cuadrivector fuerza por unidad de masa de una partícula exploradora de un campo gravitacional de Birkhoff<sup>3</sup> es:

$$f_i = \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} . \quad (2)$$

Este cuadrivector es idéntico al cuadrivector aceleración. Las componentes contravariantes son:

$$f^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} . \quad (3)$$

La relación entre las componentes contravariantes y las covariantes se establece con el tensor<sup>4</sup> métrico fundamental de la teoría de la Relatividad Especial:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$f_i = \Delta_{ij} f^j$$

$$f_1 = f^1; f_2 = -f^2, f_3 = -f^3; f_4 = -f^4 .$$

De las ecuaciones (2) y (4) se obtiene:

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} = + \left( \frac{\partial h_{1j}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^1} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} = - \left( \frac{\partial h_{aj}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^a} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (5)$$

$$a = 2, 3, 4.$$

Nuestro propósito es expresar con respecto al tiempo las segundas derivadas de las coordenadas del espacio físico  $x, y, z$ , en función de las derivadas parciales del tensor potencial gravitacional  $h_{ij}$  y de las componentes del vector de velocidad. Con este objeto tenemos que transformar derivadas con respecto al arco  $s$  en derivadas con respecto al tiempo  $t \equiv x^1$ .

Por brevedad usamos un acento para las derivadas con respecto a  $s$  y un punto para las derivadas con respecto al tiempo.

$$\dot{x}^a = \frac{x^{a'}}{t'}$$

$$\ddot{x}^a = \frac{x^{a''}}{t'^2} - \frac{x^{a'}}{t'} \cdot \frac{t''}{t'^2} \quad (6)$$

$$i = 2, 3, 4.$$

Hay que recordar que:

$$t'' = \frac{d^2 x^1}{ds^2}$$

De las ecuaciones (6) y (5) se obtiene:

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = \begin{cases} \left( \frac{\partial h_{aj}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^a} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k \\ \left( \frac{\partial h_{1j}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial t} \right) \dot{x}^a \dot{x}^j \dot{x}^k \end{cases} \quad (7)$$

$$\alpha = 2, 3, 4.$$

Es pertinente establecer la convención de que los índices griegos adquirirán los valores 2, 3, 4, los índices latinos tendrán los valores 1, 2, 3, 4. La convención de Einstein sobre los índices repetidos se aplicará tanto a los índices latinos como a los griegos.

En la ecuación (7) conviene separar el tiempo  $t = x^1$  de las coordenadas espaciales  $x, y, z$ .

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial h_{a1}}{\partial t} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^a} \right) \\ + \left( \frac{\partial h_{a1}}{\partial x^\beta} - 2 \frac{\partial h_{\beta 1}}{\partial x^a} + \frac{\partial h_{a\beta}}{\partial t} \right) \dot{x}^\beta \\ + \left( \frac{\partial h_{a\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^a} \right) \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \\ + \left( \frac{\partial h_{\beta 1}}{\partial t} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^\beta} \right) \dot{x}^a \dot{x}^\beta \\ + \left( \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial t} - \frac{\partial h_{\beta 1}}{\partial x^\gamma} \right) \dot{x}^a \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \end{array} \right. \quad (8)$$

Se observa que la aceleración en el espacio físico en la teoría de Birkhoff es una función de tercer grado de las componentes del vector velocidad.

Para construir una teoría genuina de la gravitación en el espacio físico es necesario traducir las componentes del tensor potencial gravitacional  $h_{ij}$ .

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Un cambio de orientación de los ejes espaciales  $x, y, z$  es una transformación de Lorentz muy especial. En un cambio tal la componente  $h_{11}$  permanece invariante; las componentes  $h_{12} = h_{21}$ ;  $h_{13} = h_{31}$  y  $h_{14} = h_{41}$  se transforman como las componentes de un vector del espacio físico. El esquema:

$$\begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix}$$

se transforma como un tensor del espacio físico. En los cambios de orientación puros de los ejes coordenados del espacio físico  $h_{11}$  se porta como un escalar la terna  $h_{12}, h_{13}, h_{14}$  se porta como un vector; la matriz

$$\begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix}$$

se porta como un tensor. Se justifica entonces describir al campo gravitacional en el espacio físico por medio de un potencial escalar  $\Phi$ , de un potencial vectorial  $\vec{P}$  y de un potencial tensorial  $T$  definidos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv h_{11}; \\ \vec{P} &= (P^x, P^y, P^z) = (h_{12}, h_{13}, h_{14}), \\ T &= \begin{pmatrix} T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Como consecuencia de la simetría del tensor  $h_{ij}$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 P^x &= h_{12} = h_{21} ; \\
 P^y &= h_{13} = h_{31} ; \\
 P^z &= h_{14} = h_{41} ; \\
 T^{xy} &= T^{yx} = h_{23} = h_{32} ; \\
 T^{xz} &= T^{zx} = h_{24} = h_{42} ; \\
 T^{yz} &= T^{zy} = h_{34} = h_{43} .
 \end{aligned} \tag{11}$$

De la ecuación (8) se obtiene para las tres componentes del vector aceleración en el espacio físico:

[ Ecuaciones (12) ]

$$\ddot{x} = I_x + L_x + Q_x + C_x .$$

$$I_x = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial P^x}{\partial t} \right)$$

$$L_x = \begin{cases} \left( \frac{\partial P^x}{\partial x} - \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \right) \dot{x} \\ + 2 \left( \frac{\partial P^y}{\partial x} - \frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{y} \\ + 2 \left( \frac{\partial P^z}{\partial x} - \frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{z} \end{cases}$$

$$Q_x = \begin{cases} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial P^x}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \\ + \left( - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P^y}{\partial t} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} - \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} \right) \dot{x} \dot{y} \\ + \left( - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial P^z}{\partial t} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} - \frac{\partial T^{xx}}{\partial z} \right) \dot{x} \dot{z} + \left( \frac{\partial T^{yy}}{\partial x} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \right) \dot{y}^2 \\ + 2 \left( \frac{\partial T^{yz}}{\partial x} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} \right) \dot{y} \dot{z} + \left( \frac{\partial T^{zz}}{\partial x} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial z} \right) \dot{z}^2 \end{cases}$$

$$C_x = \left\{ \begin{array}{l} + \left( -\frac{\partial P^x}{\partial x} + \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \right) \dot{x}^3 \\ + \left( -\frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \dot{y} \\ + \left( -\frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \dot{z} \\ + \left( -\frac{\partial P^y}{\partial y} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y}^2 \\ + \left( -\frac{\partial P^y}{\partial z} + \frac{\partial P^z}{\partial y} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y} \dot{z} \\ + \left( -\frac{\partial P^z}{\partial z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{z}^2 \end{array} \right.$$

$$\ddot{y} = I_y + L_y + Q_y + C_y .$$

$$I_y = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial P^y}{\partial t} \right)$$

$$L_y = \left\{ \begin{array}{l} + \left( 2 \frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial x} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{x} \\ + \left( \frac{\partial P^y}{\partial y} - \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \right) \dot{y} \quad + \left( 2 \frac{\partial P^z}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial z} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{z} \end{array} \right.$$

$$Q_y = \left\{ \begin{array}{l} + \left( \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} \right) \dot{x}^2 \\ + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial P^x}{\partial t} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} - \frac{\partial T^{yy}}{\partial x} \right) \dot{x} \dot{y} \\ + \left( 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial x} \right) \dot{x} \dot{z} \quad + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P^y}{\partial t} \right) \dot{y}^2 \\ + \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial P^z}{\partial t} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} - \frac{\partial T^{yy}}{\partial z} \right) \dot{y} \dot{z} \quad + \left( \frac{\partial T^{zz}}{\partial y} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial z} \right) \dot{z}^2 \end{array} \right.$$

$$C_y = \left\{ \begin{array}{l} + \left( -\frac{\partial P^x}{\partial x} + \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \dot{y} \\ + \left( -\frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y}^2 \\ + \left( -\frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y} \dot{z} \\ + \left( -\frac{\partial P^y}{\partial y} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \right) \dot{y}^3 \\ + \left( -\frac{\partial P^y}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial y} + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{y}^2 \dot{z} \\ + \left( -\frac{\partial P^z}{\partial z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} \right) \dot{y} \dot{z}^2 \end{array} \right.$$

$$y = I_x + L_x + Q_x + C_x$$

$$I_x = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial t} \right)$$

$$L_x = \left\{ \begin{array}{l} + \left( 2 \frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial x} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{x} \\ + \left( 2 \frac{\partial P^y}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial y} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{y} \\ + \left( \frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{z} \\ + \left( \frac{\partial T^{xx}}{\partial z} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} \right) \dot{x} \end{array} \right.$$

$$Q_x = \left\{ \begin{array}{l} + \left( 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial x} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} \right) \dot{x} \dot{y} + \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial P^x}{\partial t} + \frac{\partial T^{xx}}{\partial z} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} \right) \dot{x} \dot{z} \\ + \left( \frac{\partial T^{yy}}{\partial z} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} \right) \dot{y}^2 + \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P^y}{\partial t} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial z} - \frac{\partial T^{zz}}{\partial y} \right) \dot{y} \dot{z} + \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial P^z}{\partial t} \right) \dot{z}^2 \end{array} \right.$$

$$C_z = \left\{ \begin{array}{l} + \left( -\frac{\partial P^x}{\partial x} + \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \dot{z} \\ + \left( -\frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y} \dot{z} \\ + \left( -\frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial x} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{z}^2 \\ + \left( -\frac{\partial P^y}{\partial y} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \right) \dot{y}^2 \dot{z} \\ + \left( -\frac{\partial P^y}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial y} + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{y} \dot{z}^2 \\ + \left( -\frac{\partial P^z}{\partial z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} \right) \dot{z}^3 \end{array} \right.$$

Para poder condensar las ecuaciones (12) a una forma manejable conviene utilizar la notación vectorial siguiente:

Fórmulas (13):

Vector aceleración  $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ ;

Vector velocidad  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ;

$$\nabla\Phi = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{v} = P^x \dot{x} + P^y \dot{y} + P^z \dot{z};$$

$$\nabla \vec{P} \cdot \vec{v} = \left( \begin{array}{l} \left( \frac{\partial P^x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial P^y}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial P^z}{\partial x} \dot{z} \right) \\ \left( \frac{\partial P^x}{\partial y} \dot{x} + \frac{\partial P^y}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial P^z}{\partial y} \dot{z} \right) \\ \left( \frac{\partial P^x}{\partial z} \dot{x} + \frac{\partial P^y}{\partial z} \dot{y} + \frac{\partial P^z}{\partial z} \dot{z} \right) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \frac{\partial P^x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial P^x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial P^x}{\partial z} ; \\ \dot{x} \frac{\partial P^y}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial P^y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial P^y}{\partial z} ; \\ \dot{x} \frac{\partial P^z}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial P^z}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial P^z}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 T \vec{v} &= \begin{pmatrix} T^{xx} \dot{x} + T^{xy} \dot{y} + T^{xz} \dot{z} ; \\ T^{yx} \dot{x} + T^{yy} \dot{y} + T^{yz} \dot{z} ; \\ T^{zx} \dot{x} + T^{zy} \dot{y} + T^{zz} \dot{z} \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial T \vec{v}}{\partial t} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \dot{y} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \dot{z} \\ \frac{\partial T^{yx}}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \dot{y} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \dot{z} \\ \frac{\partial T^{zx}}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial T^{zy}}{\partial t} \dot{y} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} \dot{z} \end{pmatrix} \\
 [(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) T \vec{v}]^x &= \begin{pmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} \dot{x} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} \dot{y} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{xx}}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial z} \dot{z}^2 \end{pmatrix} \\
 [(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) T \vec{v}]^y &= \begin{pmatrix} \frac{\partial T^{yx}}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial T^{yy}}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial x} \dot{x} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{yx}}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} \dot{y} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{yx}}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial z} \dot{z}^2 \end{pmatrix} ;
 \end{aligned}$$

$$[(\vec{v} \cdot \nabla) T \vec{v}]^i = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} \dot{x} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} \dot{y} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{xx}}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} \dot{z}^2 \end{array} \right]$$

$$(\vec{T} \vec{v}) \cdot \vec{v} = T^{xx} \dot{x}^2 + 2 T^{xy} \dot{x} \dot{y} + 2 T^{xz} \dot{x} \dot{z} + T^{yy} \dot{y}^2 + 2 T^{yz} \dot{y} \dot{z} + T^{zz} \dot{z}^2 ;$$

$$\nabla \cdot ((\vec{T} \vec{v}) \vec{v}) = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial x} \dot{y}^2 + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial x} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial x} \dot{z}^2 \\ \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \dot{y}^2 + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial y} \dot{z}^2 \\ \frac{\partial T^{xx}}{\partial z} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial z} \dot{y}^2 + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} \dot{z}^2 \end{array} \right]$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{P} \cdot \vec{v}) =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial P^x}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial P^y}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial P^z}{\partial x} \dot{x} \dot{z} \\ + \frac{\partial P^x}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial P^y}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial P^z}{\partial y} \dot{y} \dot{z} \\ + \frac{\partial P^x}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial P^y}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial P^z}{\partial z} \dot{z}^2 \end{array} \right]$$

Con esta notación se condensan las ecuaciones (12) a una ecuación:

$$\vec{a} = \left[ \begin{array}{l} \nabla \Phi - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{P} + 2 \nabla (\vec{P} \cdot \vec{v}) \\ - \frac{\partial T}{\partial t} \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) (T \vec{v}) + \nabla [(T \vec{v}) \cdot \vec{v}] \\ - \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla) \Phi + \vec{v} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{v} - \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{P} \cdot \vec{v}) \\ + \vec{v} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial t} \vec{v} \right) \cdot \vec{v} \right] \end{array} \right] \quad (14)$$

Considérese una partícula exploradora del campo gravitacional de Birkhoff. Como el potencial vectorial  $\vec{P}$  y el potencial tensorial  $T$  son funciones de las coordenadas  $x, y, z$ , y del tiempo  $t$  estas dos cantidades varían a lo largo de la trayectoria de la partícula. Al pasar ésta de la posición  $x, y, z$  que ocupa en el tiempo  $t$ , a la posición  $x + dx, y + dy, z + dz$  que ocupa en el tiempo  $t + dt$ , el potencial vectorial pasa de un valor inicial  $\vec{P}$  a un valor final  $\vec{P} + d\vec{P}$ . Designamos con :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \text{ y } \frac{dT}{dt}$$

a las "derivadas sustanciales con respecto al tiempo" en el sentido de Euler. La derivada  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  es la rapidez con la que varía el potencial vectorial al moverse la partícula, y  $\frac{dT}{dt}$  es la rapidez con la que varía el potencial tensorial.

La ecuación (14) se simplifica mucho si en vez de expresar la aceleración en función de los potenciales escalar, vectorial y tensorial, se expresa en esos términos el vector

$$\vec{a} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{1 - v^2}$$

Aquí  $v^2$  es el cuadrado del vector velocidad  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ .

Se obtiene:

$$\bar{a} + \frac{\bar{a}(\bar{a} \cdot \bar{v})}{1 - v^2} \bar{v} = \begin{cases} V [ \Phi + 2 \bar{P} \cdot \bar{v} + (T \bar{v}) \cdot \bar{v} ] \\ - \frac{d\bar{P}}{dt} - \frac{dT}{dt} \bar{v} \end{cases} \quad (15)$$

Para las derivadas substanciales se tiene:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{P}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) T .$$

La ecuación (15) es la ecuación del movimiento de una partícula exploradora en el campo gravitacional de Birkhoff descrito por su potencial escalar  $\Phi$ , su potencial vectorial  $\bar{P}$  y su potencial tensorial  $T$ . Obsérvese que el primer miembro de la ecuación (15) se puede expresar como:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \cdot \sqrt{1 - v^2} = \bar{a} + \frac{(\bar{a} \cdot \bar{v})}{1 - v^2} \bar{v} .$$

#### REFERENCIAS

1. G. D. Birkhoff. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1, 1 - 23 (1944)
2. G. D. Birkhoff. locus cit. página. 10.
3. G. D. Birkhoff. locus cit. página. 15.
4. C. Graef Fernández. Revista Mexicana de Física. 2, 181, 182. (1953)

## ORBITS IN BIRKHOFF'S CENTRAL FIELD

BY

CARLOS GRAEF-FERNÁNDEZ

**1. Relativistic effects.** Any theory of gravitation which claims to predict the motion of the planets in the solar system for a long time interval has to take into account relativistic effects. Best known of these effects is a slow advance of the perihelion of Mercury, which was predicted by Einstein and which has been confirmed by observation. This relativistic fine effect cannot be explained by Newton's theory.

Other well-known relativistic effects, also predicted by Einstein, include the bending of light rays around the Sun, and a red shift of spectral lines in the light coming from massive stars.

There are aspects of Newton's theory which are incompatible with modern physics. For example, in Newton's theory a gravitational effect is propagated with infinite speed. If such were the case one would have an instantaneous physical signal in the universe; this is in open contradiction with Einstein's theory of special relativity which is in such excellent agreement with the experimental results.

**2. Birkhoff's general theory.** Birkhoff's theory of gravitation [1] yields the effects mentioned above in a very simple way. It is in perfect agreement with Einstein's theory of special relativity, making gravitational effects propagate in vacuum with the speed of light. Its reference frame is Minkowski's four-dimensional flat space-time which is the reference frame for electromagnetic phenomena. Gravitational and electromagnetic forces are superimposed in a very elegant and natural manner [2]. From the standpoint of field theory there is an interaction of Birkhoff's gravitational field and the electromagnetic and pair fields [3].

Another assumption of Birkhoff's theory can be interpreted as a form of Einstein's equivalence principle: given a gravitational field and an event  $A$ , there always exists in space-time a system of coordinates  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$  such that

$$(1) \quad \left( \frac{d^2 \xi^i}{ds^2} \right)_A = 0; \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

for all exploring particles whose world-lines pass through  $A$ . Here  $s$  is Minkowski's arc length in flat four-dimensional space-time. Of the four coordinates  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ , three give the location of the exploring particle in physical space, and one of them is the time coordinate. Equation (1) states that one can choose a system of coordinates in space-time in such a way that

particles passing through a point of physical space at a certain instant, appear to have zero acceleration.

As shown by A. Barajas [4] equation (1) leads to differential equations for orbits in space-time, of the general form

$$(2) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} = B_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}.$$

Here  $x^1, x^2, x^3, x^4$  are the time and space coordinates in an inertial reference frame. The arc-element in Minkowski's space-time is denoted by  $ds$ . Using the light-second as a unit of length and the second as a unit of time, we have

$$(3) \quad ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2.$$

We have chosen  $x^1$  as the time coordinate, and  $x^2, x^3, x^4$  as the space coordinates. In equation (2) we are using Einstein's summation convention on repeated indices; the indices run from 1 to 4.

The orbits defined by equation (2) are paths [5] and  $B_{jk}^i$  is an affine connection. In Einstein's general relativity these paths are identified with the geodesics of a curved four-dimensional space-time. In Birkhoff's theory they are considered as paths immersed in Minkowski's flat four-dimensional space-time. In a flat space-time the affine connection  $B_{jk}^i$  is a tensor. The completely covariant components of this tensor [6, p. 126] are given in terms of a doubly covariant gravitational field tensor  $h_{ij}$  by

$$(4) \quad B_{ijk} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j}.$$

One radical difference between Einstein's theory of general relativity and Birkhoff's theory of gravitation is that, where in Einstein the coordinates have no precise meaning, in Birkhoff the coordinates are the usual inertial space and time coordinates used in astronomy. This is a great advantage in dealing with measurements.

**3. Birkhoff's central field.** We call "central field" the gravitational field of a mass-point at rest in an inertial reference frame. We assume that a mass-point of rest-mass  $M$  is permanently at the origin of a system of coordinates of an inertial reference frame. The gravitational potential tensor [7] of the field generated by such a mass-point is

$$(5) \quad h_{ij} = \delta_{ij} \frac{M}{r}.$$

Here  $r$  is the distance from the field-point to the central mass-point in physical space, and  $\delta_{ij}$  is Kronecker's delta.

We shall use for the coordinates in physical space in the inertial reference

## ORBITS IN BIRKHOFF'S CENTRAL FIELD

169

frame either  $x, y, z$  or  $x^2, x^3, x^4$ ; the time shall be either  $t$  or  $x^1$ . The distance  $r$  from the field-point to the mass-point is then

$$r = |\sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}| = |\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}|.$$

The matrix of the gravitational potential tensor (5) is

$$\begin{pmatrix} M/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M/r \end{pmatrix}$$

We are using here a system of units in which the velocity of light in vacuum is unity. For the time being we use as a unit of length the light-second, and as a unit of time the second. Our provisional unit of mass is such that it produces on an exploring particle, at rest at a distance of one light-second, an acceleration of one light-second per second per second. One gram is equal to  $2.4731 \times 10^{-39}$  units of this system. In these units the unit of mass is equivalent to one light-second.

A. Barajas and the author used the gravitational potential tensor (5) for the field generated by a central mass-point, as a postulate in an "action at a distance" presentation of Birkhoff's theory [6; 8]. G. D. Birkhoff [1, pp. 16, 17] proved that the gravitational field of a spherically symmetric mass distribution is exactly equal to the field of a mass-point, for field-points lying outside of the mass distribution; the mass of the mass-point being equal to the total mass of the distribution. One can thus consider the gravitational fields of the Sun and of the stars as central fields.

From equation (4) and from the gravitational potential tensor (5) one finds the completely covariant components of the tensor  $B_{ijk}$ . Raising the first index, by the standard tensor procedure, one obtains  $B^i_{jk}$  for the central field. Substituting these tensor components in equation (2), one obtains three equations [2, p. 283] of the form

$$x'' = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{2Mx}{r^3}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{Mx'r'}{r^2}.$$

Here the accent denotes differentiation with respect to Minkowski's arc length  $s$ .

For an analysis of the orbits in physical space it is convenient to use the time  $t$  as an independent variable. We shall denote derivatives with respect to the time by a dot placed above the symbol of the function. The three principal functions are the coordinates  $x, y, z$  of the exploring particle; we use as auxiliary functions the radius vector  $r$  and the velocity  $v$  which is defined by

$$v = |\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}|.$$

The differential equations of the orbits, with the time as an independent variable [9, p. 184], are

$$(6) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{M}{r^3} (-x - xv^2 + 2r\dot{x}\dot{r}); \\ \ddot{y} &= \frac{M}{r^3} (-y - yv^2 + 2rj\dot{r}); \\ \ddot{z} &= \frac{M}{r^3} (-z - zv^2 + 2r\dot{z}\dot{r}). \end{aligned}$$

**4. Conservation laws.** It is easy to prove that there is a conservation law for a generalized angular momentum of an exploring particle in Birkhoff's central field [1, p. 19]; [10]. Let  $\alpha$  be the Newtonian angular momentum vector per unit mass of the exploring particle

$$\alpha = (yz - yz, zx - \dot{z}x, xy - \dot{x}y).$$

From equations (6) it follows that

$$\dot{\alpha} = \frac{2M\dot{r}}{r^2} \alpha.$$

Integrating this equation we obtain

$$(7) \quad H = e^{2M/r} \alpha.$$

Here  $H$  is a constant vector. This vector  $H$  can be considered as a generalized angular momentum vector per unit mass; it is preserved during the motion of the exploring particle.

Since  $H$  is a constant vector, the Newtonian angular momentum vector per unit mass  $\alpha$  keeps its direction during the motion. It follows that all orbits of exploring particles in Birkhoff's central field are plane orbits.

The equations of motion (6) can be derived from the Lagrangian [9]

$$(8) \quad L = \frac{1}{2} e^{2M/r} (1 + v^2),$$

in the sense that equations (6) are equivalent to the variational equations

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Thus the orbits are extremals given by the variational principle

$$\delta \int_A^B \frac{1}{2} e^{2M/r} (1 + v^2) dt.$$

Correspondingly, the generalized energy

$$\Lambda = \frac{1}{2} e^{2M/r} (-1 + v^2),$$

is constant along any orbit in a central field. So, therefore, is [10]

$$(9) \quad E = \frac{1}{2} + \Lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2M/r} (-1 + v^2),$$

which is approximately equal to the Newtonian energy per unit of mass of the exploring particle in question.

We shall include under the name "exploring particles" both ordinary particles and photons. Ordinary particles have a non-zero rest-mass and can never reach the velocity of light. Photons have a zero rest-mass and move always with the velocity of light. In paragraph 6 we deal in detail with the photon as an exploring particle. Provisionally we can consider the photon as the limiting particle of a family of particles of constant energy per unit of mass, when the velocity tends to unity. From (9) we obtain

$$(10) \quad \begin{aligned} E &< \frac{1}{2} && \text{for ordinary particles;} \\ E &= \frac{1}{2} && \text{for the photon;} \\ E &\leq \frac{1}{2} && \text{for all particles.} \end{aligned}$$

Since in Birkhoff's central field there is a conservation law for a generalized energy (9), and there is also a conservation law for a generalized angular momentum (7), the orbits of this field have many analogies with the orbits of Newton's central field. The remainder of this paper will be devoted to analyse the types of orbits and their stability in Birkhoff's central field.

We shall call "energy" of an exploring particle the generalized energy per unit mass  $E$ , given by equation (9); and we shall call "angular momentum" of the exploring particle the magnitude  $H$  of the generalized angular momentum vector per unit mass  $H$ , given by equation (7).

**5. Natural units for the central field.** For the discussion of the orbits in the central field it is convenient to make a change of units. In the system of units introduced in paragraph 3 the masses were measured in light-seconds. Let us use as a unit of length the central mass  $M$  itself. Let  $M$  denote, as before, the central mass measured in light-seconds. If we use for unit of time  $M$  seconds, we obtain again unity for the speed of light. Hence our new unit of length shall be equal to  $M$  light-seconds, and our new unit of time shall be equal to  $M$  seconds. With these units the velocities are measured again as fractions of the velocity of light.

Since the orbits are plane orbits we may use plane polar coordinates. The laws of conservation of energy and of conservation of angular momentum are for these coordinates and in the new units:

$$(11) \quad E = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2/r} (-1 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2);$$

$$(12) \quad H = e^{2/r} r^2 \dot{\theta}.$$

The introduction of the new units has the advantage of reducing the discussion of all central fields to just one.

**6. The photon.** We treat the photon as the limiting particle of a family of particles when the rest mass of the particle tends to zero and its velocity tends to the velocity of light. We construct a family of particles

$$m_n; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

The photon shall be

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n.$$

Let  $\mu_n$  be the rest-mass of the particle  $m_n$ . We shall choose  $\mu_n \neq 0$ , but

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0.$$

Consider the point  $(r_0, \theta_0)$  in the central field. Let us analyse the orbit of the photon which passes through that point in a given direction, and which has at that point the energy  $\gamma$ . We shoot in the given direction the particle  $m_n$  of the family, giving it a velocity  $v_n$ , such that

$$\gamma = \frac{\mu_n}{\sqrt{1 - v_n^2}}.$$

Note that each member  $m_n$  of the family is given a different velocity  $v_n$ , but that all members of the family have at the point  $(r_0, \theta_0)$  the same energy of motion  $\gamma$ . This energy of motion is the energy released when the particle is annihilated; it is the sum of the energy contained in the rest-mass  $\mu_n$  and in the kinetic energy of the particle. Expressing the velocity  $v_n$  of the particle  $m_n$  in terms of the energy of motion  $\gamma$  and of the mass  $\mu_n$ , we obtain

$$v_n = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_n}{\gamma}\right)^2}.$$

For the photon we have  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu_n \rightarrow 0$ ,  $v_n \rightarrow 1$ . The energy  $E$  of the photon in its orbit, is obtained as

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n,$$

where  $E_n$  is the energy of the particle  $m_n$  given by equation (9). Substituting in (9) the velocity  $v_n$  of the particle  $m_n$ , we obtain

$$E_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_n}{\gamma}\right)^2 e^{2/r}.$$

We find thus for the energy of the photon in its orbit

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \frac{1}{2}.$$

The photon orbits are thus obtained from (11) and (12) simply by setting  $E = 1/2$ .

**7. Radial and circular orbits.** Though geometrically trivial, a special physical interest attaches to the degenerate cases of radial and circular orbits. For the radial orbits we have  $H = 0$ . In this case the equation (11) of conservation of energy degenerates to

$$(13) \quad E = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2/r} (-1 + \dot{r}^2).$$

As  $r \rightarrow 0$ ,  $e^{2/r} \rightarrow +\infty$  and so  $\dot{r} \rightarrow 1$ . This means, that any exploring particle reaching the central mass-point along a radial orbit, arrives there with the speed of light. In contrast to this result we have in Newtonian mechanics, that any exploring particle reaching the central mass-point along a radial orbit, arrives there with an infinite speed.

From equation (13) we see that  $r \rightarrow \infty$ ,  $e^{2/r} \rightarrow 1$  and  $E \rightarrow \dot{r}^2/2$ . Exploring particles having an energy  $E = 0$ , reach infinity with zero speed along radial orbits. Exploring particles having an energy  $E > 0$  reach infinity with velocities different from zero along radial orbits. Particles moving in radial orbits with an energy  $E < 0$  have finite radial orbits.

It can be easily proved that it takes an infinite time for a particle moving on an infinite radial orbit, to reach infinity. It can also be proved that a particle moving on a finite radial orbit performs a periodic motion. The finite radial orbit is a straight line segment centered at the central mass-point. We call the end-points of this segment "aphelia" of the finite radial orbit. The aphelion distance  $p$  of a finite radial orbit, in terms of the energy  $E$ , is given by

$$(14) \quad p = \frac{2}{\ln(1 - 2E)}.$$

In order to find the circular orbits we have to look for solutions of the system of differential equations (11) and (12), for which  $r$  remains constant. We eliminate first  $\dot{\theta}$  from (11) and (12) and find a differential equation in  $r$

$$(15) \quad \dot{r}^2 = 1 - (1 - 2E)e^{-2/r} - \frac{H^2}{r^2} e^{-4/r}.$$

If  $r$  is to be constant, which means independent of the time  $t$ , we must have

$$0 = \dot{r} = \ddot{r} = \ddot{\bar{r}} \text{ etc.}$$

From (15), we obtain

$$\ddot{r} = -\frac{(1 - 2E)}{r^2} e^{-2/r} + \frac{H^2}{r^3} e^{-4/r} - \frac{2H^2}{r^4} e^{-4/r}.$$

It is easy to see that

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

implies that all higher derivatives of  $r$  are zero too.

From the equations  $\dot{r} = 0$  and  $\dot{\theta} = 0$  we can express the energy  $E$  and the angular momentum  $H$  of a particle moving in a circular orbit in terms of the radius of the circle; we obtain

$$(16) \quad E = \frac{1}{2} - \frac{r-2}{r-1} e^{2/r};$$

$$(17) \quad H = \frac{r}{\sqrt{r-1}} e^{2/r}.$$

From equation (12) we see that  $H$  has to be a real constant for the motion to be a real motion. From equation (17) we see that for  $H$  to be real, the radius of the circular orbit has to be larger than unity. From  $r > 1$  and equations (16) and (10) we find for the circular orbits:

- (1) there are no circular orbits with a radius smaller than 2;
- (2) the circle  $r = 2$  is a circular photon orbit;
- (3) any circle with a radius greater than 2 can be the orbit of an ordinary particle.

From equations (17) and (12) we find the angular velocity  $\dot{\theta}$  of a particle moving in a circular orbit

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r\sqrt{r-1}},$$

thus the period  $T$  of a particle moving in a circular orbit is

$$T = 2\pi r\sqrt{r-1}.$$

In Newton's central field the radius of a circular orbit can have any value whatsoever. The period of a particle moving in a circular orbit is there

$$2\pi r\sqrt{r}.$$

**8. Geometrical equations.** In the geometrical classification of orbits, it is convenient to eliminate the time in equations (11) and (12). As in the Newtonian case [11], the substitution  $u = 1/r$  leads to the simplified differential equation

$$(18) \quad u'^2 + u^2 = \frac{1}{H^2} e^{4u} - \frac{1-2E}{H^2} e^{2u},$$

where an accent denotes differentiation with respect to the angle  $\theta$ . The non-radial orbits are given by (18) or, equivalently, by

$$(19) \quad u'' + u = \frac{2}{H^2} e^{4u} - \frac{1-2E}{H^2} e^{2u}.$$

Equations (18) and (19) bring out the interesting fact that the planetary

orbits in Birkhoff's theory of gravitation are geometrically the same as those in Newtonian mechanics under an attractive central force per unit mass [11, p. 170]

$$P = u^2[2e^{4u} - 2(1 - 2E)e^{2u}].$$

The velocities with which the orbits are described are, however, different.

Equations (18) and (19) give us important information about the concavity of the orbits. From these equations follows immediately

$$u'' + u = \frac{1}{H^2} e^{4u} + u'^2 + u^2 > 0$$

Since  $u'' + u$  is permanently positive, all orbits in Birkhoff's central field are concave towards the central mass-point, with the exception of the radial orbits which are not given by (18) or (19).

**9. The generalized potential well.** The orbits defined by equation (18) can be analysed by a generalization of the method of the potential well [12]. Equation (18) embraces all orbits in Birkhoff's central field, with the only exception of the radial orbits already discussed in paragraph 7.

From equation (18) it follows

$$u'^2 = \frac{1}{H^2} e^{4u} - \frac{1 - 2E}{H^2} e^{2u} - u^2.$$

Real orbits exist only for such values of  $u$  for which  $u'^2$  is positive or zero. We call the interval of values of  $u$  for which this happens the "region of positivity" of  $u'^2$ . In order to find this region of positivity of  $u'^2$  we introduce another variable  $w$  which is related to  $u$  and to  $r$  by the following equation

$$(20) \quad w = e^{2u} = e^{2/r}.$$

The region of positivity of  $u'^2$  is thus given by the inequality.

$$(21) \quad \frac{\ln^2 w}{w} \leq \frac{4}{H^2} w - \frac{4(1 - 2E)}{H^2}.$$

Using the equal sign in relation (21), we obtain the values of  $w$  for which  $u' = 0$ ; using the inequality sign we obtain the values of  $w$  for which  $u'^2 > 0$ .

We introduce now a  $(w, y)$  plane in which relation (21) has a very simple geometrical interpretation. Consider the curve

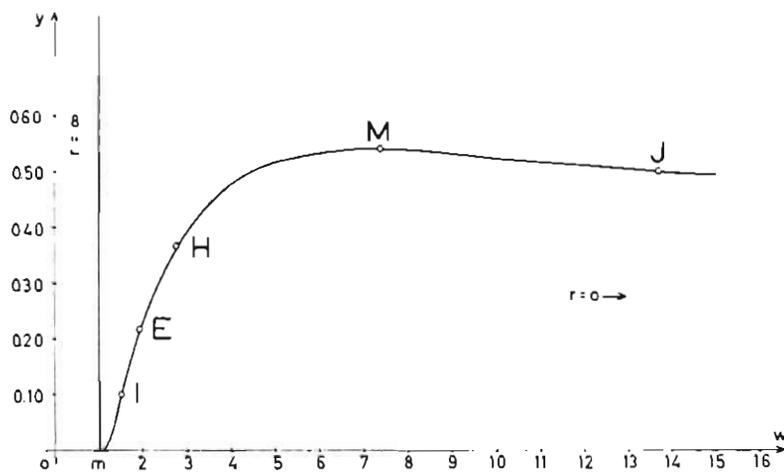
$$(22) \quad y = \frac{\ln^2 w}{w},$$

and the straight line

$$(23) \quad y = \frac{4}{H^2} w - \frac{4(1 - 2E)}{H^2}.$$

For such values of  $w$  for which the ordinate of the straight line (23) is greater than the ordinate of the curve (22), we have a positive  $u'^2$ , and thus a real orbit. The values of  $w$  for which the ordinate of the straight line (23) is equal to the ordinate of the curve (22) correspond to  $u' = 0$ .

Geometrically we can say, that real orbits exist wherever the straight line (23) lies above the curve (22). This situation is very similar to the case of the equivalent one-dimensional potential used to classify the orbits in



### GENERALIZED POTENTIAL WELL.

Fig. 1.

classical mechanics [13]. The essential difference consists that in classical mechanics the straight line is always horizontal, whereas, in our case, the straight line (23) has a positive slope which is different for different angular momenta.

In order to complete the "generalized potential well" let us consider the range of values of  $w$  which correspond to values of  $r$  which have physical meaning, i.e., to values of  $r$  in the range

$$0 \leq r < \infty.$$

From (20) we obtain the corresponding range for  $w$

$$1 < w \leq \infty.$$

The value  $w = 1$  corresponds to an infinite value of  $r$ ; the value  $w = \infty$  corresponds to  $r = 0$ . The straight line  $w = 1$  which is parallel to the  $y$ -axis represents the points at infinity of physical space; we call the straight

line "the line  $r = \infty$ ". The line  $w = \infty$  which is the infinitely distant parallel to the  $y$  axis represents the mass-point  $r = 0$ .

The generalized potential well consists of the curve (22) for the range  $1 \leq w < \infty$  and of the straight line  $w = 1$  for the range  $0 \leq y < \infty$  (see Fig. 1). We shall say that the generalized potential well has two branches, the straight branch which is the line  $r = \infty$  ( $w = 1$ ), and the curved branch which is curve (22) for  $1 \leq w < \infty$ .

There are several points of the curved branch of the generalized potential well which are worth noticing. The curved branch has a minimum  $m$  at  $w = 1, y = 0$ , and is thus tangent to the  $w$ -axis at that point. Moving along the curved branch from left to right, starting at  $m$ , we find the following notable points:

- (1) the point of inflection  $I$ ;
- (2) point  $E$  where the straight line  $mE$  is tangent to the curved branch;
- (3) point  $H$  where the straight line  $OH$  is tangent to the curved branch;  $O$  being the origin of the  $(w, y)$  plane;
- (4) the maximum  $M$ ;
- (5) the point of inflection  $J$ .

Note that the curved branch of the generalized potential well approaches asymptotically the  $w$ -axis as  $w$  tends to infinity. The exact location of the notable points is listed in the following table.

Point	$w$	$y$	$r$
$m$	0. 00 00	0. 00 00	$\infty$
$I$	1. 46 50	0. 09 96	5. 23 61
$E$	1. 90 38	0. 21 78	3. 10 63
$H$	2. 71 83	0. 36 79	2. 00 00
$M$	7. 38 91	0. 54 13	1. 00 00
$J$	13. 70 90	0. 50 00	0. 76 39

Let us discuss now the straight line (23). The slope of this line is  $4/H^2$  and is thus always positive. The intercept of the straight line (23) on the  $w$ -axis is equal to  $(1 - 2E)$ . From (10) we see that this intercept is equal to zero for the photon. For ordinary particles the intercept is positive. Thus a photon in the central field is represented, in the diagram of the generalized potential well, by a straight line which has a positive slope and which passes through the origin. An ordinary particle moving in the central field is represented, in the diagram of the generalized potential well, by a straight line which has a positive slope and which has a positive intercept on the  $w$ -axis.

In order to classify the orbits in Birkhoff's central field, with the help of the generalized potential well, we have to consider all possible straight lines which have a positive slope, and a positive or zero intercept at the  $w$ -axis.

Each such a straight line corresponds to one or several orbits. The orbits correspond to the portions of the straight line which lie above the generalized potential well. Such an analysis includes all orbits with the only exception of the radial orbits.

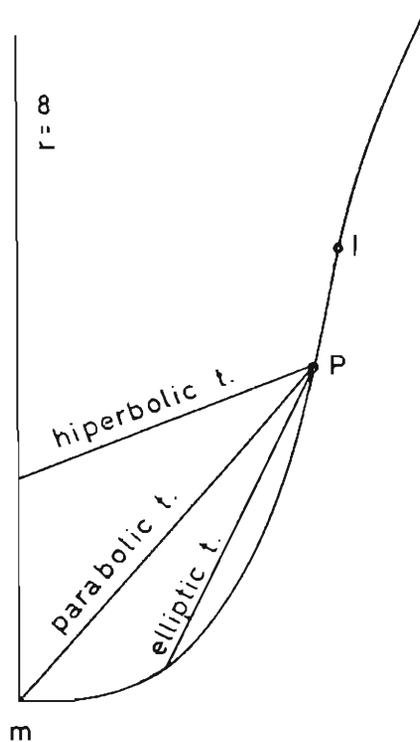


Fig. 2.

**10. Apses.** In celestial mechanics one defines “apse” as the point of an orbit where the radius vector is either a maximum or a minimum. An apse, where the radius vector is a minimum, is called a “perihelion”; an apse, where the radius vector is a maximum, is called an “aphelion”. The velocity of a particle at an apse is called “apsidal velocity”. By (18) the radius of a planet changes monotonically until an apse is reached. Again, just as in Newtonian mechanics [11, p. 172] the orbit is symmetric with respect to the line drawn from the force center to an apse. Furthermore, any two perihelia or aphelia must have the same radius, and determine the period of the orbit.

However, here the analogy with Newton's central field ends. Besides the radial and circular orbits, which are geometrically identical with Newtonian orbits, and orbits which are of elliptic, hyperbolic or parabolic type, Birkhoff's theory permits various new types of orbits.

The generalized potential well of paragraph 9 allows us to analyse geometrically the apses. The apses are found [II, p. 171] setting  $u' = 0$  in equation (18). It is easy to see that the apses are found in Fig. 1 as corresponding to the common points of the generalized potential well and straight line (23). If the straight line (23) cuts the branch  $r = \infty$ , the orbit has a point at infinity. We consider the point at infinity as a generalized apse. An ordinary intersection of the straight line (23) with the curved branch of the generalized potential well corresponds to an ordinary apse. We shall call "apses" the intersections themselves of the straight line (23) and the generalized potential well. Fig. 2 shows the positions of the straight line (23) for orbits of elliptic, parabolic and hyperbolic type. The apses of an orbit of elliptic type lie both on the curved branch of the generalized potential well, and are thus an ordinary perihelion  $P$ , and an ordinary aphelion. The straight line (23) corresponding to an orbit of hyperbolic type cuts both the branch  $r = \infty$  and the curved branch of the generalized potential well; it has an ordinary perihelion  $P$  and an infinitely distant aphelion. The straight line (23) corresponding to an orbit of parabolic type cuts the potential well at  $m$  and at an ordinary perihelion  $P$ . Given a perihelion  $P$ , the straight line  $mP$  separates the straight lines (23) through  $P$ , which correspond to orbits of hyperbolic type, from those straight lines (23) through  $P$ , which correspond to orbits of elliptic type.

When the straight line (23) is tangent to the curved branch of the generalized potential well, we obtain a "degenerate apse". It is easy to show that a straight line (23) corresponding to a circular orbit is tangent to the curved branch of the generalized potential well. Consider a straight line (23) tangent to the curved branch of the generalized potential well at a point  $C$  (see Fig. 3), lying at the deep end of the well, where the concavity points upwards. In this case the straight line (23) corresponds to a circular orbit; the radius of this orbit is that value of  $r$  which corresponds to the  $w$  of point  $C$ , namely  $r = 2/\ln w$ . We consider all points of a circular orbit as apses; they are simultaneously points of maximal distance, namely aphelia, and points of minimal distance, namely perihelia.

Consider a straight line (23) which is tangent to the curved branch of the generalized potential well at a point  $P$ , where the concavity points downwards (see Fig. 3). The straight line (23) is divided by  $P$  in the following three parts

- (1) the part above  $P$ ;
- (2) the point  $P$  itself;
- (3) the part below  $P$ .

The point  $P$  itself corresponds to a circular orbit. The parts above and

below  $P$  correspond also to real orbits, since they lie above the potential well. We shall call "interior orbit" the orbit corresponding to the part above  $P$ ; we shall call "exterior orbit" the orbit corresponding to the part below  $P$ . A particle moving in the interior orbit can approach the circular orbit, its radius continuously increasing. Such a particle takes an infinite time to reach the circular orbit. The radius of the circular orbit is the least upper bound for the radius vector of a particle moving in the interior orbit. The circular orbit is an asymptotic circle to the interior orbit. We consider this

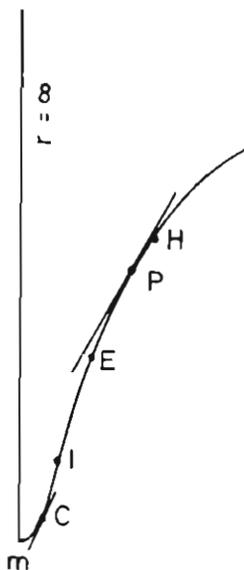


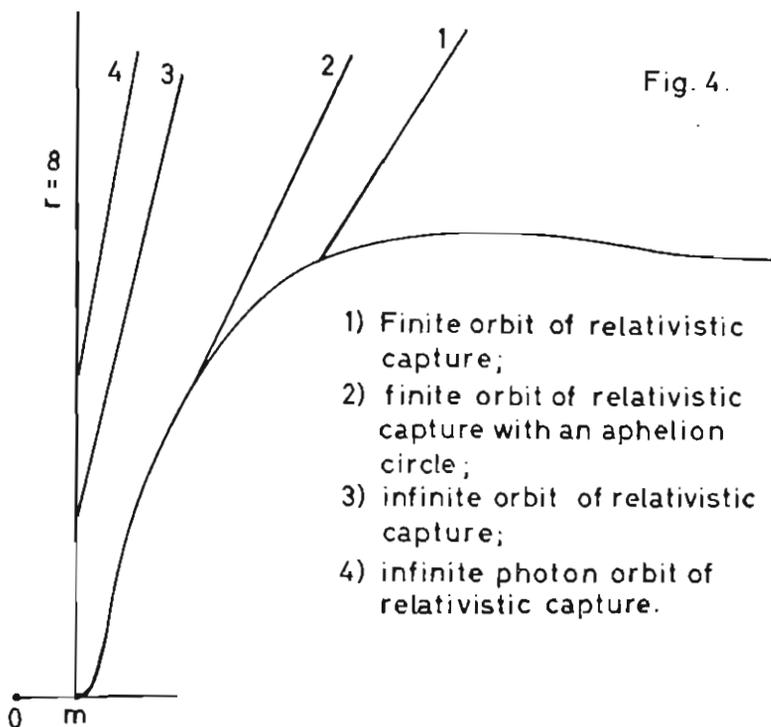
Fig. 3.

asymptotic circle to the interior orbit a degenerate apse, and call it an "aphelion circle".

A particle moving in the exterior orbit can approach the circular orbit asymptotically, its radius vector decreasing continuously. The radius of the circular orbit is the greatest lower bound for the radius vector of the particle moving in the exterior orbit. We call the circular orbit "perihelion circle" of the exterior orbit, and consider it as a degenerate apse. The circular orbit is in this case an aphelion circle both of the interior and of the exterior orbits; it is an aphelion circle of the interior orbit, and a perihelion circle of the exterior orbit. The interior orbit is completely inside its aphelion circle; the exterior orbit is completely outside its perihelion circle.

From an examination of the generalized potential well of Fig. 1 we find that there are orbits of elliptic type with a perihelion circle and an ordinary aphelion; there is an orbit of parabolic type with a perihelion circle; and there are orbits of hyperbolic type with a perihelion circle.

**II. Relativistic orbits.** In Birkhoff's central field there are types of orbits which have no Newtonian analogues. The orbits with aphelion circles



and with perihelion circles discussed in paragraph 10 are of such a type. The other types are shown in Fig. 4.

In Newtonian mechanics only particles moving in radial orbits hit the central mass-point. For such particles the angular momentum is zero. One can say thus, that in Newtonian mechanics the only particles which hit the central mass-point are those which are aimed directly at it.

In Birkhoff's central field the particles moving along radial orbits hit also the central mass-point. These particles have zero angular momentum. Thus in Birkhoff's central field the statement holds too, that particles, aimed

directly at the central mass-point, hit it. But besides these particles which approach the central mass-point along straight lines, there are other particles moving on curved orbits which hit the central mass-point. These curved orbits have no Newtonian analogues. We call them orbits of "relativistic capture" because a particle approaching the central mass-point along such an orbit would be captured by it. The angular momentum of a particle moving along an orbit of relativistic capture is not zero.

These peculiar orbits of relativistic capture are of two types. There are finite orbits of relativistic capture and infinite orbits of relativistic capture. The finite orbits of relativistic capture are completely contained within a finite circle with its center at the central mass-point. The infinite orbits of relativistic capture reach out to infinity.

A finite orbit of relativistic capture has an aphelion. It is symmetric with respect to the apsidal radius connecting its aphelion to the central mass-point. The aphelion divides the finite orbit of relativistic capture in two symmetric branches, both of them passing through the central mass-point. A finite orbit of relativistic capture is completely contained in a circle passing through its aphelion and having its center at the central mass-point.

A particle moving away from the central mass-point along a finite orbit of relativistic capture, may turn a great number of times around the central mass-point before reaching the aphelion. In an extreme case the particle may turn an infinite number of times around the central mass-point, its radius vector increasing continuously and never becoming equal to the aphelion distance. In this case the aphelion degenerates into an aphelion circle.

A particle moving on an infinite orbit of relativistic capture can come from infinity and be captured by the central mass-point.

The photon orbits in Birkhoff's central field show interesting features. In paragraph 7 we showed that there exists a circular photon orbit with a radius  $r = 2$ . This photon orbit corresponds to a straight line (23) tangent to the curved branch of the generalized potential well at the point  $H$ . We see from Fig. 1 that the circular photon orbit is the perihelion circle of an infinite photon orbit of hyperbolic type; and that it is the aphelion circle of a finite photon orbit of relativistic capture. A small perturbation to the photon moving in the circular photon orbit of radius 2, can either throw it into the central mass-point, or it can throw it to infinity. We can also say that photons, coming from infinity, can approach asymptotically the circle of radius 2. It is interesting to notice that a sphere with a radius equal to 42.2 Km, made of densely packed neutrons, could have photons moving on the surface along great circles. The mass of such a sphere would be  $M = 3.7 \cdot 10^{34}$  gr, which is about 18 times the mass of the Sun. The radius of such a sphere is equal to 2 in the system of units used here. Any small perturbation would throw the revolving photons into orbits going to infinity. The neutron sphere could capture photons coming from infinity forcing them into asymptotic orbits to the sphere.

**12. Solar system.** If an exploring particle moves in an orbit of elliptic type in the gravitational field of the Sun, with a velocity which is small compared with the velocity of light, the portion of the orbit between an aphelion and the next perihelion resembles very much a half ellipse. We shall show here, that in this case, one can obtain approximately the orbit of elliptic type in Birkhoff's central field, by considering that the particle is performing a Keplerian motion in an ellipse drawn on a rigid plane passing through the central mass-point; this rigid plane is rotating slowly around an axis which is perpendicular to it, and which passes through the central mass-point. One focus of the Keplerian ellipse coincides permanently with the central mass-point. Exploring particle and rigid plane rotate both in the same sense around the central mass-point.

The planets of the solar system describe to a great approximation Keplerian ellipses. In order to bring out the difference between a Keplerian ellipse and the orbit of a planet in Birkhoff's central field, we compare the apsidal angles in both cases. The apsidal angle is the angle formed by the radius vector of an aphelion with the radius vector of the next perihelion. In a Keplerian ellipse, this apsidal angle is rigorously equal to  $\pi$ . We shall show that in the orbit of a planet in Birkhoff's central field, the apsidal angle is equal to  $\pi + \epsilon$ .

We obtain the apsidal angle  $\alpha$  for the orbit of a planet in Birkhoff's central field, following Sygne-Griffith [II, p. 173]; from equation (18) it follows by a quadrature [I, p. 20]

$$\alpha = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{H^2} e^{4u} - \frac{1-2E}{H^2} e^{2u} - u^2}}$$

Here  $u_1$  is the reciprocal of the aphelion distance and  $u_2$  is the reciprocal of the perihelion distance. Notice that  $u_1$  and  $u_2$  are the roots of the expression under the square root in the denominator.

In order to evaluate the apsidal angle  $\alpha$  one has to make approximations. The table given below has the approximate values of  $1/H^2$ ,  $E$  and the average

TABLE

Planet	$1/H^2$	$E$	Average value of $u$
Mercury	$2.6 \cdot 10^{-8}$	$- 1.2 \cdot 10^{-8}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$
Venus	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$- 6.0 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
Earth	$9.5 \cdot 10^{-9}$	$- 5.0 \cdot 10^{-9}$	$1.0 \cdot 10^{-8}$
Mars	$6.2 \cdot 10^{-9}$	$- 3.2 \cdot 10^{-9}$	$6.4 \cdot 10^{-9}$
Jupiter	$2.0 \cdot 10^{-9}$	$- 1.0 \cdot 10^{-9}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$
Saturn	$1.1 \cdot 10^{-9}$	$- 5.0 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-9}$
Uranus	$4.9 \cdot 10^{-10}$	$- 2.4 \cdot 10^{-10}$	$5.0 \cdot 10^{-10}$
Neptune	$3.3 \cdot 10^{-10}$	$- 1.6 \cdot 10^{-10}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$
Pluto	$2.3 \cdot 10^{-10}$	$- 1.1 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{-10}$

value of  $u$  for the planets in the solar system calculated in the units defined in paragraph 5.

Using the series developments of the exponential functions, and neglecting terms of higher order, we find

$$\alpha \approx \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{H^2} + \left(\frac{2}{H^2} + \frac{4E}{H^2}\right)u - \left(1 - \frac{6}{H^2}\right)u^2}}$$

Because  $u_1$  and  $u_2$  are roots of the subradical, we obtain

$$\alpha \approx \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{6}{H^2}}} \approx \pi + \frac{3\pi}{H^2}.$$

Twice the apsidal angle  $\alpha$  is the angle swept by the radius vector when the planet goes from one perihelion to the next,

$$2\alpha \approx 2\pi + \frac{6\pi}{H^2}.$$

The excess of  $2\alpha$  over  $2\pi$  is the perihelion advance per revolution  $\epsilon$ ; we obtain

$$\epsilon \approx \frac{6\pi}{H^2}.$$

Since the perihelion advance has the nature of a perturbation, one can use in the formula for  $\epsilon$  the Newtonian value of the angular momentum [11, p. 182], which is

$$H = \frac{2ab\pi}{T} = \frac{2a^2\sqrt{1-e^2}}{T}\pi.$$

Here  $a$  is the semi-major axis of the elliptic orbit;  $b$  is the semi-minor axis;  $e$  is the eccentricity of the orbit;  $T$  is the periodic time. With this Newtonian value of  $H$ , we obtain for the perihelion advance per revolution.

$$\epsilon \approx \frac{3T^2}{2\pi a^3(1-e^2)}.$$

Going back to the provisional system of units of paragraph 3, we have to perform the substitution

$$T \rightarrow \frac{T}{M};$$

$$a \rightarrow \frac{a}{M}.$$

It follows that

$$\epsilon \approx \frac{3T^2M^2}{2\pi a^4(1 - e^2)}.$$

Using the relation between the mass  $M$  and the periodic time  $T$  of Newtonian mechanics [11, p. 181] which is

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

we obtain

$$\epsilon \approx \frac{24\pi^3 a^2}{T^2(1 - e^2)}.$$

In this last formula the semi-major axis  $a$  is measured in light-seconds. Using the cgs-system of units, we have

$$(24) \quad \epsilon \approx \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2(1 - e^2)}.$$

Here  $c$  is the velocity of light in cm/sec. Notice that  $a/cT$  is a dimensionless constant. Thus  $a$  can be measured in any units of length whatsoever, provided that  $cT$  is measured in the same units.

The advance of the perihelion per revolution given by (24) is, to the approximation used, the same as that predicted by Einstein's theory of general relativity.

We shall analyse now the behaviour of a photon in the solar system [6, pp. 127-128]. We showed in paragraph 6 that for the photon  $E = 1/2$ . It follows from (18), for the photon

$$(25) \quad u'^2 + u^2 = \frac{1}{H^2} e^{4u}.$$

From (25) we obtain immediately [1, p. 21]

$$(26) \quad \frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{1}{H^2} e^{4u} - u^2}.$$

In a weak gravitational field, like that of the Sun, the photons are only slightly affected by the field. Only photons passing in the immediate vicinity of the Sun are deviated slightly from their straight line orbits. Consider a photon whose nearest approach to the Sun is  $p$ ; this means that  $p$  is the perihelion distance of the photon orbit. At the perihelion

$$r\dot{\theta} = p\dot{\theta} = 1,$$

and thus we obtain from (12)

$$(27) \quad H = e^{2/p} p.$$

From (26) and (27), it follows that

$$(28) \quad \frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} e^{2(u-1/p)} - u^2}.$$

When the photon goes from its perihelion to infinity  $u$  diminishes from  $1/p$  to zero. Hence we must use the minus sign in (26) and (28). From (28) we obtain for the total angular deviation  $\delta$  in the motion of the photon

$$\delta = 2 \int_{1/p}^0 \frac{-du}{\sqrt{\frac{1}{p^2} e^{2(u-1/p)} - u^2}}.$$

The minimum value which  $p$  can have in the solar system is equal to the radius of the Sun, which is in natural units equal to  $4.758 \cdot 10^5$ . We have thus

$$p \geq 4.758 \cdot 10^5,$$

in the solar system. Hence the maximum value of  $1/p$  is the reciprocal of  $4.758 \cdot 10^5$ ; it follows that

$$\frac{1}{p} \leq 2.10 \cdot 10^{-6}.$$

Since  $p$  is the perihelion distance we have for  $u$

$$u \leq \frac{1}{p} \leq 2.10 \cdot 10^{-6}.$$

Neglecting terms of higher order in the series expansion of the exponential function, we obtain

$$\delta \approx 2 \int_{1/p}^0 \frac{-du}{\sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{4}{p^2} \left(u - \frac{1}{p}\right) - u^2}}.$$

This integral can be calculated immediately; the result is

$$\delta \approx 4 \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{p}}}.$$

To the approximation which we are using, we obtain

$$\delta \approx 2\pi + \frac{4}{p}.$$

Going back to the provisional system of units of paragraph 3, we have to perform the substitution

$$p \rightarrow \frac{p}{M}.$$

It follows that

$$\delta \approx 2\pi + \frac{4M}{l'}$$

This is the value of the angle formed by the two radii vectors of the photon at infinity. It is the same as the one predicted by Einstein in his general theory of relativity.

**13. Orbital stability.** In this paragraph we shall analyse the stability of circular orbits. From an inspection of the generalized potential well of paragraph 9, we suspect that the circular orbits have the following conditions of stability:

(1) when the contact point of the straight line (23) with the curved branch of the generalized potential well, lies between  $m$  and  $I$ , the corresponding circular orbit is stable;

(2) when the contact point of the straight line (23) with the curved branch of the generalized potential well, lies between  $I$  and  $H$ , the corresponding circular orbit is unstable.

This suspicion arises because the circular orbits corresponding to case 1 have no asymptotic orbits; and those corresponding to case 2 have asymptotic orbits. A special case corresponds to the straight line (23) which is tangent to the curved branch of the generalized potential well at the point  $I$  itself. This circular orbit has an interior asymptotic orbit, but no exterior asymptotic orbit.

We establish now the equation of variations [14] assuming constant variations  $\delta E$  and  $\delta H$  for the energy and the angular momentum. Let  $u_0$  be the reciprocal of the radius of the circular orbit in question, and let  $\delta u$  be the variation of the reciprocal of the radius vector. The equation of variations derived from (19) is

$$\delta u'' + \left[ 1 - \frac{8}{H^2} e^{4u_0} + \frac{2(1-2E)}{H^2} e^{2u_0} \right] \delta u = \Delta;$$

$$\Delta = \text{constant.}$$

Substituting in this equation of variations the values of  $E$  and  $H$  for the circular orbit, given by (16) and (17) in terms of the radius  $r$ , we obtain

$$(29) \quad \delta u'' + \frac{r^2 - 6r + 4}{r^2} \delta u = \Delta.$$

The sign of the coefficient of  $\delta u$  in equation (29) is decisive for the character of the solution. If the coefficient of  $\delta u$  is positive,  $\delta u$  is a trigonometric function of  $\theta$ . In this case  $\delta u$  remains bounded and the circular orbit is stable.

If the coefficient of  $\delta u$  is negative,  $\delta u$  is a linear combination of exponential

functions in  $\theta$ . In this case  $\delta u$  is unbounded and the circular orbit is unstable.

Equating to zero the coefficient of  $\delta u$  in (29) we obtain two roots. One of the roots, namely  $r = 3 - \sqrt{5}$ , has to be discarded, since the admissible radii for circular orbits satisfy the inequality  $r \geq 2$ , as was shown above. The other root is

$$r = 3 + \sqrt{5} = 5.2361.$$

For values of  $r > 5.2361$ , the coefficient of  $\delta u$  in (29) is positive, and the circular orbits are stable.

For values of  $r < 5.2361$ , the coefficient of  $\delta u$  in (29) is negative, and the circular orbits are unstable.

The circular orbit with a radius  $r = 5.2361$  is stable against perturbations which increase the radius vector of the particle, and it is unstable against perturbations which decrease this radius vector.

Comparing these results with the table given in paragraph 9, we see that the circular orbit with a radius  $r = 5.2361$ , corresponds to a straight line (23) which is tangent to the curved branch of the generalized potential well at the point of inflection  $I$ . The results stated at the beginning of this paragraph 13, suggested by geometrical considerations, are thus perfectly justified.

Summarizing the results on the stability of the circular orbits in Birkhoff's central field, we have:

- (1) all circular orbits with a radius larger than 5.2361 are stable;
- (2) all circular orbits with a radius smaller than 5.2361 are unstable;
- (3) the circular orbit with a radius 5.2361 is stable against perturbations which increase the radius vector of the particle, and it is unstable against perturbations which decrease the radius vector.

14. **Acknowledgement.** The author wishes to express his appreciation to Professor Garrett Birkhoff for much helpful discussion and for his very valuable suggestions.

#### BIBLIOGRAPHY

1. G. D. Birkhoff, *El concepto matemático de tiempo y la gravitación*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, México, vol. 1, nos. 4, 5 (1944) pp. 1-23.
2. ———, *Matter, electricity and gravitation in flat space-time*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. vol. 29 (1943) pp. 231-239.
3. M. Moshinsky, *On the interactions of Birkhoff's gravitational field with the electromagnetic and pair fields*, Phys. Rev. vol. 80 (1950) pp. 514-519.
4. A. Barajas, *Sobre el principio de equivalencia de Einstein*, Anuario Comisión Impulsora Coordinadora Investigación Científica, México, 1945, pp. 25-30.
5. T. Y. Thomas, *The differential invariants of generalized spaces*, London, Cambridge University Press, 1934, p. 6.
6. C. Graef-Fernández, *La teoría de la gravitación de Birkhoff*, Symposium algunos problemas matemáticos que se están estudiando Latino América, UNESCO, Montevideo, 1951, pp. 121-137.

7. G. D. Birkhoff, *Flat space-time and gravitation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. vol. 30 (1944) p. 325.
8. P. Kustaanheimo, *Some remarks on the general relativity theory of Birkhoff*, Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Physico Mathematicae (Helsinki) vol. 17, no. 11, July, 1955.
9. C. Graef-Fernández, *Principios variacionales para el movimiento de los planetas en el campo central de Birkhoff*, Revista Mexicana de Física, México, vol. 2 (1953) pp. 180-192.
10. ———, *Principios de conservación en la teoría de la gravitación de Birkhoff*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, México, vol. 5 (1948) pp. 7-14.
11. J. L. Synge and B. A. Griffith, *Principles of mechanics*, McGraw Hill Book Co. Inc. New York, 1949, pp. 168-182.
12. J. C. Slater, *Quantum theory of matter*, McGraw Hill Book Co. Inc., New York, 1951, pp. 48-51.
13. H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Cambridge, Massachusetts, 1950, pp. 63-69.
14. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 1. Gauthier-Villars et Fils, Paris. 1892, pp. 166-167.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO,  
MEXICO, D.F., MEXICO

EL GRADIENTE DEL CAMPO GRAVITACIONAL  
DE BIRKHOFF\*

Carlos Graef Fernández

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México

(Recibido: 15 diciembre 1960)

RESUMEN

*El objeto de este artículo es introducir un concepto de gradiente del campo gravitacional en la teoría de Birkhoff que desempeñe en ésta un papel semejante al que tiene el gradiente en el campo gravitacional de Newton. Se exige ante todo que las ecuaciones del campo se puedan establecer fundándose en el flujo de este gradiente a través de una hipersuperficie cerrada en el espacio-tiempo.*

*El gradiente se define como un tensor de tres índices cuyas componentes se construyen por diferenciación con respecto a las coordenadas en el espacio-tiempo de las componentes del tensor potencial gravitacional. Calculamos explícitamente este gradiente para el caso del campo gravitacional de un punto-masa en movimiento arbitrario. Se muestra que si se fijan los dos índices provenientes del ten-*

---

\* Este es el primer artículo de una serie de tres que se titula Del Potencial de un Punto Masa a las Ecuaciones del Campo en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff.

por potencial gravitacional y si se consideran sus cuatro componentes generadas por diferenciación con respecto a las coordenadas, el gradiente se puede interpretar como un cuádrivector. Este cuádrivector está colocado en el plano bidimensional definido en el espacio-tiempo por el punto del campo y por el cuádrivector velocidad retardada de Minkowski del punto-masa generador del mismo.

Utilizando este gradiente se establece el cuádrivector aceleración de Minkowski de una partícula exploradora del campo gravitacional generado por un punto-masa en movimiento arbitrario y se expresa en función de los otros cuádrivectores esenciales del problema. Se obtiene el resultado importante, que por medio de mediciones ejecutadas en las partículas exploradoras del campo-gravitacional de un punto-masa en movimiento, se pueden deducir la posición, la velocidad y la aceleración de éste. Esto significa que la perturbación gravitacional emitida por un punto-masa transmite información sobre su posición, velocidad y aceleración, a pesar de que el potencial gravitacional no depende de la aceleración.

El marco de referencia de la teoría de la gravitación de Birkhoff<sup>1</sup> es el mismo que el de la Relatividad Especial de Einstein: el espacio-tiempo de 4 dimensiones de Minkowski. Nosotros designaremos a las cuatro coordenadas de un acontecimiento en ese espacio-tiempo indistintamente con  $(t, x, y, z)$  o con  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . Aquí,  $t \equiv x^1$  es la coordenada temporal y  $x \equiv x^2$ ,  $y \equiv x^3$ ,  $z \equiv x^4$  son las coordenadas cartesianas del espacio físico. Elegimos las unidades de manera que la velocidad de la luz en el vacío sea igual a uno<sup>2</sup>. Con estas convenciones tenemos para el cuadrado del elemento de arco de Minkowski<sup>3</sup>:

$$ds^2 = \Delta_{ij} dx^i dx^j = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

Se está utilizando aquí la convención de Einstein de sumar con respecto a índices repetidos y  $\Delta_{ij}$  es el tensor métrica fundamental de la Relatividad Especial. En el sistema de coordenadas utilizado aquí

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 1; \quad \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1; \\ \Delta_{ij} &= 0 \quad \text{para } i \neq j. \end{aligned}$$

Utilizaremos además el tensor doblemente contravariante  $\Delta^{ij}$  asociado al métrico fundamental. En el sistema de coordenadas utilizado, las componentes de este último tensor son aritméticamente iguales a las correspondientes del métrico fundamental, lo que se expresa por la ecuación no tensorial  $\Delta^{ij} = \delta_{ij}$ .

Las magnitudes físicas de las que trata este artículo son escalares, cuadrivectores y tensores en el espacio-tiempo de Minkowski. Los cuadrivectores los designaremos por medio de una letra con acento circunflejo, p.e.  $\hat{v}$ . Todo cuadrivector tiene cuatro componentes covariantes y cuatro componentes contravariantes y puede describirse por uno cualquiera de esos dos juegos de números. Adoptamos la convención usual de usar índices inferiores para las componentes covariantes e índices superiores para las componentes contravariantes. Entre las componentes covariantes y contravariantes de un cuadrivector existen las relaciones:

$$v^i = \Delta^{ij} v_j, \quad v_i = \Delta_{ij} v^j.$$

Existe un escalar asociado a dos cuadrivectores  $\hat{v}$  y  $\hat{w}$  que es su producto escalar y que designamos como sigue:

$$\hat{v} \cdot \hat{w} = \Delta_{ij} v^i w^j = \Delta^{ij} v_i w_j = v^i w_i = v_i w^i.$$

El cuadrado de un cuadrivector es el producto escalar de ese cuadrivector por sí mismo:

$$\hat{v}^2 = \hat{v} \cdot \hat{v}.$$

Consideramos una partícula exploradora del campo gravitacional. Un acontecimiento de la línea de universo de la partícula exploradora se caracterizará por  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . El cuadrivector velocidad de Minkowski  $\hat{v}$  de la partícula exploradora se define como sigue:

$$v^i = \frac{dx^i}{ds}.$$

El cuadrado del cuadvivector velocidad es igual a uno:

$$\hat{v}^2 = \Delta_{ij} v^i v^j = 1$$

El cuadvivector aceleración de Minkowski  $\hat{a}$  de la partícula exploradora se define como:

$$a^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{dv^i}{ds}$$

El producto escalar  $(\hat{a} \cdot \hat{v})$  es igual a cero, lo que se interpreta como expresión de la perpendicularidad de los cuadvivectores aceleración de Minkowski y velocidad de Minkowski.

El campo gravitacional de Birkhoff se caracteriza por un potencial<sup>4</sup> que es un tensor simétrico doblemente covariante  $b_{ij}$ . Nosotros introducimos un tensor de tres índices triplemente covariante que llamamos "gradiente del campo gravitacional" y que definimos como sigue:

$$\nabla_i b_{jk} = \frac{\partial b_{jk}}{\partial x^i} \quad (2)$$

Esta definición se establece en el sistema de coordenadas utilizado aquí, en el que las derivadas parciales con respecto a las coordenadas de las componentes de un tensor constituyen otro tensor. En un sistema general de coordenadas la definición de gradiente es:

$$\nabla_i b_{jk} = b_{jk,i}$$

Aquí la coma seguida del índice  $i$  denota derivación covariante con respecto a la coordenada  $x^i$ . En el sistema de coordenadas utilizado aquí la derivada covariante es idéntica a la derivada parcial y ambas definiciones del gradiente coinciden.

Utilizando este concepto de gradiente del campo gravitacional, el cuadvivector

tor aceleración de Minkowski de una partícula exploradora de ese campo<sup>5</sup> puede expresarse como:

$$a_i = (\nabla_j h_{ki} - \nabla_i h_{jk}) n^j n^k \quad (3)$$

A pesar de que el gradiente del campo gravitacional es un tensor de tres índices, se puede interpretar como un cuadrivector haciendo las siguientes convenciones:

- 1) se fijan los dos índices que provienen del tensor potencial,
- 2) se consideran las cuatro componentes que se generan, al variar de uno a cuatro, el índice que proviene de derivar con respecto a una coordenada. Pensando en esta interpretación escribiremos también  $\widehat{\text{grad}} h_{jk}$  para  $\nabla_i h_{jk}$ .

En seguida procederemos a calcular el gradiente del potencial del campo gravitacional generado por un punto-masa en movimiento arbitrario y el cuadrivector aceleración de una partícula exploradora de ese campo. Empezamos postulando el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en reposo en un marco de referencia inercial<sup>6</sup>. Postulamos que este tensor tiene todos los elementos de la diagonal principal de su matriz iguales al potencial Newtoniano y todos sus otros elementos iguales a cero. Esta es la generalización más simple que se puede hacer de un potencial escalar, como lo es el Newtoniano, a un potencial constituido por un tensor simétrico de dos índices.

Designaremos con letras minúsculas las coordenadas de un acontecimiento cualquiera del campo; usando ya sea  $(t, x, y, z)$  o bien  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . Utilizaremos letras mayúsculas para las coordenadas de un punto de la línea de universo del punto-masa, ya sea  $(T, X, Y, Z)$  o bien  $(X^1, X^2, X^3, X^4)$ . A la distancia en el espacio físico entre un acontecimiento  $A(t, x, y, z)$  del campo y un acontecimiento  $P(T, X, Y, Z)$  de la línea de universo del punto-masa, la designaremos con  $r$ ; por lo tanto:

$$\begin{aligned} r &= \left| \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2} \right| = \\ &= \left| \sqrt{(x^2-X^2)^2 + (x^3-X^3)^2 + (x^4-X^4)^2} \right| \end{aligned}$$

Sea  $M$  la masa en reposo del punto-masa generador del campo. Si usamos la unidad de masa de manera que la constante de la gravitación universal sea igual a uno<sup>7</sup>, obtenemos para el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en reposo en un marco de referencia inercial<sup>8</sup>

$$b_{jk} = \frac{M}{r} \delta_{jk} \quad (4)$$

Pasaremos ahora a calcular el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en movimiento uniforme. Para este caso de un punto-masa en movimiento es necesario introducir magnitudes retardadas con respecto al acontecimiento  $A$  del campo. Sea  $L$  la línea de universo del punto-masa  $M$  (Fig. 1). Con objeto de evitar repeticiones consideramos de una vez aquí el caso general de una línea de universo curva que corresponde a un movimiento arbitrario del punto-masa. Con el acontecimiento  $A$  como vértice constrúyase un cono de luz del pasado. El acontecimiento en que este cono corta a la línea de universo  $L$  del punto-masa, lo designamos con  $P$ . Toda señal física que salga de  $P$  con la velocidad de la luz pasará por el acontecimiento  $A$ . El acontecimiento  $P$  es la posición retardada del punto-masa con respecto al acontecimiento  $A$  del campo. Entre las coordenadas de los acontecimientos  $A$  y  $P$  existe la relación:

$$\Delta_{jk} (x^j - X^j) (x^k - X^k) = 0 \quad (5)$$

Al cuadrivector que liga  $P$  con  $A$  lo designamos con  $\hat{r}$ . Las cuatro componentes contravariantes de  $\hat{r}$  son:

$$r^i = x^i - X^i$$

La ecuación (5) se puede expresar también en la forma:

$$\hat{r}^2 = \hat{r} \cdot \hat{r} = r^k r_k = 0 \quad (6)$$

En la línea de universo  $L$  del punto-masa elegimos un acontecimiento  $N$  como origen de los arcos. A la longitud del arco Minkowskiano  $NP$  lo designare-

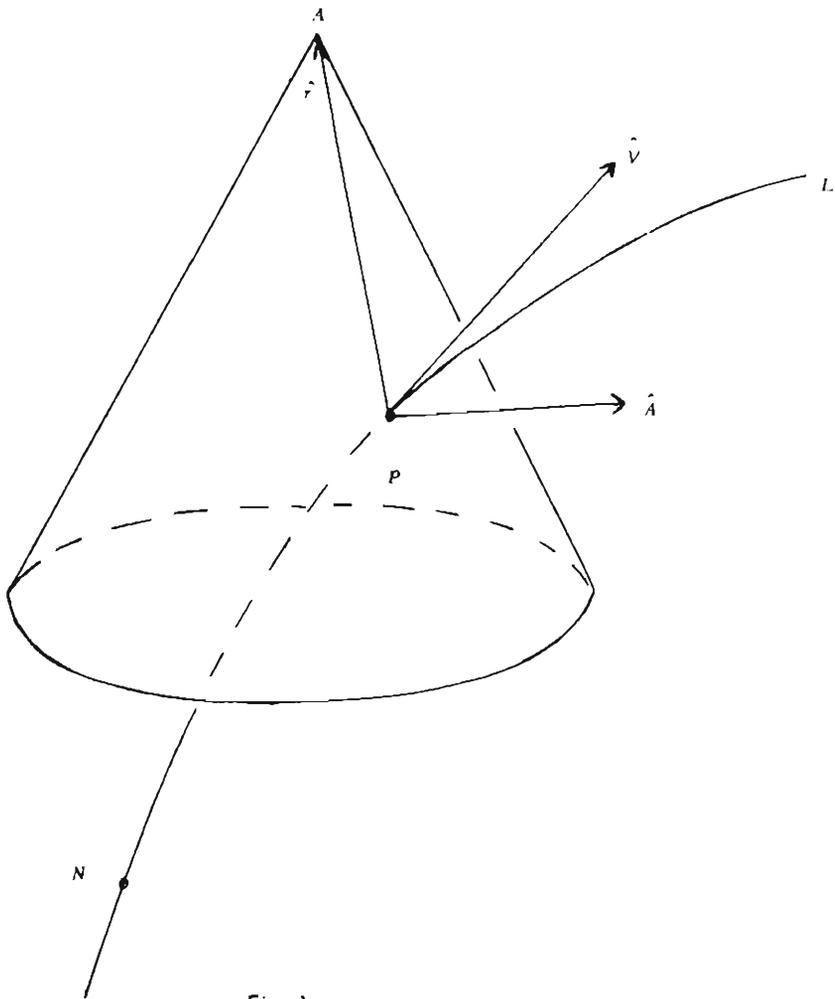


Fig. 1

mos con  $S$ . Dada la línea de universo  $L$  del punto-masa generador del campo con su origen de arcos  $N$ , la longitud de arco  $S$  es una función de las coordenadas  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  del punto del campo  $A$ ; ya que dada  $A$  queda determinado  $P$  y por lo tanto  $S$ .

Al cuadrivector velocidad de Minkowski del punto-masa en el acontecimiento  $P$  lo designamos con  $\hat{V}$ . Este cuadrivector es una magnitud retardada con respecto al acontecimiento  $\mathfrak{t}$  del campo. Las componentes contravariantes de  $\hat{V}$  están dadas por

$$V^i = \frac{dX^i}{dS} \quad (7)$$

El cuadrado del cuadrivector  $\hat{V}$  es igual a 1:

$$\hat{V}^2 = \Delta_{jk} V^j V^k = \frac{\Delta_{jk} dX^j dX^k}{dS^2} = 1 \quad (8)$$

El cuadrivector aceleración de Minkowski  $\hat{A}$  del punto-masa en su posición retardada en  $P$ , se define como sigue:

$$\hat{A} = \frac{d\hat{V}}{dS} \quad (9)$$

Las componentes contravariantes de  $\hat{A}$  están dadas por:

$$A^i = \frac{d^2 X^i}{dS^2} = \frac{dV^i}{dS}$$

Se obtiene inmediatamente la relación

$$\hat{A} \cdot \hat{V} = 0 \quad (10)$$

Consideramos ahora un punto-masa en movimiento uniforme. En este caso el cuadrivector velocidad  $\hat{V}$  es constante. Por medio de una simple transformación de Lorentz podemos pasar a un marco de referencia en el que ese punto-masa

está en reposo y en el que su tensor potencial gravitacional está dado por (4). Si a las magnitudes que intervienen en el segundo miembro de la ecuación (4) se les aplica la transformación de Lorentz inversa de la que reduce al reposo a un punto-masa que se mueve con un cuadrivector velocidad  $\hat{V}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \xi_{jk} &= [2V_j V_k - \Delta_{jk}]; \\ r &= \hat{r} \cdot \hat{V} . \end{aligned}$$

De donde se deduce inmediatamente que el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en movimiento uniforme<sup>9</sup> es:

$$b_{jk} = \frac{M [2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} \quad (11)$$

El numerador de  $b_{jk}$  depende exclusivamente de la masa y de las componentes del cuadrivector velocidad retardada del punto-masa generador del campo. Este numerador representa una generalización de la simple masa que aparece en el potencial Newtoniano. El denominador de  $b_{jk}$  es la proyección sobre el cuadrivector velocidad retardada del punto-masa, del cuadrivector que liga a éste en su posición retardada con el acontecimiento del campo. Este denominador  $\hat{r} \cdot \hat{V}$  desempeña en la teoría de Birkhoff el papel que tiene en la teoría de Newton la distancia  $r$ .

En la teoría de los potenciales retardados se establece el hecho de que toda función del tipo

$$\frac{F}{(\hat{r} \cdot \hat{V})}$$

en la que  $F$  es una función exclusivamente de magnitudes retardadas, - en nuestro caso de  $S$  - satisface la ecuación de D'Alembert:

$$\square \frac{F(S)}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} = 0$$

Se deduce de esto inmediatamente que el potencial (11) satisface la ecuación de D'Alembert. Si postulamos la expresión (11) como el potencial de un punto-masa en movimiento arbitrario, tendremos una expresión que se reduce al tensor potencial (4) cuando la velocidad en el espacio físico es igual a cero. Además, debido al hecho de que el tensor potencial dado por (11) satisface la ecuación de D'Alembert, se tendría una propagación con la velocidad de la luz, de las perturbaciones gravitacionales causadas por un punto-masa en movimiento arbitrario. En vista de estas razones postulamos a (11) como el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en movimiento arbitrario<sup>10</sup>. Esto significa que consideramos que las perturbaciones gravitacionales producidas por un punto-masa en movimiento arbitrario no depende de la aceleración que tenga ese punto-masa en el instante de producir las, y sólo dependen de la posición y velocidad que tiene en ese instante. Para calcular el gradiente del campo gravitacional (11) conviene obtener previamente los gradientes de  $S$  y de  $\hat{r} \cdot \hat{V}$ . Como ya se señaló  $S$  es una función de  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . Para obtener el gradiente de  $S$  partimos de la ecuación (5) que escribimos en la forma:

$$(x^1 - X^1)^2 - (x^2 - X^2)^2 - (x^3 - X^3)^2 - (x^4 - X^4)^2 = 0.$$

Derivando esta relación sucesivamente con respecto a  $x^1, x^2, x^3, x^4$  y teniendo en cuenta (7), se tiene

$$g_{\alpha\beta} \hat{r}^\alpha dS = \frac{\hat{r}}{\hat{r} \cdot \hat{V}} \quad (12)$$

Para calcular el gradiente de  $(\hat{r} \cdot \hat{V})$  escribimos a este producto escalar en la forma

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = (x^1 - X^1) V_1 - (x^2 - X^2) V_2 - (x^3 - X^3) V_3 - (x^4 - X^4) V_4. \quad (13)$$

En esta expresión son  $X^1, X^2, X^3, X^4$  y  $V_1, V_2, V_3, V_4$  funciones exclusivamente

de  $S$ , y dependen de las coordenadas  $x^1, x^2, x^3, x^4$  del punto del campo a través de esa función inter-mediaria  $S$ . Derivando (13) con respecto a  $x^i$  se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\hat{r} \cdot \hat{v}) = (\hat{r} \cdot \hat{A}) \frac{\partial S}{\partial x^i} - (\hat{v} \cdot \hat{v}) \frac{\partial S}{\partial x^i} + v_i.$$

En vista de (8) y de (12) este resultado se puede expresar como sigue:

$$grad(\hat{r} \cdot \hat{v}) = (\hat{r} \cdot \hat{A} - 1) \frac{\hat{r}}{(\hat{r} \cdot \hat{v})} + \hat{v}. \quad (14)$$

El gradiente de  $b_{jk}$  de la fórmula (11) se obtiene inmediatamente utilizando (12) y (14):

$$grad b_{jk} = \left[ \frac{2M[V_j A_k + A_j V_k]}{(\hat{r} \cdot \hat{v})^3} - \frac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{v})^3} (\hat{r} \cdot \hat{A} - 1) \right] \hat{r} - \frac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{v})^2} \hat{v}.$$

En la Fig. 1. se ve que el plano que pasa por el punto del campo  $P$  y que contiene al cuádrivector  $\hat{v}$  contiene también a  $PA$  que es cuádrivector  $\hat{r}$ . Si se interpreta al gradiente de la fórmula (15) como un cuádrivector, según se expuso más arriba, se puede decir que: el cuádrivector gradiente del campo gravitacional generado por un punto-masa en movimiento arbitrario, está contenido en el plano bidimensional que pasa por el punto del campo y que contiene al cuádrivector velocidad retardada de Minkowski del punto-masa generador del mismo.

Para obtener el cuádrivector aceleración de Minkowski de una partícula exploradora del campo gravitacional (1) necesitamos el gradiente de ese campo en una forma tensorialmente ortodoxa:

$$\nabla_i h_{jk} = \left[ \frac{2M [V_j A_k + V_k A_j]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} - \frac{M [2V_j V_k - \dot{\Delta}_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^3} (\hat{r} \cdot \hat{V} - 1) \right] \hat{r}_i - \frac{M [2V_j V_k - \dot{\Delta}_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} V_i. \quad (16)$$

Ese cuadrivector aceleración  $\hat{a}$  se obtiene sustituyendo (16) en (3), y resulta igual a una suma de cuatro cuadrivectores:

$$\hat{a} = \hat{a}(1) + \hat{a}(2) + \hat{a}(3) + \hat{a}(4). \quad (17)$$

Esos cuatro sumandos son proporcionales a los cuatro cuadrivectores fundamentales del problema:

- 1) el cuadrivector  $\hat{a}(1)$  es proporcional al cuadrivector  $\hat{r}$  que liga al punto-masa en su posición retardada con la partícula exploradora,
- 2) el cuadrivector  $\hat{a}(2)$  es proporcional al cuadrivector  $\hat{v}$  velocidad de Minkowski de la partícula exploradora;
- 3) el cuadrivector  $\hat{a}(3)$  es proporcional al cuadrivector  $\hat{V}$  velocidad de Minkowski retardado del punto-masa;
- 4) el cuadrivector  $\hat{a}(4)$  es proporcional al cuadrivector  $\hat{A}$  aceleración de Minkowski retardada del punto masa

El cuadrivector aceleración de Minkowski de una partícula exploradora del campo gravitacional generado por un punto-masa en movimiento arbitrario, es la suma de los cuatro cuadrivectores de la fórmula (17), que en forma explícita son:

$$\bar{a}(1) = \frac{M\hat{r}}{(\hat{r} \cdot \hat{v})^3} [1 - (\hat{r} \cdot \hat{A}) - 2(\hat{v} \cdot \hat{v})^2 - 4(\hat{r} \cdot \hat{v})(\hat{v} \cdot \hat{v})(\hat{v} \cdot \hat{A}) + 2(\hat{r} \cdot \hat{A})(\hat{v} \cdot \hat{v})^2]; \quad (18)$$

$$\bar{a}(2) = \frac{M\hat{v}}{(\hat{r} \cdot \hat{v})^3} [ -(\hat{r} \cdot \hat{v}) + (\hat{r} \cdot \hat{v})(\hat{r} \cdot \hat{A}) + (\hat{r} \cdot \hat{v})(\hat{v} \cdot \hat{v}) ]; \quad (19)$$

$$\bar{a}(3) = \frac{M\hat{v}}{(\hat{r} \cdot \hat{v})^3} [ -(\hat{r} \cdot \hat{v}) + 2(\hat{r} \cdot \hat{v})(\hat{v} \cdot \hat{v}) + 2(\hat{r} \cdot \hat{v})(\hat{r} \cdot \hat{v})(\hat{v} \cdot \hat{A}) - 2(\hat{r} \cdot \hat{v})(\hat{r} \cdot \hat{A})(\hat{v} \cdot \hat{v}) ]; \quad (20)$$

$$\bar{a}(4) = \frac{M\hat{A}}{(\hat{r} \cdot \hat{v})^3} [ 2(\hat{r} \cdot \hat{v})(\hat{r} \cdot \hat{v})(\hat{v} \cdot \hat{v}) ]. \quad (21)$$

Las fórmulas (18), (19), (20) y (21) están expresadas en forma invariante, independiente del marco de referencia. De ellas se deduce este resultado notable: la aceleración de una partícula exploradora del campo gravitacional de un punto-masa en movimiento arbitrario depende de la aceleración de ese punto-masa. Haciendo entonces mediciones físicas del movimiento de las partículas exploradoras del campo de un punto-masa, se puede deducir—es decir, medir indirectamente—la aceleración de éste. Esto significa que la señal gravitacional emitida por el punto-masa transmite información sobre su posición, su velocidad y su aceleración. Esto acaece a pesar de que el potencial no depende de la aceleración del punto-masa.

#### REFERENCIAS

- 1 G.D. Birkhoff, *Proc. Nat. Acad. Sciences* 29, 231 (1943)
- 2 C. Graef-Fernández, *Teoría de la gravitación de Birkhoff*, Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Montevideo, Uruguay, 1951, p. 123.
- 3 G.D. Birkhoff, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 1, 10 (1944)
- 4 G.D. Birkhoff, *Proc. Nat. Acad. Sciences* 30, 330, (1944)
- 5 Referencia 3 p. 15.
- 6 Referencia 4 p. 325.
- 7 C. Graef-Fernández, *Orbits in Birkhoff's central field*, *Proceedings of Symposium in Applied Mathematics*, Vol. IX, EE.UU., 1959, p. 169.
- 8 A. Barajas, *Proc. Nat. Acad. Sciences* 30, 55, (1944)
- 9 P. Kustaanheimo, *Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Physico-Mathematicae*, 17, No. 11 (1955)
- 10 C. Graef-Fernández, *Rev. Mex. Fis.* 1, 23 (1952)

EL HIPERANGULO SÓLIDO EN LA TEORÍA DE LA  
RELATIVIDAD ESPECIAL\*

Carlos Graef Fernández

Instituto de Física, Universidad Nacional de México

(Recibido: 15 Mayo 1962)

RESUMEN

*En este artículo se presenta el biperángulo sólido que es una generalización del concepto de ángulo sólido del espacio de tres dimensiones al espacio-tiempo cuatridimensional de Minkowski. El elemento diferencial de biperángulo sólido se introduce considerando un punto masa en movimiento en un marco de referencia inercial. Este punto masa emite continuamente un haz elemental de fotones que se mantiene paralelo a sí mismo durante el movimiento. En el marco de referencia inercial en que el punto masa está instantáneamente en reposo, el elemento diferencial de biperángulo sólido se define como el producto del elemento de ángulo sólido tridimensional dentro del cual se emite el haz de fotones, multiplicado por la diferencial del tiempo. Se establecen expresiones invariantes en las transfor-*

\*Este es el segundo artículo de una serie de tres que se titula Del Potencial de un Punto Masa a las Ecuaciones del Campo en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff.

*maciones de Lorentz para el elemento de hiperángulo sólido en cualquier marco de referencia inercial. Se introduce, en el espacio físico, una superficie material bidimensional, convexa, deformable y móvil, que encierra al punto masa durante su movimiento. Traduciendo al espacio-tiempo de Minkowski el objeto geométrico definido por el haz elemental de fotones limitado por esa superficie material, y emitido en un intervalo diferencial del tiempo, se obtiene el concepto de la bipercaña. El hipervolumen cuadrimensional de esta bipercaña tiene una relación muy íntima con el elemento de hiperángulo sólido. Se calculan además dos cuadvectores que son elementos de volumen tridimensional de caras de la bipercaña.*

El hiperángulo sólido es una generalización del concepto de ángulo sólido del espacio físico de tres dimensiones al espacio-tiempo de Minkowski de cuatro dimensiones de la teoría de la Relatividad Especial. Empezaremos con la definición de elemento diferencial de hiperángulo sólido. Para que ese elemento tenga validez en la Relatividad Especial debe definirse de manera que sea invariante en las transformaciones de Lorentz.

Consideramos un observador inercial que describe los acontecimientos. A este observador nos referimos como al "observador original", y a su marco de referencia como al "marco de referencia original". Imaginamos un punto masa que está en movimiento en el marco de referencia original. El elemento diferencial de hiperángulo sólido estará asociado a ese punto masa. Suponemos que el punto masa está en el instante  $T$  en el punto  $\pi$  de coordenadas  $(X, Y, Z)$  y que se mueve allí con el vector velocidad  $\bar{V}$  cuyas componentes son  $V^x, V^y, V^z$  y cuya magnitud es  $V$ . Caracterizamos al elemento diferencial de ángulo sólido por medio de un haz de fotones que imaginamos que surgen del punto masa continuamente. En este artículo llamamos "fotón" a un punto que se mueve con la velocidad de la luz  $c$ . Consideramos primero los cuatro fotones que emite el punto masa cuando está en el punto  $\pi$  en el instante  $T$  en las direcciones definidas por los vectores:  $\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r}, \bar{r} + \delta\bar{r}$  y  $\bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r}$ ; siendo  $d\bar{r}$  y  $\delta\bar{r}$  diferenciales del vector  $\bar{r}$ . Elegimos a  $d\bar{r}$  y a  $\delta\bar{r}$  de manera que los tres vectores:  $\bar{r}, d\bar{r}$  y  $\delta\bar{r}$  no sean coplanos; cosa que siempre es posible. Los cuatro planos definidos por las parejas de vec-

tores  $(\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r})$ ;  $(\bar{r} + d\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r})$ ;  $(\bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r}, \bar{r} + \delta\bar{r})$  y  $(\bar{r} + \delta\bar{r}, \bar{r})$  limitan un elemento de ángulo sólido con vértice en  $\pi$ , que designamos con  $d\Omega$ . Imaginamos que el punto masa al estar en  $\pi$ , emite en el instante  $T$  un gran número de fotones en direcciones comprendidas dentro del elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ . Este haz de fotones caracteriza en forma material al elemento (Fig. 1).

Si las trayectorias de dos fotones son dos rectas paralelas en el sistema de coordenadas  $x, y, z$  de un marco de referencia inercial, sus líneas de universo también serán dos rectas paralelas en el espacio-tiempo de Minkowski. Esas dos líneas de universo serán dos generatrices paralelas de dos conos de luz. Como el paralelismo en el espacio-tiempo de Minkowski es invariante en las transformaciones de Lorentz, dos fotones que tengan trayectorias paralelas en el espacio físico para un observador inercial, tendrán trayectorias paralelas en el espacio físico de cualquier otro observador inercial. Suponemos que el punto masa emite en cada punto de su trayectoria, y no sólo en el punto  $\pi$ , cuatro fotones en las direcciones caracterizadas, en el marco de referencia original, por los cuatro vectores:  $\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r}, \bar{r} + \delta\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r}$ . Las trayectorias de los cuatro fotones emitidos en el instante  $T$  son paralelas a las trayectorias correspondientes de los cuatro fotones emitidos en cualquier otro instante; esta afirmación es válida en cualquier sistema de referencia inercial. Se puede entonces imaginar que el punto masa arrastra en su movimiento a cuatro segmentos de trayectorias de fotones, que son los vectores  $\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r}, \bar{r} + \delta\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r}$ , que se mueven paralelamente a sí mismos. En todo instante salen del punto masa cuatro fotones que se mueven a lo largo de los cuatro vectores anclados en el punto en que ocurre la emisión. En cada instante definen los cuatro vectores un elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ . Imaginamos que el punto masa emite en cada instante un haz de fotones en direcciones comprendidas dentro de ese elemento de ángulo sólido. Para definir el elemento de hiperángulo sólido consideramos entonces un punto masa en movimiento que emite un haz elemental de fotones que se conserva paralelo a sí mismo durante el movimiento.

El elemento de ángulo sólido  $d\Omega$  está íntimamente relacionado con el elemento de volumen  $dV$  de la pirámide que tiene por aristas los cuatro vectores  $\bar{r}, \bar{r}, \bar{r} + d\bar{r}, \bar{r} + \delta\bar{r}$  y  $\bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r}$ . La expresión de ese elemento de volumen, en función del elemento de ángulo sólido, es:

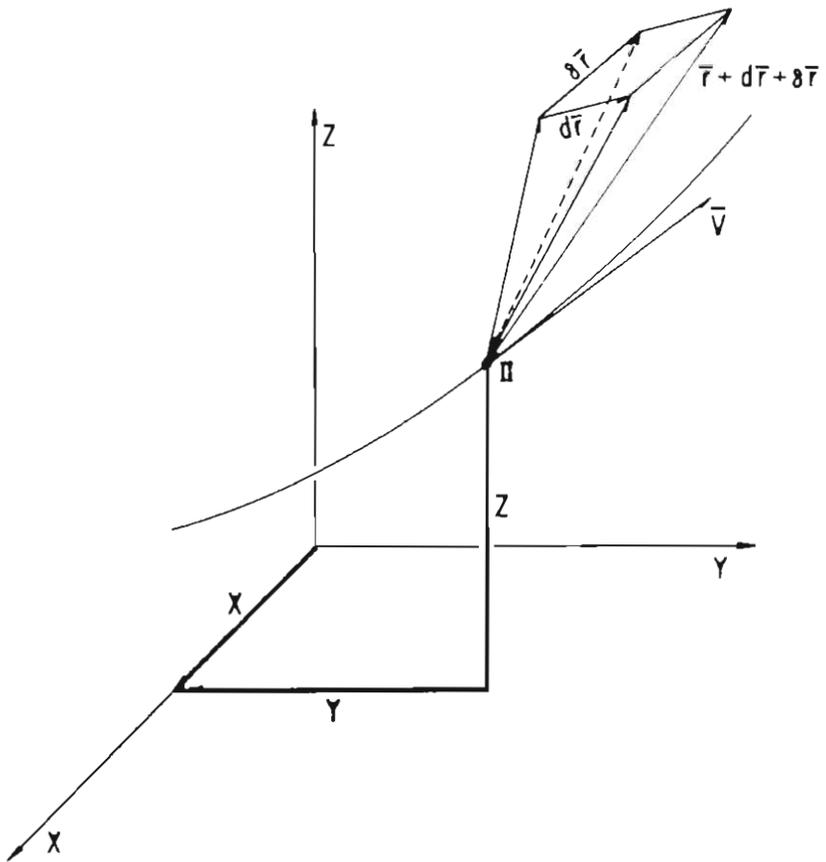


Fig. 1

$$d'v = \frac{1}{3} r^3 d\Omega$$

Ese mismo elemento de volumen es igual a la tercera parte del triple producto escalar de los tres vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{r} + d\vec{r}$ ,  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ .

$$d'v = \frac{1}{3} (\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}, \vec{r} + \delta\vec{r})$$

Igualando las dos expresiones para el elemento de volumen y simplificando la expresión del triple producto escalar, se obtiene para el elemento de ángulo sólido

$$d\Omega = \frac{(\vec{r}, d\vec{r}, \delta\vec{r})}{r^3}$$

Introducimos ahora un nuevo marco de referencia inercial. El sistema de coordenadas  $x_0, y_0, z_0$  de ese marco de referencia se mueve con un vector velocidad constante  $\vec{V}$  con respecto al sistema de coordenadas del marco de referencia original.

Llamemos a acontecimiento  $P$  al paso del punto masa por el punto  $\pi$  en el instante  $T$  en el marco de referencia original. Sabemos que el vector velocidad con el que se mueve el punto masa en ese acontecimiento  $P$  es  $\vec{V}$ , que es el mismo con el cual se mueve el sistema de coordenadas del nuevo marco de referencia inercial con relación al marco de referencia original. En el nuevo marco de referencia inercial el punto masa está instantáneamente en reposo en el acontecimiento  $P$ . Llamamos a este nuevo marco de referencia "marco en reposo". Para cada acontecimiento de la línea de universo del punto masa hay un marco en reposo. Para comodidad de cálculo suponemos que el origen del sistema de coordenadas del marco en reposo se encuentra en el punto  $\pi$  en el instante  $T$ , según el observador original; y suponemos también que, según el observador original, los ejes de coordenadas del marco en reposo se mueven de manera que sean siempre paralelos a los ejes correspondientes del marco de referencia original.

Examinaremos con detalle, en el marco de referencia original, al vector  $\vec{r}$ ,

considerándolo como segmento de la trayectoria de un fotón. El origen del vector  $\bar{r}$  es el punto  $\pi$ , lugar en que el punto masa emitió a ese fotón al pasar por allí en el instante  $T$ .

Usamos un sistema de unidades en el que la velocidad de la luz en el vacío es igual a uno. Si llamamos  $r$  a la longitud del vector  $\bar{r}$  entonces el fotón que sale de  $\pi$  en el instante  $T$ , en la dirección del vector  $\bar{r}$ , llega al extremo de este vector en el instante  $T + r$ . El vector  $\bar{r}$  separa en el espacio físico del marco de referencia original a dos acontecimientos caracterizados por la emisión de un fotón en  $\pi$  en el instante  $T$ , y por la llegada de ese fotón al extremo del vector  $\bar{r}$  en el instante  $T + r$ .

Consideremos ahora esos mismos dos acontecimientos en el marco en reposo. Llamemos  $\bar{r}_0$  al vector que los separa en el espacio físico de ese marco. Los vectores  $\bar{r}$  y  $\bar{r}_0$  están ligados por la siguiente ecuación<sup>1</sup>

$$\bar{r}_0 = \bar{r} - \frac{r}{\sqrt{1-V^2}} \bar{V} + \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}} (\bar{r} \cdot \bar{V}) \bar{V}. \quad (2)$$

Calculamos ahora las diferenciales de  $\bar{r}_0$ . Hay que tener en cuenta que tanto  $d\bar{r}_0$  como  $\delta\bar{r}_0$  se refieren al acontecimiento  $P$ , lo que significa que  $\bar{V}$  no varía en este proceso. Escribimos a continuación los tres vectores  $\bar{r}_0$ ,  $d\bar{r}_0$  y  $\delta\bar{r}_0$  exhibiendo su componente a lo largo del vector velocidad  $\bar{V}$ :

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 &= \left[ \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}} (\bar{r} \cdot \bar{V}) - \frac{r}{\sqrt{1-V^2}} \right] \bar{V} + \bar{r}; \\ d\bar{r}_0 &= \left[ \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}} (\bar{V} \cdot d\bar{r}) - \frac{\bar{r} \cdot d\bar{r}}{r\sqrt{1-V^2}} \right] \bar{V} + d\bar{r}; \\ \delta\bar{r}_0 &= \left[ \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2\sqrt{1-V^2}} (\bar{V} \cdot \delta\bar{r}) - \frac{\bar{r} \cdot \delta\bar{r}}{r\sqrt{1-V^2}} \right] \bar{V} + \delta\bar{r}. \end{aligned}$$

Con objeto de obtener el elemento de ángulo sólido en el marco en reposo

según la fórmula (1), es necesario calcular el triple producto escalar  $(\bar{r}_0, d\bar{r}_0, \delta\bar{r}_0)$ . Simplificando la expresión se obtiene:

$$(\bar{r}_0, d\bar{r}_0, \delta\bar{r}_0) = \frac{r - \bar{r} \cdot \bar{V}}{r\sqrt{1 - V^2}} (\bar{r}, d\bar{r}, \delta\bar{r}).$$

Introduciendo el elemento de ángulo sólido  $d\Omega_0$  en el marco en reposo, y el elemento de ángulo sólido  $d\Omega$  en el marco de referencia original, se obtiene de acuerdo con la fórmula (1):

$$r_0^3 d\Omega_0 = \frac{r^2 (r - \bar{r} \cdot \bar{V})}{\sqrt{1 - V^2}} d\Omega. \quad (3)$$

Con el objeto de expresar  $d\Omega_0$  exclusivamente en términos de magnitudes referidas al marco de referencia original, calculamos  $r_0^3$  de la ecuación (2):

$$r_0^3 = \frac{[r - \bar{r} \cdot \bar{V}]^3}{(1 - V^2)^{3/2}}$$

Con ayuda de este valor obtenemos de la ecuación (3):

$$d\Omega_0 = \frac{r^2 (1 - V^2)}{(r - \bar{r} \cdot \bar{V})^2} d\Omega. \quad (4)$$

Calculando el segundo miembro de la fórmula (4) en cualquier marco de referencia inercial se obtendrá siempre el mismo valor para  $d\Omega_0$ , ya que éste está referido al marco en reposo del punto masa. El segundo miembro de la ecuación (4) es un invariante en las transformaciones de Lorentz que se reduce al elemento de ángulo sólido en el marco en reposo del punto masa. Como el vector  $\bar{r}$  sólo caracteriza la dirección que tiene el elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ , es natural que ese invariante no depende de la magnitud de  $\bar{r}$ , y sólo dependa de su dirección. En efecto, en la ecuación (4), el segundo miembro es independiente de la magnitud de  $r$ .

Para establecer el elemento de hiperángulo sólido partimos del invariante (4), expresándolo en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones de Minkowski que

es el marco de referencia natural para la teoría de la Relatividad Especial. En este espacio-tiempo  $(T, X, Y, Z)$  son las cuatro coordenadas del acontecimiento  $P$  que corresponde al paso del punto masa, en el instante  $T$ , por el punto  $\pi(X, Y, Z)$ . A las coordenadas del acontecimiento  $P$  las designaremos indistintamente con  $(T, X, Y, Z)$  o con  $(X^1, X^2, X^3, X^4)$ . Usaremos literales mayúsculas para designar acontecimientos de la línea de universo del punto masa; también usaremos mayúsculas para designar la velocidad y la aceleración del punto masa y las componentes de las mismas. Las coordenadas de otros acontecimientos las designaremos con literales minúsculas, v.g.  $(t, x, y, z)$  o  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . El cuadrado del elemento de arco en el espacio de Minkowski está dado por<sup>2</sup>

$$ds^2 = \Delta_{ij} dx^i dx^j = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad .$$

Llamaremos  $L$  a la línea de universo del punto masa. Elegimos en esa línea a un acontecimiento fijo para origen de los arcos. Sea  $S$  la longitud del arco medida a lo largo de  $L$ , desde el acontecimiento fijo hasta el acontecimiento  $P$ . Las coordenadas de  $P$  son entonces funciones de  $S$ :

$$\begin{aligned} T &= T(S) = X^1(S); & X &= X(S) = X^2(S); \\ Y &= Y(S) = X^3(S); & Z &= Z(S) = X^4(S). \end{aligned}$$

Al cuadrivector velocidad de Minkowski del punto masa lo designaremos<sup>2</sup> con  $\hat{V}$ . Sus componentes contravariantes son

$$v^i = \frac{dX^i}{dS} \quad .$$

En este artículo todos los índices tensoriales varían de 1 a 4. Del cuadrado del elemento de arco se obtiene inmediatamente la relación

$$dS = \sqrt{1 - V^2} dT, \quad .$$

con cuya ayuda se calculan las componentes contravariantes del cuadrivector velo-

idad:

$$V^1 = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} ; V^2 = \frac{V^x}{\sqrt{1-V^2}} ;$$

$$V^3 = \frac{V^y}{\sqrt{1-V^2}} ; V^4 = \frac{V^2}{\sqrt{1-V^2}} .$$

En estas fórmulas, el número 2 es un exponente cuando aparece a la derecha y arriba del símbolo "V" dentro de la raíz cuadrada; fuera de la raíz cuadrada, y en esa misma posición, el número 2 es un índice tensorial.

Consideremos ahora el cuadrivector  $\hat{r}$  cuyo origen es el acontecimiento P en el que un fotón parte del punto  $\pi$  en el instante T, y cuyo extremo es el acontecimiento A en el que ese fotón llega al extremo del vector  $\vec{r}$ . Si llamamos ( $\xi, \eta, \zeta$ ) a las componentes del vector  $\vec{r}$ , entonces la magnitud de ese vector será:

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

y las componentes del cuadrivector  $\hat{r}$  son

$$\hat{r}(r, \xi, \eta, \zeta) .$$

Para el producto escalar de los cuadrivectores  $\hat{r}$  y  $\hat{V}$  obtenemos:

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = \Delta_{ij} r^i V^j = \frac{r - \xi V^x - \eta V^y - \zeta V^2}{\sqrt{1-V^2}} .$$

Este producto escalar puede expresarse como:

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = \frac{r - \vec{r} \cdot \vec{V}}{\sqrt{1-V^2}} .$$

Con ayuda de esta última fórmula se obtiene para el invariante (4):

$$d\Omega_0 = \frac{r^2 d\Omega}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} \quad (5)$$

Para definir al elemento de hiperángulo sólido es necesario considerar, además del acontecimiento  $P(T, X, Y, Z)$ , al acontecimiento  $Q$  de la línea de universo  $L$  del punto masa, correspondiente a la longitud de arco  $S + dS$ . En la línea de universo  $L$  están situados entonces los acontecimientos  $P$  y  $Q$ ; el acontecimiento  $P$  corresponde al arco  $S$  y el acontecimiento  $Q$  al arco  $S + dS$ . El elemento de arco  $PQ$  es un intervalo temporal oide, ya que es una porción de la línea de universo del punto masa. En consecuencia  $dS$  es real. Dados dos acontecimientos de la línea de universo del punto masa, siempre se puede designar a uno con la letra  $P$  y al otro con  $Q$ , de manera que  $PQ = dS$  sea, además de real, positiva. Definimos al elemento de hiperángulo sólido como al escalar

$$dH = \frac{r^2 d\Omega}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} dS \quad (6)$$

El elemento de hiperángulo sólido está entonces asociado a un elemento de arco  $dS$  de la línea de universo de un punto masa. En cada acontecimiento emite ese punto masa un haz elemental de fotones, dentro de un elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ , y en la dirección del cuadrivector  $\hat{r}$ . El elemento de hiperángulo sólido  $dH$  definido en (6) es invariante en las transformaciones de Lorentz, ya que son invariantes sus dos factores, el (5) y la  $dS$ . En el marco de referencia en reposo se tiene

$$dH = d\Omega_0 dT_0,$$

ya que en este marco la  $dS$  es igual al intervalo de tiempo  $dT_0$ . En el sistema en reposo del punto masa, el elemento de hiperángulo sólido se reduce entonces al producto del elemento de ángulo sólido por el intervalo de tiempo.

En seguida demostraremos que existe una fórmula análogo a la (1) que liga al elemento de hiperángulo sólido (6) con un hipervolumen. En la fórmula (1) el numerador es el triple de volumen de una pirámide elemental y el denominador es el cubo de la arista de esa pirámide. Para obtener en el espacio-tiempo el objeto geométrico análogo a dicha pirámide, imaginamos las líneas de universo de los fotones que salen del punto masa cortadas por una hipersuperficie  $\Gamma$  (Fig. 2). Para generar una hipersuperficie de esta índole se puede utilizar en el espacio físico una superficie material bidimensional, cerrada y convexa, deformable y móvil, que encierra al punto masa. Esta superficie material se mueve en el espacio físico, deformándose, pero manteniéndose convexa, encerrando siempre en su interior al punto masa. De aquí en adelante llamaremos brevemente "superficie material" al objeto geométrico que acabamos de describir.

Cada punto de la hipersuperficie  $\Gamma$  en el espacio-tiempo es un acontecimiento definido por el paso de un punto de la superficie material por un punto del espacio físico en un instante determinado. Cada fotón que emerge del punto masa choca alguna vez con la superficie material. Este choque es un acontecimiento de la hipersuperficie  $\Gamma$ . En cada línea de universo de fotón que emerge del punto masa queda definido así un cuadrivector que liga a aquel acontecimiento en la línea de universo del punto masa que consiste en la emisión del fotón, con el acontecimiento de la hipersuperficie  $\Gamma$  que consiste en la llegada del fotón a la superficie material.

Llamaremos "rayo de luz" a la trayectoria de un fotón en el espacio físico. Todo rayo de luz que emerge del punto masa corta a la superficie material en un solo punto, ya que esta última es convexa. En consecuencia, toda línea de universo de fotón que es emitido por el punto masa, corta a la hipersuperficie  $\Gamma$  en un solo acontecimiento.

Para determinar la dirección de un rayo de luz en el marco de referencia original utilizaremos como es costumbre, los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ . El ángulo  $\theta$  es el que forma la porción positiva del eje  $Oz$  con el rayo de luz; el ángulo  $\varphi$  es el que forma la porción positiva del eje  $Ox$  con la proyección del rayo de luz sobre el plano  $xOy$ . La pareja de ángulos  $(\theta, \varphi)$  caracteriza una dirección en el espacio físico del marco de referencia original.

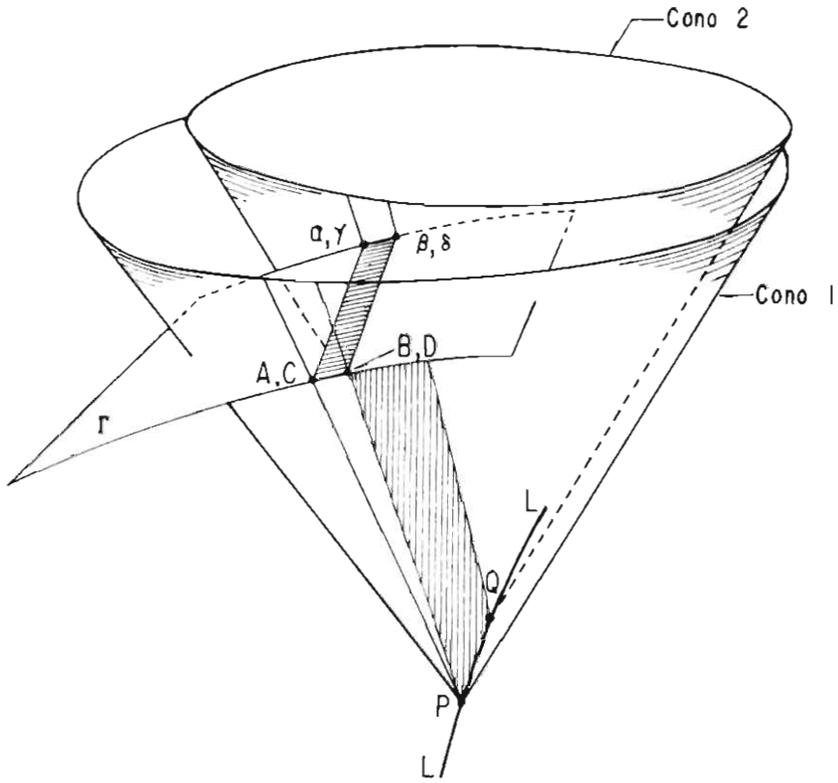


Fig. 2

Estableceremos ahora una ecuación que caracteriza a la hipersuperficie  $\Gamma$ . A cada acontecimiento de esta hipersuperficie le asociamos un fotón; se trata del fotón que, siendo emitido por el punto masa, define al chocar con la superficie material precisamente a ese acontecimiento de  $\Gamma$ . Para caracterizar al acontecimiento de  $\Gamma$  utilizamos tres parámetros: el primero es la longitud de arco  $S$  que localiza en la línea de universo  $L$  del punto masa al acontecimiento emisión del fotón; el segundo y el tercer parámetros son los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  que caracterizan la dirección del rayo de luz de ese fotón en el marco de referencia original. El parámetro  $S$  es la longitud de arco de Minkowski medida a lo largo de  $L$ , desde un "origen de arcos" en esa misma línea de universo, hasta el acontecimiento emisión del fotón. A cada acontecimiento de  $\Gamma$  le corresponden entonces los tres parámetros  $(S, \theta, \varphi)$  que son sus coordenadas Gaussianas. La hipersuperficie  $\Gamma$  se puede definir por el tiempo  $r$  que tarda el fotón, asociado a un acontecimiento de  $\Gamma$ , en ir desde su emisión hasta la superficie material. Ese tiempo  $r$  es función de  $S$  que caracteriza al acontecimiento emisión del fotón, y también es función de los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  que caracterizan la dirección del rayo de luz del fotón. La hipersuperficie  $\Gamma$  está dada entonces por la ecuación:

$$r = F(S, \theta, \varphi) ,$$

en donde suponemos que  $F$  es una función continua con primeras derivadas continuas. Como aquí utilizamos unidades en las que la velocidad de la luz en el vacío es igual a uno,  $r$  es, además del tiempo que tarda el fotón en ir desde el punto masa hasta la superficie material, también la longitud del vector que el fotón recorre en el espacio físico entre el punto masa y la superficie material.

En el acontecimiento  $P$  consideramos especialmente cuatro fotones que son emitidos por el punto masa en  $P$  en las cuatro direcciones  $(\theta, \varphi)$ ;  $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ ;  $(\theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi)$ ;  $(\theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi)$ . A esas cuatro direcciones corresponden cuatro tiempos que son los que tardan los fotones respectivos en llegar desde el punto masa hasta la superficie material. Los cuatro tiempos son iguales a las longitudes que esos fotones recorren en el espacio físico desde el punto masa hasta la superficie material. Estos cuatro tiempos son:

$$r = F(S, \theta, \varphi) ;$$

$$r + dr = F(S, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi) ,$$

$$r + \delta r = F(S, \theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi) .$$

$$r + dr + \delta r = F(S, \theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi) .$$

Llamamos  $\hat{r}$  al cuadrivector que tiene origen en el acontecimiento  $P$  y su extremo en la intersección de la línea de universo del fotón de dirección  $(\theta, \varphi)$  con la hipersuperficie  $\Gamma$ . De un modo consistente llamamos  $\hat{r} + d\hat{r}$ ,  $\hat{r} + \delta\hat{r}$  y  $\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$  a los cuadrivectores que tienen sus orígenes en  $P$  y sus extremos en las intersecciones con la hipersuperficie  $\Gamma$ , de las líneas de universo de los fotones que salen de  $P$  en las direcciones

$$(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi); (\theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi)$$

y

$$(\theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi) .$$

A los extremos de los cuatro cuadrivectores  $\hat{r}$ ,  $\hat{r} + d\hat{r}$ ,  $\hat{r} + \delta\hat{r}$  y  $\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$  les llamamos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  respectivamente. Como la Fig. 2 represento en el plano bidimensional una situación geométrica del espacio-tiempo de cuatro dimensiones, fue necesario encimar a los cuadrivectores  $\hat{r}$  y  $\hat{r} + \delta\hat{r}$  y también a los cuadrivectores  $\hat{r} + d\hat{r}$  y  $\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$ . Por eso aparecen en la Fig. 2 los acontecimientos  $A$  y  $C$  representados por un solo punto; también están encimados en un solo punto los acontecimientos  $B$  y  $D$ .

Las consideraciones que hicimos para el acontecimiento  $P$  las repetimos ahora para el acontecimiento  $Q$ . Fijamos nuestra atención en las líneas de universo de los cuatro fotones que salen de  $Q$  en las direcciones  $(\theta, \varphi)$ ;  $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ ;  $(\theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi)$  y  $(\theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi)$ . En esas cuatro líneas de universo definimos segmentos cortándolas con la hipersuperficie  $\Gamma$ . Llamamos ahora  $\hat{r} + \Delta\hat{r}$ ,  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r}$ ,  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + \delta\hat{r}$  y  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$  a los cuatro cuadrivectores a lo largo de esas cuatro líneas, que tienen su origen en  $Q$  y su extremo en la hipersuperficie  $\Gamma$ . Sean  $r + \Delta r$ ,  $r + \Delta r + dr$ ,  $r + \Delta r + \delta r$  y  $r + \Delta r + dr + \delta r$  los cuatro

intervalos de tiempo que la luz tarda en recorrer cada uno de esos cuatro segmentos de líneas de universo de fotones. Recordando que la ecuación de la hipersuperficie  $\Gamma$  es  $r = F(S, \theta, \varphi)$ , tenemos:

$$r + \Delta r = F(S + dS, \theta, \varphi);$$

$$r + \Delta r + dr = F(S + dS, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi);$$

$$r + \Delta r + \delta r = F(S + dS, \theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi);$$

$$\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r} = F(S + dS, \theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi).$$

A los extremos de los cuadrivectores  $\hat{r} + \Delta\hat{r}$ ,  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r}$ ,  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + \delta\hat{r}$  y  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$  les llamamos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  respectivamente. En la Fig. 2 fue necesario encimar a los dos cuadrivectores  $\hat{r} + \Delta\hat{r}$  y  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + \delta\hat{r}$ ; también fue necesario encimar a  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r}$  y a  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$ . En consecuencia, en la Fig. 2 se confunden los puntos  $\alpha$  y  $\gamma$ , así como también  $\beta$  y  $\delta$ .

De las consideraciones anteriores se deducen las siguientes relaciones:

$$dr = \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi, \quad \delta r = \frac{\partial F}{\partial \theta} \delta\theta + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi; \quad \Delta r = \frac{\partial F}{\partial S} dS.$$

Las líneas de universo de los fotones que pasan por  $P$  son las generatrices de un cono de luz que llamamos el "cono 1". Las líneas de universo de fotones que pasan por el acontecimiento  $Q$  son las generatrices de otro cono de luz que llamamos el "cono 2" (Fig. 2). Los cuatro cuadrivectores  $\hat{r}$ ,  $\hat{r} + d\hat{r}$ ,  $\hat{r} + \delta\hat{r}$  y  $\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$  son segmentos de generatriz del cono 1. Los cuatro cuadrivectores  $\hat{r} + \Delta\hat{r}$ ,  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r}$ ,  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + \delta\hat{r}$  y  $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$  son segmentos de generatriz del cono 2. Sean  $t, x, y, z$  las coordenadas de un acontecimiento del cono 1. Las ecuaciones paramétricas de este cono son:

$$\begin{aligned} t &= T + r; \\ x &= X + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi; \\ y &= Y + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi; \\ z &= Z + r \cos \theta. \end{aligned}$$

Las componentes contravariantes del cuadrivector que liga a  $P$  con el acontecimiento del cono 1 son

$$(r, r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta).$$

Se comprueba fácilmente que la longitud de este cuadrivector es nula, lo que es consecuencia de que se trata de un segmento de línea de universo de fotón. El acontecimiento  $P(T, X, Y, Z)$  es el vértice del cono 1; los parámetros  $r, \theta, \varphi$  son las coordenadas Gaussianas en el cono 1.

El vértice del cono 2 es el punto:

$$Q(T + V^1 dS, X + V^2 dS, Y + V^3 dS, Z + V^4 dS);$$

en donde  $V^1, V^2, V^3, V^4$  son las componentes contravariantes del cuadrivector velocidad del punto masa en el acontecimiento  $P$ . Sean ahora  $t, x, y, z$  las coordenadas de un acontecimiento en el cono 2. Las ecuaciones paramétricas de este cono 2 son:

$$\begin{aligned} t &= T + V^1 dS + r; \\ x &= X + V^2 dS + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi; \\ y &= Y + V^3 dS + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi; \\ z &= Z + V^4 dS + r \cos \theta. \end{aligned}$$

Las componentes contravariantes del cuadrivector que liga a  $Q$  con el acontecimiento del cono son:  $(r, r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta)$ . La longitud de este cuadrivector es nula.

Los parámetros  $r, \theta, \varphi$  son las coordenadas Gaussianas en el cono 2.

Al establecer el elemento de ángulo sólido en el espacio físico de tres dimensiones consideramos el elemento de volumen de una pirámide. El caso de elemento de hiperángulo sólido en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones corresponde a esa pirámide un objeto geométrico que llamamos "hipercuña". El hipervolumen de esta hipercuña está constituido por los segmentos de líneas de universo de fotones que salen del punto masa entre los acontecimientos  $P$  y  $Q$ , dentro del elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ ; los segmentos tienen un extremo en un acontecimiento de la línea de universo del punto masa, y el otro extremo en la hipersuperficie  $\Gamma$ . En la Fig. 2 la hipercuña tiene por vértices los acontecimientos:

$$P, Q, ABCD; \alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

Llamamos "tapa" de la hipercaña al paralelepípedo  $ABCD\alpha\beta\gamma\delta$ . La hipercaña tiene dos caras cónicas: la  $PABCD$  y la  $Q\alpha\beta\gamma\delta$ . Las caras cónicas de la hipercaña son regiones de los conos 1 y 2. Además de la tapa tiene la hipercaña otras dos caras llanas que llamamos "flancos". Un flanco es  $PQBD, \beta\delta$  y el otro flanco es  $PQAC, \alpha\gamma$ .

Reunimos en una tabla a las coordenadas Gaussianas de los acontecimientos  $A, B, C, D$  del cono 1 y a las coordenadas Gaussianas de los acontecimientos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  del cono 2.

TABLA 1

Acontecimientos	Coordenadas Gaussianas		
	$r_1$	$\theta_1$	$\varphi_1$
A	$r$	$\theta$	$\varphi$
B	$r + dr$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
C	$r + \delta r$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
D	$r + dr + \delta r$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$
$\alpha$	$r + \Delta r$	$\theta$	$\varphi$
$\beta$	$r + \Delta r + dr$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
$\gamma$	$r + \Delta r + \delta r$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
$\delta$	$r + \Delta r + dr + \delta r$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$

Las componentes contravariantes de cualquiera de los cuatro cuadrivectores  $P\hat{A}$ ,  $P\hat{B}$ ,  $P\hat{C}$ , y  $P\hat{D}$  contenidos en el cono 1 se calculan como sigue:

$$(r_1, r_1 \operatorname{sen} \theta_1 \cos \varphi_1, r_1 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \varphi_1, r_1 \cos \theta_1).$$

Esas cuatro expresiones representan también las componentes contravariantes de los cuadrivectores  $Q\alpha, Q\beta, Q\gamma, Q\delta$  contenidos en el cono 2.

Dos cuadrivectores son paralelos, cuando las cuatro componentes contravariantes de uno, son equimúltiplos de las cuatro componentes contravariantes del otro. Es fácil comprobar los siguientes paralelismos entre las aristas de la hipercuña:

$$\begin{aligned} PA &|| Q\alpha; PB || Q\beta; PC || Q\gamma; PD || Q\delta; \\ AB &|| CD || a\beta || \gamma\delta; \\ AC &|| BD || a\gamma || \beta\delta, \\ AD &|| BC || a\delta || \beta\gamma. \end{aligned}$$

Estos paralelismos justifican nuestra afirmación que la tapa de la hipercuña es un paralelepípedo.

Procedemos ahora a calcular el hipervolumen cuádrimensional de la hipercuña. El elemento de hipervolumen será el hiperparalelepípedo cuádrimensional (Fig. 3)  $A'B'C'D'A''B''C''D''\alpha\beta\gamma\delta\alpha''\beta''\gamma''\delta''$ . Los ocho vértices latinos están en el cono 1 y los ocho vértices griegos están en el cono 2. La Tabla 2 contiene a las coordenadas Gaussianas de los 16 vértices. En la tabla " $\tau$ " designa a un parámetro variable que variará entre cero y  $r$ . El hiperparalelepípedo elemental barre toda la hipercuña al variar  $\tau$  entre cero y  $r$ . Para  $\tau = 0$  el hiperparalelepípedo está adyacente al "filo"  $PQ$  de la hipercuña; para  $\tau = r$  el hiperparalelepípedo está adyacente a la tapa de la hipercuña.

Hay ocho cuadrivectores que tienen su origen en  $P$  y su extremo en los ocho vértices designados con letras latinas en la Tabla 2. Todos estos cuadrivectores están en el cono 1. Otras ocho cuadrivectores tienen su origen en  $Q$  y su extremo en los ocho vértices designados con letras griegas en la tabla 2. Estos ocho cuadrivectores están en el cono 2 Fig. 3. Las componentes contravariantes de las 16 cuadrivectores, ocho con sus origen en  $P$  y ocho con su origen en  $Q$ , son

$$(r_1, r_1 \operatorname{sen} \theta_1 \cos \varphi_1, r_1 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \varphi_1, r_1 \cos \theta_1) .$$

Sean  $F$  y  $G$  dos acontecimientos cualesquiera del cono 1; las componentes

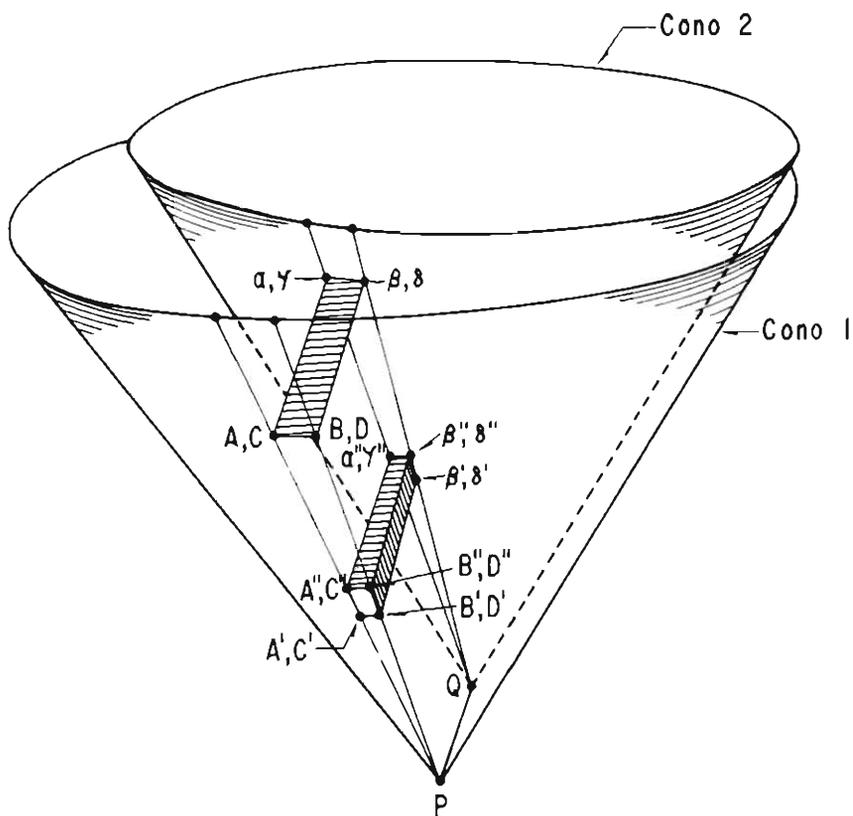


Fig. 3

contravariantes del cuadrivector  $\widehat{FG}$  se obtienen como diferencias de las componentes contravariantes de los cuadrivectores  $P\widehat{G}$  y  $P\widehat{F}$ . Si  $\Phi$  y  $\Psi$  son dos acontecimientos cualesquiera del cono 2, se tienen las ecuaciones obvias:

$$\begin{aligned}\Phi\Psi &= Q\widehat{\Psi} - Q\widehat{\Phi} ; \\ F\widehat{\Phi} &= Q\widehat{\Phi} + P\widehat{Q} - P\widehat{F} .\end{aligned}$$

Estas relaciones permiten calcular las componentes contravariantes de cualquier cuadrivector cuyo origen y cuyo extremo sean vértices de la Tabla 2.

Se comprueban fácilmente los paralelismos de los cuatro juegos de aristas:

$$\begin{aligned}A'B' || C'D' || A''B'' || C''B'' || \alpha'\beta' || \gamma'\delta' || \alpha''\beta'' || \gamma''\beta'' ; \\ A'C' || B'D' || A''C'' || B''D'' || \alpha'\gamma' || \beta'\delta' || \alpha''\gamma'' || \beta''\gamma'' ; \\ A'D' || B'C' || A''D'' || B''C'' || \alpha'\delta' || \beta'\gamma' || \alpha''\delta'' || \beta''\gamma'' ; \\ A'A'' || B'B'' || C'C'' || D'D'' || \alpha'a' || \beta'\beta'' || \gamma'\gamma'' || \delta'\delta'' .\end{aligned}$$

Para calcular el hipervolumen cuadrídimensional de nuestro hiperparalelepípedo elemental se requieren solamente los cuatro cuadrivectores  $A'\widehat{B}'$ ,  $A'\widehat{C}'$ ,  $A'\widehat{A}'$ ,  $A'\widehat{a}'$ . Para abreviar utilizaremos la siguiente notación:

$$d\widehat{u} = A'\widehat{B}' ; d\widehat{v} = A'\widehat{C}' ; d\widehat{\tau} = A'\widehat{A}' ; d\widehat{w} = A'\widehat{a}' .$$

De la Tabla 2 se ve que cuando  $\tau = 0$   $A', B', C'$  y  $D'$  se confunden con  $P$  y  $\alpha', \beta', \gamma'$  y  $\delta'$  se confunden con  $Q$ . Se ve además que cuando  $\tau = r$ ,  $A' \equiv A$ ,  $B' \equiv B$ ,  $C' \equiv C$ ,  $D' \equiv D$ ,  $\alpha' \equiv \alpha$ ,  $\beta' \equiv \beta$ ,  $\gamma' \equiv \gamma$ ,  $\delta' \equiv \delta$ . Al variar  $\tau$  desde 0 hasta  $r$ , el hiperparalelepípedo elemental recorre la hipercaña desde el filo hasta la tapa. Para obtener el hipervolumen de la hipercaña hay que integrar el volumen del hiperparalelepípedo elemental desde que  $\tau$  vale cero hasta que  $\tau$  vale  $r$ .

Para calcular el hipervolumen de la hipercaña es necesario introducir el pseudotensor<sup>3</sup>  $E_{ijkl}$  que se deriva de un modo muy sencillo del sistema totalmente antisimétrico  $e_{ijkl}$ . En el espacio-tiempo de Minkowski los índices de este sis-

TABLA 2

Vértice	COORDENADAS GAUSSIANAS		
	$r_1$	$\theta_1$	$\varphi_1$
A'	$\tau$	$\theta$	$\varphi$
B'	$\tau + \tau \frac{dr}{r}$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
C'	$\tau + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
D'	$\tau + \tau \frac{dr}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$
A''	$\tau + d\tau$	$\theta$	$\varphi$
B''	$\tau + d\tau + \tau \frac{dr}{r}$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
C''	$\tau + d\tau + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
D''	$\tau + d\tau + \tau \frac{dr}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$
$\alpha'$	$\tau + \tau \frac{\Delta r}{r}$	$\theta$	$\varphi$
$\beta'$	$\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{dr}{r}$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
$\gamma'$	$\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
$\delta'$	$\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{dr}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$
$\alpha''$	$\tau + d\tau + \tau \frac{\Delta r}{r}$	$\theta$	$\varphi$
$\beta''$	$\tau + d\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{dr}{r}$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
$\gamma''$	$\tau + d\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
$\delta''$	$\tau + d\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{dr}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$

tema varían de uno a cuatro. El sistema  $e_{ijkl}$  se define por medio de las ecuaciones:

$$e_{ijkl} = +1 \text{ cuando } ijkl \text{ es una permutación par de } 1234;$$

$$e_{ijkl} = -1 \text{ cuando } ijkl \text{ es una permutación impar de } 1234;$$

$$e_{ijkl} = 0 \text{ si dos cualesquiera de los cuatro índices son iguales.}$$

El sistema  $e_{ijkl}$  no es un tensor. Se construye, a partir de ese sistema, un pseudotensor con ayuda del determinante  $\Delta$  del tensor métrico fundamental  $\Delta_{ij}$ .

$$\Delta = |\Delta_{ij}|.$$

El pseudotensor  $E_{ijkl}$  se define como sigue:

$$E_{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} e_{ijkl}.$$

En el sistema de coordenadas que utilizamos en este artículo para el espacio-tiempo de Minkowski  $\Delta = -1$  y  $\sqrt{-\Delta} = +1$ . En nuestro caso particular, que es el de una geometría pseudoeuclidiana, coinciden el pseudotensor  $E_{ijkl}$  y el sistema completamente antisimétrico  $e_{ijkl}$ .

El elemento de hipervolumen del hiperparalelepípedo cuyas aristas son los cuatro cuadrivectores  $d\hat{u}, d\hat{v}, d\hat{\tau}, d\hat{w}$  es igual a

$$E_{ijkl} du^i dv^j d\tau^k dw^l.$$

Esta expresión es el determinante de cuarto orden cuyas cuatro renglones están formados por las componentes contravariantes de los cuadrivectores  $d\hat{u}, d\hat{v}, d\hat{\tau}, d\hat{w}$ .

Ejecutando las operaciones se obtiene:

$$+ \text{sen } \theta \left| \begin{array}{c} d\theta d\varphi \\ \delta\theta\delta\varphi \end{array} \right| (V^1 - V^2 \text{sen } \theta \text{cos } \varphi - V^3 \text{sen } \theta \text{sen } \varphi - V^4 \text{cos } \theta) ds \tau^2 d\tau.$$

El número  $ds$  a la derecha y arriba de  $\tau$  es un exponente; los índices de la letra "V" son tensoriales.

El hipervolumen  $dv$  de la hipercuña se obtiene integrando el elemento de hipervolumen con respecto a  $\tau$  desde 0 hasta  $r$ :

$$dv = \frac{1}{3} r^3 \operatorname{sen} \theta \left| \begin{array}{c} d\theta d\varphi \\ \delta\theta \delta\varphi \end{array} \right| (V^1 - V^2 \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - V^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi - V^4 \cos \theta) dS .$$

La expresión dentro del paréntesis tiene una relación muy simple con el producto escalar  $\hat{r} \cdot \hat{V} = \Delta_{ij} r^i V^j$  de los cuadvectores  $\hat{r}$  y  $\hat{V}$  cuyas componentes contravariantes son:

$$\hat{r} (r, r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta);$$

$$\hat{V} (V^1, V^2, V^3, V^4) ;$$

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = rV^1 - rV^2 \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - rV^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi - rV^4 \cos \theta .$$

Usando este producto escalar se obtiene para el hipervolumen de la hipercuña:

$$dv = \frac{1}{3} (\hat{r} \cdot \hat{V}) r^2 \operatorname{sen} \theta \left| \begin{array}{c} d\theta d\varphi \\ \delta\theta \delta\varphi \end{array} \right| dS .$$

Siempre es posible seleccionar las designaciones de los ángulos de manera que el determinante

$$\left| \begin{array}{c} d\theta d\varphi \\ \delta\theta \delta\varphi \end{array} \right|$$

sea positivo. El producto de ese determinante por el  $\operatorname{sen} \theta$  es igual al elemento de ángulo sólido

$$d\Omega = \operatorname{sen} \theta \left| \begin{array}{c} d\theta d\varphi \\ \delta\theta \delta\varphi \end{array} \right| .$$

Para el hipervolumen de la hipercuña se obtiene entonces:

$$dv = \frac{1}{3} r^2 (\hat{r} \cdot \hat{V}) d\Omega ds \quad .$$

De aquí se obtiene inmediatamente:

$$r^2 d\Omega ds = \frac{3 dv}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} \quad .$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (6) se obtiene para el elemento de hiperángulo sólido:

$$dH = \frac{3 dv}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^3} \quad . \quad (8)$$

De las aristas de la hipercuña las siguientes ocho son segmentos de líneas de universo de fotones (Fig. 2):

$$PA, PB, PC, PD, Q\alpha, Q\beta, Q\gamma, Q\delta \quad .$$

A estas aristas les llamamos "aristas de luz". El producto escalar  $(\hat{r} \cdot \hat{V})$  es la proyección de la arista de luz  $\hat{r}$  sobre el cuadrivector velocidad  $\hat{V}$  del punto masa, ya que este último es unitario. La dirección del cuadrivector  $\hat{V}$  es la del filo  $PQ$  (Fig. 2) de la hipercuña.

La fórmula (8) expresa el siguiente resultado: el elemento de hiperángulo sólido es igual al triple del hipervolumen de la hipercuña asociada, dividido entre el cubo de la proyección de la arista de luz sobre el filo de la hipercuña. La fórmula (8) expresa además al elemento de hiperángulo sólido en forma invariante.

Para algunas aplicaciones del elemento de hiperángulo sólido es necesario expresar el volumen tridimensional de la tapa de la hipercuña como un cuadrivector. Esta tapa es el paralelepípedo  $ABCD\alpha\beta\gamma\delta$  (Fig. 2) que queda definido por sus tres aristas concurrentes, los cuadrivectores:

$$A\hat{B}, A\hat{C} \text{ y } A\hat{\alpha} \quad .$$

Para calcular estos cuadrivectores los expresamos como las diferencias:

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= P\hat{B} - P\hat{\lambda} ; \\ \hat{A}\hat{C} &= P\hat{C} - P\hat{\lambda} ; \\ \hat{A}\hat{a} &= P\hat{Q} + Q\hat{a} - P\hat{\lambda} . \end{aligned}$$

A continuación de la Tabla 1, se expone como se calculan los componentes contravariantes de los cuadvectores que aparecen en los segundos miembros de las tres últimas ecuaciones. Designamos a las componentes contravariantes de los tres cuadvectores  $\hat{A}\hat{B}$ ,  $\hat{A}\hat{C}$  y  $\hat{A}\hat{a}$  respectivamente con  $AB^j$ ,  $AC^k$  y  $Aa^l$ .

Las componentes covariantes del cuadvector volumen de la tapa de la hipercaña se obtienen con ayuda del pseudotensor  $E_{ijkl}$ . Llamamos  $d\hat{\Omega}$  al cuadvector volumen de la tapa de la hipercaña, y  $d\Omega_i$  a sus componentes covariantes. Tenemos entonces

$$d\Omega_i = E_{ijkl} AB^j AC^k Aa^l .$$

Como en el sistema de coordenadas que utilizamos, el pseudotensor  $E_{ijkl}$  es numéricamente idéntico al sistema unitario totalmente antisimétrico  $e_{ijkl}$ , las componentes  $d\Omega_i$  son los determinantes de tercer orden, con su signo correspondiente, generados por la matriz de tres por cuatro elementos cuyas tres renglones están constituidos por las componentes contravariantes de los tres cuadvectores

$$AB^j, AC^k, Aa^l .$$

Para poder obtener expresiones manejables para las componentes del cuadvector  $d\hat{\Omega}$  introducimos la siguiente notación.

$$\alpha = \begin{vmatrix} dr & d\theta \\ \delta r & \delta\theta \end{vmatrix} ds . \quad (9)$$

$$\beta = \begin{vmatrix} dr & d\varphi \\ \delta r & \delta\varphi \end{vmatrix} ds . \quad (10)$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix} ds . \quad (11)$$

Las componentes covariantes de  $d\hat{\Omega}$  son entonces:

$$d\Omega_1 = \begin{cases} + [-rV^2 \operatorname{sen} \varphi + rV^3 \operatorname{cos} \varphi] a \\ + [-rV^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \varphi - rV^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \varphi + rV^4 \operatorname{sen}^2 \theta] \beta \\ + [r^2 V^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{cos} \varphi + r^2 V^3 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \varphi + r^2 V^4 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta] \gamma \\ + r^2 \frac{\partial F}{\partial s} \operatorname{sen} \theta \gamma \end{cases} \quad (12)$$

$$d\Omega_2 = \begin{cases} + [rV^1 \operatorname{sen} \varphi - rV^3 \operatorname{sen} \theta - rV^4 \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \varphi] a \\ + [rV^1 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \varphi - rV^4 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \varphi] \beta \\ + [-r^2 V^1 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{cos} \varphi - r^2 \frac{\partial F}{\partial s} \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{cos} \varphi] \gamma \end{cases} \quad (13)$$

$$d\Omega_3 = \begin{cases} + [-rV^1 \operatorname{cos} \varphi + rV^2 \operatorname{sen} \theta + rV^4 \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \varphi] a \\ + [rV^1 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \varphi - rV^4 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi] \beta \\ + [-r^2 V^1 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \varphi - r^2 \frac{\partial F}{\partial s} \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \varphi] \gamma \end{cases} \quad (14)$$

$$d\Omega_4 = \begin{cases} + [rV^2 \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \varphi - rV^3 \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \varphi] a \\ + [-rV^1 \operatorname{sen}^2 \theta + rV^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \varphi + rV^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi] \beta \\ + [-r^2 V^1 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta - r^2 \frac{\partial F}{\partial s} \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta] \gamma \end{cases} \quad (15)$$

En estas fórmulas los índices superiores de la letra "V" son índices tensoriales; esos mismos índices superiores en la letra "r" y en las funciones trigonométricas son exponentes.

Calculemos el flujo del cuadrivector  $\hat{r}$  a través de la tapa de la hipercaña;

este flujo es:

$$\hat{r} \cdot d\hat{\Omega} = -r^2 \operatorname{sen} \theta (\hat{r} \cdot \hat{V}) dS \left| \begin{array}{l} d\theta d\varphi \\ \delta\theta \delta\varphi \end{array} \right| . \quad (16)$$

Comparando este resultado con la fórmula (7) obtenemos:

$$\hat{r} \cdot d\hat{\Omega} = -3 dv \quad (17)$$

Esto significa que el valor absoluto del flujo de la arista de luz de la hipercuña a través de la tapa de la misma, es igual al triple del hipervolumen de dicha hipercuña. Para el producto escalar del cuadvivector velocidad  $\hat{V}$  con el cuadvivector  $d\hat{\Omega}$ , elemento de volumen de la tapa de la hipercuña, se obtiene:

$$\hat{V} \cdot d\hat{\Omega} = r \operatorname{sen} \theta (\hat{r} \cdot \hat{V}) \frac{\partial F}{\partial S} dS \left| \begin{array}{l} d\theta d\varphi \\ \delta\theta \delta\varphi \end{array} \right| \quad (18)$$

Comparando este resultado con la fórmula (7) se deduce:

$$\hat{V} \cdot d\hat{\Omega} = \frac{3}{r} \frac{\partial F}{\partial S} dv \quad (19)$$

Calcularemos ahora el cuadvivector elemento de volumen tridimensional en la cara cónica  $PABCD$  de la hipercuña (Fig. 3). Ese elemento de volumen tridimensional es el paralelepípedo elemental  $A'B'C'D'A''B''C''D''$ . Llamaremos  $d\hat{\Lambda}$  a ese cuadvivector elemento de volumen. El paralelepípedo elemental está definido por los tres cuadvivectores:

$$A'B', A'C', A'A''.$$

Para designar estos cuadvivectores utilizamos otra vez la notación abreviada que usamos al calcular el hipervolumen de la hipercuña. Las componentes covariantes del cuadvivector  $d\hat{\Lambda}$  son entonces:

$$d\Lambda_i = E_{ijkl} du^j dv^k d\tau^l .$$

Ejecutando los cálculos se obtiene:

$$\begin{aligned} d\Lambda_1 &= \tau^2 \operatorname{sen} \theta \eta d\tau ; \\ d\Lambda_2 &= \tau^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \varphi \eta d\tau ; \\ d\Lambda_3 &= -\tau^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \varphi \eta d\tau ; \\ d\Lambda_4 &= -\tau^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \eta d\tau . \end{aligned} \tag{20}$$

Para abreviar utilizamos la notación:

$$\eta = \begin{vmatrix} d\theta d\varphi \\ \delta\theta\delta\varphi \end{vmatrix} . \tag{21}$$

En consecuencia  $\operatorname{sen} \theta \eta$  es igual al elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ .

Para expresar el cuadrivector  $d\hat{\Lambda}$  en forma compacta conviene introducir al cuadrivector  $\hat{\tau} = P\hat{\Lambda}$  (Fig. 3). Las componentes covariantes de  $\hat{\tau}$  son:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau ; \\ \tau_2 &= -\tau \operatorname{sen} \theta \cos \varphi ; \\ \tau_3 &= -\tau \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi ; \\ \tau_4 &= -\tau \cos \theta . \end{aligned} \tag{22}$$

Para el elemento de volumen de la cara cónica 1 de la hipercuña obtenemos:

$$d\hat{\Lambda} = \tau d\tau d\Omega \hat{\tau} . \tag{23}$$

Además de haber expresado el elemento de hiperángulo sólido  $dH$  en términos del hipervolumen  $dv$  de la hipercuña asociada, hemos calculado dos cuadrivectores elementos de volumen tridimensional: el cuadrivector  $d\hat{\Omega}$  que representa a la tapa de la hipercuña y el cuadrivector  $d\hat{\Lambda}$ , elemento de volumen de la cara có-

nica situada en el cono de luz 1.

En el artículo futuro mostraremos que el hiperángulo sólido desempeña en el espacio-tiempo de Minkowski un papel semejante al que desempeña el ángulo sólido ordinario en el espacio físico, al calcular flujos de gradientes generados por fuentes puntuales de potencial.

#### REFERENCIAS

- 1.- L. Page & N.J. Adams, *Electrodynamics*, D. Van Nostrand & Co. New York, 1940 p. 119.
- 2.- C. Graef Fernandez, *Rev.Mex.Fís.* **10**, 3 (1961).
- 3.- V. Fock, *Theorie von Raum, Zeit und Gravitation*, Akademie Verlag. Berlin 1960, p. 147.

DEL POTENCIAL DE UN PUNTO MASA A LAS ECUACIONES DEL CAMPO  
EN LA TEORÍA DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF

Carlos Graef-Fernández

Instituto de Física, Universidad Nacional de México

Centro Nuclear de México

(Recibido: 30 Julio 1968)

RESUMEN

*En este artículo se obtienen las ecuaciones del campo gravitacional de la Teoría de Birkhoff a partir del tensor potencial de un punto masa en reposo en un marco de referencia inercial. Este tensor se define como el potencial newtoniano multiplicado por el tensor de Kronecker. Por medio de una transformación de Lorentz se obtiene el tensor potencial de un punto masa en movimiento uniforme. Este tensor potencial se generaliza al caso del movimiento acelerado. Para este campo gravitacional de un punto masa en movimiento acelerado se define un gradiente del campo. Se calcula el flujo de este gradiente a través de una hipersuperficie que encierra a un arco de la línea de universo del punto masa generador del campo. Con ayuda del teorema de la divergencia de Gauss en el espacio-tiempo, se obtienen las ecuaciones del campo en la Teoría de Birkhoff.*

## ABSTRACT

*In this paper the field equations of Birkhoff's gravitational theory are obtained, starting with the gravitational potential tensor of a mass-point at rest at the origin of an inertial reference frame. We postulate this tensor to be the Newtonian gravitational potential multiplied by Kronecker's delta. By a Lorentz transformation we obtain the gravitational potential tensor of a mass-point moving with constant velocity. We generalize this tensor to the case of a mass-point in accelerated motion.*

*A gradient of the gravitational field is defined. We construct a closed hypersurface which encompasses an arc of the world-line of the mass-point which generates the field. The field equations are obtained by applying Gauss theorem to the flux of the gradient through the closed hypersurface.*

*The gradient of the gravitational field contains terms which depend on the acceleration of the mass-point generating the field. The flux of the gradient through the hypersurface is independent on the acceleration of the mass-point. This acceleration does not appear in the field equations.*

## INTRODUCCION

Considérese un punto masa  $M$  moviéndose arbitrariamente en el espacio físico. Llamemos  $L$  a la línea de universo de este punto masa en el espacio-tiempo de Minkowski. Suponemos que  $L$  es una línea de clase  $C^2$ , de manera que se pueda hablar del cuadvivector velocidad  $\hat{V}$  del punto masa y de su cuadvivector aceleración  $\hat{A}$ . Utilizamos la letra "M" para designar tanto al punto masa mismo, como a su masa. Sea  $P$  un acontecimiento particular en la línea de universo  $L$  del punto masa. Sea  $T$  el tiempo correspondiente al acontecimiento  $P$  y sean  $X, Y, Z$  las coordenadas cartesianas del punto del espacio físico correspondiente a  $P$ . Las coordenadas de  $P$  en el espacio tiempo de Minkowski son entonces:  $P(T, X, Y, Z)$ . Usaremos la notación tensorial definida por las siguientes identidades:

$$X^1 = T; X^2 = X; X^3 = Y; X^4 = Z.$$

El cuadrado del elemento de arco del espacio-tiempo de Minkowski es entonces:

$$dS^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2;$$

$$dS^2 = (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2 - (dX^4)^2.$$

Introduciendo el tensor métrico fundamental  $\Delta_{ij}$  del espacio-tiempo de Minkowski, se obtiene:

$$dS^2 = \Delta_{ij} dX^i dX^j.$$

Aquí se está usando la convención de Einstein de sumar sobre índices repetidos; los índices varían de 1 a 4. Estamos utilizando además unidades tales que la velocidad de la luz en el vacío sea igual a 1. Las componentes del tensor métrico fundamental son:

$$\Delta_{11} = 1;$$

$$\Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1;$$

$$\Delta_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Suponemos que en la línea de universo  $l$ , hay un origen de los arcos. El acontecimiento  $P$  está caracterizado por el arco  $S$ . Las coordenadas  $X^i$  de  $P$  son funciones de  $S$  de clase  $C^2$ . Las ecuaciones de la línea de universo  $l$  son:

$$X^i = X^i(s); \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Las componentes contravariantes del cuadrivector velocidad  $\hat{V}$  se definen como:

$$V^i = \frac{dX^i}{ds}.$$

Las componentes contravariantes del cuadrivector aceleración  $\hat{A}$  son:

$$A^i = \frac{dV^i}{ds} = \frac{d^2X^i}{ds^2}.$$

Nos interesa el campo gravitacional generado por el punto masa  $M$  en un acontecimiento  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  del espacio-tiempo. A este acontecimiento le llamamos "acontecimiento del campo". Suponemos que  $P$  es el acontecimiento retardado con respecto al acontecimiento del campo en la línea de universo  $L$ . Esto significa que la distancia de Minkowski entre el acontecimiento del campo y  $P$  es nula:

$$\Delta_{ij} (x^i - X^i)(x^j - X^j) = 0.$$

El campo gravitacional se caracteriza por el tensor simétrico doblemente covariante:

$$h_{jk} = \frac{M [2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{\Delta_{mn} (x^m - X^m) V^n}$$

Las  $V_j$  son las componentes covariantes del cuadrivector velocidad  $\hat{V}$  y se obtienen de las componentes contravariantes en la forma usual

$$V_j = \Delta_{jm} V^m.$$

Llamemos  $\hat{r}$  al cuadrivector que liga a la posición retardada  $P$  del punto masa  $M$  con el acontecimiento del campo. Las componentes de este cuadrivector son:

$$\hat{r} = (x^1 - X^1, x^2 - X^2, x^3 - X^3, x^4 - X^4).$$

El denominador de  $b_{jk}$  es entonces igual al producto escalar de los cuadrivectores  $\hat{r}$  y  $\hat{V}$  con la métrica de Minkowski:

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = \Delta_{mn} (x^m - X^m) V^n.$$

El tensor potencial del campo<sup>1</sup> tiene entonces la expresión:

$$b_{jk} = \frac{M(2V_j V_k - \Delta_{jk})}{(\hat{r} \cdot \hat{V})}. \quad (1)$$

Esta forma del tensor potencial se obtiene por una simple transformación de Lorentz del tensor del campo de un punto masa<sup>2</sup>, en reposo, en el origen de un sistema de coordenadas de un marco de referencia inercial:

$$b_{jk} = \frac{M}{r} \delta_{jk}.$$

Aquí figura la distancia  $r$  a la masa en reposo y el tensor de Kronecker. Nosotros postulamos que el tensor (1) es el tensor potencial de un punto masa en movimiento acelerado y demostramos que las ecuaciones del campo de la teoría de Birkhoff son una consecuencia de esta hipótesis. Consideremos una de las 16 componentes del tensor potencial del campo. Sea  $b_{jk}$  la componente en la que fijamos nuestra atención. Esta componente es una función de las coordenadas del acontecimiento del campo  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ . Consideremos ahora las cuatro derivadas parciales:

$$\left( \frac{\partial b_{jk}}{\partial x^1}, \frac{\partial b_{jk}}{\partial x^2}, \frac{\partial b_{jk}}{\partial x^3}, \frac{\partial b_{jk}}{\partial x^4} \right)$$

Estas cuatro funciones son las componentes covariantes de un cuadrivector que llamamos "gradiente del campo" y que designamos con:

$$\hat{\nabla} b_{jk} .$$

Lo que hemos llamado gradiente del campo es en realidad el tensor triplemente covariante  $\frac{\partial b_{jk}}{\partial x^i}$ . Para el gradiente del campo gravitacional generado por el punto masa  $M$  en movimiento arbitrario<sup>3</sup>, se obtiene:

$$\hat{\nabla} b_{jk} = \begin{cases} + \frac{2M(V_j A_k + A_j V_k)}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} \hat{r} \\ - \frac{M(2V_j V_k - \Delta_{jk})}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^3} (\hat{r} \cdot \hat{A} - 1) \hat{r} \\ - \frac{M(2V_j V_k - \Delta_{jk})}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} \hat{V} . \end{cases} \quad (2)$$

Con el propósito de obtener el flujo del gradiente del campo gravitacional a través de una hipersuperficie que encierre a un arco de la línea de universo  $L$  del punto masa  $M$ , calculamos primero ese flujo a través de las caras de una hipercaña<sup>4</sup> que tiene por filo un elemento de arco  $PQ = dS$  de esa línea de universo. Sea entonces  $Q$  el punto de  $L$  correspondiente al arco  $S + dS$ .

Consideremos las líneas de universo de cuatro fotones imaginarios que salen del punto masa cuando éste está en el punto  $(X, Y, Z)$  del espacio físico, en

el instante  $T$ , en las cuatro direcciones definidas por las siguientes colatitudes  $\theta$  y longitudes  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} & \theta, \varphi; \\ & \theta + d\theta, \varphi + d\varphi; \\ & \theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi; \\ & \theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi. \end{aligned}$$

Llamemos fotolíneas a las líneas de universo de los fotones. Las cuatro fotolíneas definen un elemento de ángulo sólido

$$d\Omega = \text{sen } \theta \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix} \quad (3)$$

La manera de asignar ángulos a las direcciones puede elegirse siempre de manera que este elemento de ángulo sólido sea positivo. Consideremos ahora fotones que salen del punto masa  $M$  en todas las direcciones contenidas dentro del elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ . Las fotolíneas correspondientes forman un fotohaz elemental con vértice en el acontecimiento  $P(T, X, Y, Z)$  y son generatrices del cono de luz del futuro con vértice en  $P$ , al que llamamos "cono 1". Suponemos que el punto masa emite en todos los acontecimientos entre  $P$  y  $Q$  fotones imaginarios con fotolíneas paralelas a las del fotohaz descrito antes. El fotohaz, con vértice en  $Q$ , está formado por generatrices de un cono de luz del futuro que llamamos "cono 2".

Para contruir la hipercuña hay que cortar todas estas fotolíneas con una hipersuperficie  $\Gamma$ . Suponemos que cada fotolínea corta a  $\Gamma$  en un solo acontecimiento. La fotolínea que sale de  $P$ , en la dirección definida por los ángulos  $\theta, \varphi$ , corta a  $\Gamma$  en el acontecimiento:

$$(T + r, X + r \text{ sen } \theta \text{ cos } \varphi, Y + r \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi, Z + r \text{ cos } \theta).$$

La hipersuperficie  $\Gamma$  está definida por la ecuación:

$$r = F(S, \theta, \varphi) .$$

El conjunto de los acontecimientos de  $\Gamma$  que son intersecciones con fotolíneas que salen del punto masa  $M$  dentro del ángulo sólido  $d\Omega$ , en todas las posiciones entre  $P$  y  $Q$ , forman la "tapa de la hipercuña". La hipercuña está limitada: por su filo  $PQ$ ; por su tapa, que es un elemento de la hipersuperficie  $\Gamma$ ; por sus dos caras cónicas, que son porciones de los conos 1 y 2 limitadas por las intersecciones de esos conos con  $\Gamma$ ; y por último por sus dos "flancos" que son caras llanas. Uno de los flancos está definido por el filo  $PQ$  y por los fotolíneas en las direcciones  $(\theta, \varphi)$  y  $(\theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi)$ .

El otro flanco está definido por el filo  $PQ$  y por las fotolíneas en las direcciones  $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$  y  $(\theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi)$ . Los dos flancos contienen al cuadrivector  $\hat{P}Q$  que es paralelo al cuadrivector velocidad  $\hat{V}$ . Cualquier acontecimiento de un flanco está unido a la posición retardada correspondiente de  $M$ , por un cuadrivector  $\hat{r}$ . Los cuadrivectores que representan a los elementos de hipersuperficie que son los flancos, son por lo tanto perpendiculares a los cuadrivectores  $\hat{r}$  y  $\hat{V}$ . Como el gradiente del campo es una combinación lineal de  $\hat{r}$  y  $\hat{V}$ , su flujo a través de los dos flancos de la hipercuña es nulo.

Calculemos ahora el flujo del gradiente del campo que sale a través de la tapa de la hipercuña. Como ese gradiente es una combinación lineal de  $\hat{r}$  y de  $\hat{V}$ , obtenemos primero los flujos de esos dos cuadrivectores que salen a través de la tapa. La tapa es un elemento de la hipersuperficie  $\Gamma$ , que se caracteriza por medio de un cuadrivector  $d\hat{\Omega}$ . El flujo del cuadrivector  $\hat{r}$  que sale a través de la tapa, es:

$$-\hat{r} \cdot d\hat{\Omega} = +r^2 \operatorname{sen} \theta (\hat{r} \cdot \hat{V}) dS \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix}$$

Para el flujo del cuadrivector  $\hat{V}$  que sale a través de la tapa, se obtiene:

$$-\hat{v} \cdot d\hat{\Omega} = -r \operatorname{sen} \theta (\hat{r} \cdot \hat{v}) \frac{\partial F}{\partial S} ds \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix}$$

Estas dos expresiones se simplifican mucho introduciendo el hipervolumen de la hipercuña:

$$dv = \frac{1}{3} r^2 (\hat{r} \cdot \hat{v}) \operatorname{sen} \theta ds \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix}$$

Para los dos flujos obtenemos entonces:

$$-\hat{r} \cdot d\hat{\Omega} = +3dv;$$

$$-\hat{v} \cdot d\hat{\Omega} = -\frac{3}{r} \frac{\partial F}{\partial S} dv.$$

Designamos con  $\Delta\chi$  al flujo del gradiente del campo gravitacional que sale a través de la tapa de la hipercuña; para este flujo obtenemos:

$$\Delta\chi = \begin{cases} + \frac{6M(V_j A_k + A_j V_k)}{(\hat{r} \cdot \hat{v})^2} dv \\ - \frac{3M(2V_j V_k - \Delta_{jk})}{(\hat{r} \cdot \hat{v})^3} (\hat{r} \cdot \hat{\lambda} - 1) dv \\ + \frac{3M(2V_j V_k - \Delta_{jk})}{r(\hat{r} \cdot \hat{v})^2} \frac{\partial F}{\partial S} dv \end{cases}$$

Procedemos ahora a calcular el flujo del gradiente del campo gravitacional que sale a través de las caras cónicas de la hipercuña. Nos fijamos primero en la cara cónica situado en el cono  $\mathcal{C}$  de vértice en  $P$ . Definimos en esa cara cónica un elemento de hipersuperficie que describimos por medio del cuadrivector  $d\hat{\Lambda}$ . Un vértice de este elemento está en el extremo del cuadrivector  $\hat{\tau}$  que tiene su origen en  $P$ . Las componentes contravariantes de  $\hat{\tau}$  son:

$$\begin{aligned}\tau^1 &= \tau; \\ \tau^2 &= \tau \operatorname{sen} \theta \cos \varphi; \\ \tau^3 &= \tau \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi; \\ \tau^4 &= \tau \cos \theta.\end{aligned}$$

Otro vértice del elemento de hipersuperficie está en el extremo del cuadrivector  $\hat{\tau} + d\hat{\tau}$  que tiene su origen en  $P$ . El elemento de hipersuperficie tiene aristas a lo largo de las cuatro fotolíneas que definen el elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ . El cuadrivector que caracteriza al elemento de hipersuperficie es:

$$d\hat{\Lambda} = \tau \, d\tau \, d\Omega \, \hat{\tau}.$$

Nótese que para calcular el flujo del gradiente del campo que sale a través del elemento  $d\hat{\Lambda}$  hay que hacer  $\hat{r} = \hat{\tau}$  en la expresión del gradiente (2). Llamemos  $d\psi_1$  a este flujo; obtenemos entonces:

$$\begin{aligned}d\psi_1 &= -\hat{\nabla} h_{jk} \cdot d\hat{\Lambda}; \\ d\psi_1 &= +M\tau \frac{[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{\tau} \cdot \hat{V})} d\tau \, d\Omega.\end{aligned}$$

Para obtener el flujo del gradiente del campo que sale a través de la cara cónica de la hipercaña, es necesario integrar  $d\psi_1$  con respecto a  $\tau$  desde 0 hasta  $r$ . Hay que tener en cuenta que la fracción  $\frac{\tau}{(\hat{\tau} \cdot \hat{V})}$  no depende de  $\tau$ . Llamemos  $\psi_1$  al flujo del gradiente del campo que sale a través de la cara cónica 1 de la hipercaña:

$$\psi_1 = Mr^2 \frac{[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} d\Omega.$$

El flujo del gradiente del campo que sale a través de la cara cónica 2 de la hipercaña es igual a:

$$\psi_2 = -\psi_1 - \Delta\psi_1.$$

El incremento  $\Delta\psi_1$  se debe a que el vértice de la cara cónica 2 está en  $Q$ ; y que  $Q$  corresponde al arco  $S + dS$  en la línea de universo de  $M$ . El flujo neto del gradiente del campo que sale por las dos caras cónicas de la hipercaña es entonces:

$$-\Delta\psi_1 = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{2M[V_j A_k + A_j V_k]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} r^2 dS d\Omega \\ + \frac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} (\hat{r} \cdot \hat{A}) r^2 dS d\Omega \\ - \frac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} \frac{\partial F}{\partial S} r dS d\Omega. \end{array} \right.$$

La expresión para  $-\Delta\psi_1$  se simplifica mucho introduciendo el hipervolumen  $dv$  de la hipercaña; se obtiene:

$$-\Delta_{j_1} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{6M [V_j A_k + A_j V_k]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} dv \\ + \frac{3M [2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^3} (\hat{r} \cdot \hat{A}) dv \\ - \frac{3M [2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} \frac{\partial F}{\partial S} dv \end{array} \right.$$

El flujo neto  $d\Phi$  del gradiente del campo que sale por todas las caras de la hiper-cuña es entonces:

$$d\Phi = \Delta_{j_2} - \Delta_{j_1} ;$$

$$d\Phi = \frac{3M [2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^3} dv .$$

La fracción

$$\frac{3dv}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^3}$$

es independiente de  $r$  y la designamos como elemento de hiperángulo sólido  $dH$ .

El flujo  $d\Phi$  es entonces

$$d\Phi = M [2V_j V_k - \Delta_{jk}] dH . \quad (4)$$

El elemento de hiperángulo sólido  $dH$  se puede expresar en términos del elemento de ángulo sólido  $d\Omega$  y del elemento de arco  $dS$ :

$$dH = \frac{3dv}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^3} = \frac{r^2 d\Omega dS}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} . \quad (5)$$

Consideremos ahora que la hipersuperficie  $\Gamma$  es cerrada y que encierra a un arco  $JK$  de la línea de universo  $L$  del punto masa  $M$  (Figura). Nuestro propósito es calcular el flujo del gradiente del campo que sale de  $\Gamma$ . Con este fin construimos todas las hipercuñas, limitadas por  $\Gamma$ , que tienen por filo el elemento de arco  $PQ$ . Llamamos "embudo" al hipersólido constituido de ese modo. El embudo está limitado por:

- 1) el cono 1 con vértice en  $P$ ;
- 2) el cono 2 con vértice en  $Q$ ;
- 3) la hipersuperficie  $\Gamma$ .

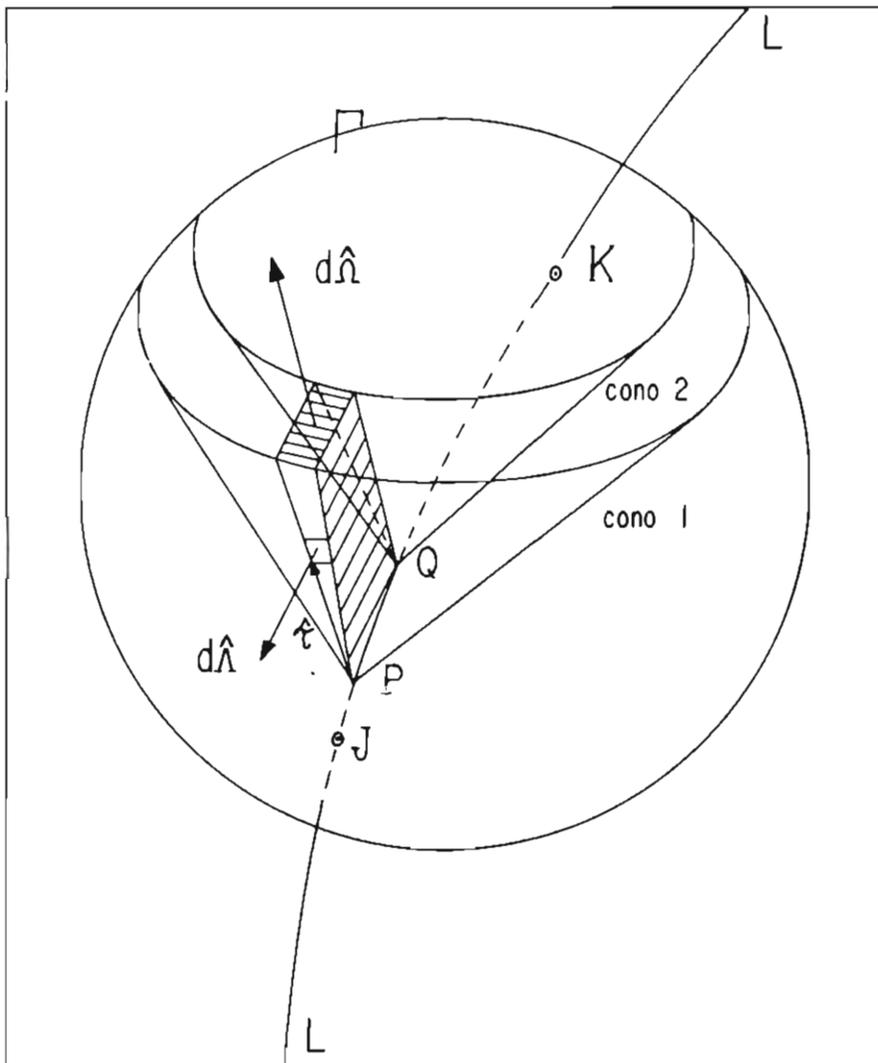
El flujo  $dE$  del gradiente del campo que sale a través de la hipersuperficie que limita al embudo, se obtiene integrando  $d\Phi$  sobre todas las hipercuñas. Para realizar esta integración es conveniente expresar en (4) al elemento de hiperángulo sólido  $dH$  en términos del ángulo sólido  $d\Omega$ , según la ecuación (5). Con el propósito de ejecutar las operaciones conviene elegir  $d\Omega$  de manera que en la ecuación (3)  $d\varphi$  y  $\delta\theta$  sean nulos. Esto equivale a definir a  $d\Omega$  por las fotolíneas de los fotones imaginarios que salen de  $M$  en las cuatro direcciones:

$$(\theta, \varphi); (\theta + d\theta, \varphi); (\theta, \varphi + d\varphi); (\theta + d\theta, \varphi + d\varphi) .$$

La  $d\Omega$  adquiere entonces la forma usual:

$$d\Omega = \text{sen } \theta d\theta d\varphi \quad (6)$$

El flujo  $dE$  se obtiene integrando  $d\Phi$  con respecto a  $\theta$  desde 0 hasta  $\pi$  y con respecto a  $\varphi$  desde 0 hasta  $2\pi$ . En esta integración permanece constante el cuadri-vector velocidad  $\hat{V}$ . El flujo  $dE$  es entonces:



$$dE = M [2V_j V_k - \Delta_{jk}] \int dH .$$

Llamemos  $d\eta$  a la integral del hiperángulo sólido. Utilizando (5) y (6) se obtiene

$$d\eta = dS \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } \theta d\theta d\varphi}{[V^1 - V^2 \text{sen } \theta \cos \varphi - V^3 \text{sen } \theta \text{sen } \varphi - V^4 \cos \theta]^2}$$

Calculando la integral doble directamente, se obtiene:

$$d\eta = 4\pi dS$$

Es fácil llegar a este resultado por otro camino. La integral doble tiene que ser invariante en las transformaciones de Lorentz. Elijamos a aquel marco de referencia en el que el cuadvectores velocidad  $\hat{V}$  tiene la dirección del eje de los tiempos. En ese marco

$$V^1 = 1; V^2 = V^3 = V^4 = 0$$

El valor de  $d\eta$  se obtiene de un modo inmediato.

Para el flujo  $dE$  del gradiente del campo que sale por la hipersuperficie que limita al embudo, obtenemos:

$$dE = 4\pi M [2V_j V_k - \Delta_{jk}] dS .$$

El flujo total  $E$  del gradiente del campo gravitacional que sale a través de la hipersuperficie  $\Sigma$  es entonces:

$$E = \int_{\Sigma} 4\pi M [2V_j V_k - \Delta_{jk}] dS \quad (7)$$

Esta integral es una integral de línea que se extiende a lo largo de la línea de universo  $L$  del punto masa  $M$ , desde el acontecimiento  $J$  en que ésta penetra dentro de la hipersuperficie  $\Gamma$ , hasta el acontecimiento  $K$  en que  $L$  sale de  $\Gamma$ . Para obtener las ecuaciones del campo considérese una esfera infinitesimal de masa  $M$  y que tiene un radio  $\epsilon$  en su sistema en reposo. El volumen en reposo de esa esfera es:

$$\frac{4}{3} \pi \epsilon^3$$

En vez del punto masa  $M$  utilizamos ahora esa esfera infinitesimal. Sea  $L$  la línea de universo del centro de la esfera. Imaginamos que la esfera se mueve como un cuerpo rígido, con el cuadvivector velocidad  $\hat{V}$ , mientras su centro recorre el elemento de arco  $dS$  que liga a los acontecimientos  $P$  y  $Q$ . Al moverse la esfera rígidamente, de su posición inicial a su posición final, cada uno de sus puntos describe en el espacio-tiempo un elemento de arco  $dS$ . El hipervolumen barrido por la esfera en el espacio-tiempo, cuando su centro va de  $P$  a  $Q$ , se obtiene muy fácilmente en el sistema en reposo de la esfera. Este hipervolumen es:

$$d\tau = \frac{4}{3} \pi \epsilon^3 dS .$$

Es obvio que  $d\tau$  es invariante.

Consideremos ahora la hipersuperficie  $\Theta$  generada en el espacio-tiempo por los arcos de las líneas de universo de los puntos de la superficie de la esfera, cuando el centro de ésta va de  $P$  a  $Q$ . El flujo  $dE$  del gradiente del campo gravitacional de la esfera que sale a través de  $\Theta$  es, según la ecuación (7):

$$dE = 4\pi M [2V_j V_k - \Delta_{jk}] dS$$

Según la generalización del teorema de Gauss a un espacio de cuatro dimensiones, el flujo del gradiente de una función a través de una hipersuperficie que limita un

hipervolumen, es igual a la integral del D'Alembertiano de esa función extendida al hipervolumen. Aplicando este teorema obtenemos:

$$\square b_{jk} d\tau = 4\pi M [2V_j V_k - \Delta_{jk}] dS$$

Substituyendo en esta ecuación el valor de  $d\tau$ , se obtiene:

$$\square b_{jk} \frac{4}{3} \pi \epsilon^3 dS = 4\pi M [2V_j V_k - \Delta_{jk}] dS$$

De donde se deduce inmediatamente:

$$\square b_{jk} = 4\pi \frac{M}{\frac{4}{3} \pi \epsilon^3} [2V_j V_k - \Delta_{jk}]$$

La masa de la esfera dividida entre su volumen en el marco de referencia en reposo, es igual a su densidad en reposo:

$$\frac{M}{\frac{4}{3} \pi \epsilon^3} = \rho_0$$

Para el D'Alembertiano del potencial del campo gravitacional se obtiene entonces:

$$\square b_{jk} = 8\pi \rho_0 [V_j V_k - \frac{1}{2} \Delta_{jk}] \quad (8)$$

La ecuación (8) es la ecuación del campo gravitacional<sup>5</sup> en la que fundó G.D. Birkhoff su teoría de la gravitación. Birkhoff obtuvo el segundo miembro de la ecuación (8) como  $8\pi$  por el tensor de la energía y las cantidades de movimiento de un fluido perfecto, en el que la velocidad de propagación de una perturbación

es igual a la velocidad de la luz. En este artículo, la ecuación del campo (8) es una consecuencia de postular como tensor potencial gravitacional de un punto masa en movimiento acelerado, a la expresión (1).

#### REFERENCIAS

1. P. Kustaanheimo, Some remarks on the general relativity theory of Birkhoff. *Societas Scientiarum Fennica. Commentationes Physico Mathematicae* (Helsinki), **17**, 11, (Julio 1955).
2. G.D. Birkhoff, Matter, electricity and gravitation in flat space-time. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **29**, 8, pp. 920-928, (1943).
3. C. Graef-Fernández, El gradiente del campo gravitacional de Birkhoff, *Rev.Mex.Fís.*, **10**, 3, p. 192, (1961).
4. C. Graef-Fernández, El hiperángulo sólido en la teoría de la relatividad especial, *Rev.Mex.Fís.*, **11**, 2, 3, pp. 129-154, (1962).
5. G.D. Birkhoff, Flat space-time and gravitation. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **30**, 10, pp. 324-334, (1944).

PRIMERA ETAPA DE TRABAJO DEL GRUPO DEL  
ACELERADOR VAN DE GRAAFF TANDEM EN EL CENTRO NUCLEAR  
COMISION NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR

Carlos Graef Fernández  
Director General del Centro Nuclear de México

INTRODUCCION

El Centro Nuclear de México es una dependencia de la Comisión Nacional de Energía Nuclear. Está ubicado en el Estado de México, a muy corta distancia del km 37 de la carretera de México a Toluca, en el municipio de Ocoyoacac en la vecindad del pueblo de Salazar. Los terrenos del Centro colindan por el oriente con el Parque Nacional Miguel Hidalgo.

La ubicación del Centro Nuclear en los bosques de Salazar se debió principalmente a la necesidad de una gran extensión de terreno para poder localizar allí varios de los laboratorios de la CNEN, además de los edificios del Reactor, del Acelerador y los Talleres Generales. El Gobierno asignó 1 millón 500 mil metros cuadrados para este propósito. En la ciudad de México misma, hubiera sido imposible que el Gobierno dedicara una extensión de esas dimensiones al Centro.

En varias partes del mundo hay reactores mucho más poderosos que el del Centro, ubicados dentro de grandes ciudades. En los Estados Unidos se encuentra el reactor de investigación del Instituto Tecnológico de Massachusetts, en la calle que lleva el nombre de ese Estado, en la Ciudad de Cambridge, en la inmediata vecindad del Instituto. En los sótanos del

Hospital Bethesda de Washington hay un reactor TRIGA que se utiliza en investigaciones médicas.

A pesar de estos antecedentes, un grupo de investigadores científicos mexicanos estudio, entre otros cinco lugares, los terrenos del Centro en Salazar con detalle para tener la seguridad de que aún en el más grave desprendimiento posible de sustancias radioactivas de las instalaciones, no hubiera ni la más remota posibilidad de que se contaminara algún núcleo de población. Estos estudios se presentaron en la Conferencia Internacional sobre localización de Reactores que se celebró en Bombay, India, en marzo de 1963. Los expertos de muchas partes del mundo que asistieron a esa presentación encontraron muy satisfactoria la ubicación del Centro Nuclear de México.

El Organismo Internacional de Energía Atómica ha mandado expertos a examinar, tanto los terrenos del Centro, como el edificio en que se aloja el reactor TRIGA MARK III. Estos expertos han declarado que encuentran completamente satisfactorios el edificio y los terrenos. Parte de los terrenos fueron del parque Nacional Miguel Hidalgo; otra, de terrenos comunales. La CNEN se comprometió a ayudar a los pueblos y emplear personal de la región.

El Gobierno de México concedió a la Comisión Nacional de Energía Nuclear el terreno del Centro por medio de un decreto que se publicó en el Diario Oficial el jueves 30 de enero de 1964. Las obras se iniciaron el 24 de abril del mismo año. Se abrieron cepas y se localizaron los edificios. El 3 de julio de 1964 el C. Secretario de Hacienda y Crédito Público, don Antonio Ortiz Mena, colocó la primera piedra.

## 1. OBRA CIVIL.

La Secretaría de Obras Públicas tomó a su cargo el proyecto de la obra civil y la construcción del Centro Nuclear. En el concurso realizado por esta dependencia resultó triunfadora la compañía Cimentaciones y Construcciones (CYCSA) que es la que ha ejecutado las obras.

Cuando se inició la construcción del Centro Nuclear era Presidente de la Comisión Nacional de Energía Nuclear Don José María Ortiz Tirado y Vocales de la misma, los doctores Nabor Carrillo y Manuel Sandoval Vallarta. El doctor Nabor Carrillo fué quien pugnó, con su entusiasmo desbordante y su enorme vigor vital, por la construcción del Centro Nuclear. La Comisión Nacional de Energía Nuclear le encargó el hacer las gestiones ante el Gobierno para conseguir el terreno para el Centro, y los fondos para construirlo. Logró convencer al Licenciado Don Adolfo López Mateos, entonces Presidente de México, de la necesidad urgente que tenía nuestro país de un Centro Nuclear. Hasta su muerte, acaecida en febrero de 1967, estuvo Nabor Carrillo impulsando la construcción del Centro Nuclear.

El actual Presidente de la Comisión Nacional de Energía Nuclear, Don José Gorostiza, ha continuado luchando por la realización del Centro Nuclear de México, y él ha conseguido fondos para las obras,

La primera etapa de construcción que comprende a los edificios conjuntos del Reactor, Acelerador y Talleres Generales, quedará terminada en octubre de 1969.

## 2. FINALIDADES

Las finalidades del Centro Nuclear son cuatro:

- 1) El adiestramiento de personal;
- 2) La producción de radioisótopos;
- 3) La investigación científica y tecnológica;
- 4) El prestigio de México en el campo de la ciencia nuclear.

Nuestro país necesitará, en un futuro muy próximo, de un gran número de ingenieros, de técnicos y de científicos preparados en la investigación y aplicaciones de la energía nuclear - con fines pacíficos - que puedan desarrollar un programa de producción de energía nuclear-eléctrica.

El Centro Nuclear está constituido actualmente por 4 Direcciones: 1) reactor; 2) acelerador; 3) talleres generales; y 4) seguridad. En la serie de artículos presentada aquí nos referiremos únicamente a los primeros trabajos del acelerador, grupo que pudo ya recibir ayuda de los Talleres Generales para sus primeros proyectos.

## 3. EL ACELERADOR VAN DE GRAAFF

El Centro Nuclear tiene, para realizar sus trabajos, uno de los aparatos de investigación nuclear más finos del mundo: el acelerador Van de Graaff tandem de 12 millones de electrón-volt. Este aparato ya está instalado en su edificio y listo para iniciar la etapa de investigaciones y preparación de nuevo personal.

La meta final de estas investigaciones es el conocimiento detallado de la estructura de los núcleos de los átomos. No es solamente por satisfacer una mera curiosidad lo que hace que los científicos concentren en la actualidad tantos esfuerzos en investigar la constitución íntima de los núcleos atómicos. Un mayor conocimiento de esa estructura íntima del núcleo nos dará mayor dominio sobre la materia. De los conocimientos de los físicos sobre el núcleo

surgió la energía nuclear de la que tanto espera la humanidad. Al crecer nuestros conocimientos sobre los núcleos, se obtendrán quizás otras fuentes de energía nuclear que las ya conocidas, u otras formas para liberar la energía aprisionada en los núcleos de los átomos. La investigación científica fundamental es indispensable por el estímulo que presenta para la tecnología y para las aplicaciones de la ciencia a la industria y a la agricultura, además del valor intrínseco que tiene como parte integrante de la cultura del siglo XX.

El aparato Van de Graaff tandem es un ingenioso invento de R. J. van de Graaff, quien fuera profesor del Instituto Tecnológico de Massachusetts hasta su muerte en 1967. En el tandem se carga de electricidad un cilindro metálico hueco encerrado en un recipiente también metálico y rodeado de bióxido de carbono y de nitrógeno a presión. Una banda de algodón ahulada transporta mecánicamente electricidad a esta terminal hueca, llamada "electrado", del aparato. Este llega a cargarse hasta adquirir un potencial eléctrico positivo de 6 millones de volt. Los iones, primero negativos hasta el canal de despojo de la terminal, se convierten en positivos para aprovechar una segunda vez el alto potencial de la terminal.

#### 4. SISTEMA DEFLECTOR

Mediante un sistema de imanes se eliminan los proyectiles más pesados o más ligeros que los que uno desea utilizar.

Las partículas proyectiles siguen por un tubo hasta llegar a otro electroimán poderoso que se llama "electroimán selector". Este dispositivo manda al haz por uno de 7 tubos distintos.

Los electroimanes deflector y selector del acelerador fueron contruidos totalmente en México, en los talleres del Instituto de Física de la UNAM; los diseños se deben a físicos de la CNEN y de la Universidad.

Los blancos se encuentran en un enorme salón que es el "cuarto de bombardeo", de 29 m x 15 m. Cuando el aparato está funcionando no se puede permanecer, ni en el salón en que se encuentra el acelerador, ni en el cuarto de bombardeo. El salón del acelerador es un galerón de 46 m x 10 m, con paredes de concreto de 70 cm de espesor. También el cuarto de bombardeo tiene muros de concreto de ese espesor. El muro que separa el cuarto de bombardeo del cuarto de control en que se encuentran los investigadores tiene un espesor de 1.20 m. Esta gruesa coraza de concreto protege a los científicos que manejan el aparato de las radiaciones nocivas (rayos X, neutrones y otras radiaciones) que se originan en el salón del acelerador y en el cuarto de bombardeo.

## 5. CAMARA DE DISPERSION

El acelerador del Centro se utilizará para hacer espectroscopia nuclear. Como se verá más adelante, se cuenta para los primeros experimentos con una cámara de dispersión construida en el mismo Centro. Esta cámara consiste de un cilindro de aluminio de aproximadamente 50 cm de diámetro. El cilindro tiene tapa y fondo. El haz penetra por el manto del cilindro y va a incidir en el blanco colocado en una posición central. Todo la cámara está al vacío, naturalmente. Sin romper el vacío, cristales de estado sólido para la detección de partículas cargadas, registran los fragmentos nucleares y las radiaciones que resultan de la reacción nuclear provocada en el blanco por los proyectiles. Los contadores están colocados en platos paralelos a las tapas del cilindro que se pueden girar en torno del eje del mismo. Los contadores se enfrían con aire líquido para disminuir el ruido electrónico hasta donde sea posible.

La cámara de dispersión se operará en combinación con la computadora electrónica PDP10 que se adquirirá para el Centro este año. Se programará la información que la cámara proporcione a la PDP10, de manera que ésta entregue como resultados ciertas características de los núcleos del blanco.

## 6. EL ESPECTROGRAFO DE POLARIZACION

El acelerador Van de Graaff tandem se utilizará también en combinación con un espectrógrafo de polarización diseñado y construido en México. Este aparato se aplicará inicialmente en la reacción deuterón-protón, aprovechando un electroimán deflector con un ángulo de 100 grados. Una de las características extraordinarias del aparato es que tiene la propiedad del ciclotrón, o sea que el tiempo de recorrido del arco de la órbita es independiente de la energía de la partícula. Esta propiedad se aprovecha para provocar una precesión del vector polarización de los protones de reacción por un ángulo de  $180^\circ$ . El fenómeno se utiliza para provocar una segunda dispersión, lo que permite, en principio, medir la asimetría de grupos monoenergéticos de protones.

Este espectrógrafo permite medir la polarización de varios estados del núcleo que sufre la reacción. Para tener una buena estadística se necesitan aproximadamente 100 partículas. Las mediciones se extenderán más o menos por 10 días, suponiendo que el Van de Graaff tandem trabaje 24 horas diarias, sin interrupción.

El espectrógrafo de polarización puede girarse barriendo ángulos comprendidos entre cero y  $150^\circ$  en torno del blanco. Un espectrógrafo en el que las mediciones se extienden sobre tan largos plazos - 10 días - solamente puede usarse en combinación con un acelerador muy

estable, es decir, un acelerador cuyas condiciones no cambien durante ese lapso. El Van de Graaff tandem tiene esa propiedad de estabilidad.

## 7. DOS ESPECTROGRAFOS PARA ANALIZAR LAS REACCIONES NUCLEARES

Hay en México otros dos espectrógrafos que se pueden utilizar con el aparato Van de Graaff tandem del Centro Nuclear y que fueron construidos en el Instituto de Física de la UNAM. Uno de ellos es el espectrógrafo multicanal que permite 21 ángulos de observación a cada  $10^\circ$ . En éste se usan placas fotográficas nucleares para registrar la reacción. El objeto de este espectrógrafo es el de determinar niveles de energía y distribuciones angulares en los núcleos.

El otro espectrógrafo es el "Q absoluto" en el que el blanco se coloca en la rendija de la entrada. Las partículas de la reacción recorren trayectorias circulares en el campo magnético del espectrógrafo. Una lente magnética, colocada estratégicamente, corrige la aberración del aparato y logra que los productos de la reacción nuclear se enfoquen en el extremo del espectrógrafo para lograr una gran resolución. Además, en este espectrógrafo Q absoluto se conocen con grandísima precisión la intensidad del campo magnético  $B$  y el diámetro de la trayectoria. La energía de la reacción,  $Q$ , se puede determinar con gran precisión ya que depende esencialmente del producto  $B$  por  $\rho$ .

Con estos dos espectrógrafos del Instituto de Física se realizaron investigaciones de colaboración entre esta dependencia de la Universidad y el Centro Nuclear.

El personal científico y técnico del acelerador del Centro Nuclear consiste de 5 físicos profesionales y de 6 técnicos. Esta dependencia cuenta además con un personal administrativo de cuatro empleados, tres de ellos oficiales de servicio.

El Dr. Alfonso Mondragón, asesor científico de la CNEN, ha impartido cursos de física teórica al grupo de científicos y técnicos del acelerador en el Centro Nuclear. Esta actividad docente ha sido muy fecunda para preparar las labores de investigación que se realizarán en los laboratorios. Los miembros del programa de física teórica de la CNEN, encabezados por su Director el Dr. Marcos Moshinsky, se reúnen semanalmente en el Centro Nuclear en un Seminario en el que se tratan temas relativos a la espectroscopia nuclear, como reacciones nucleares, polarización, etc. Este Seminario es altamente estimulante para el personal científico y técnico que trabaja en el acelerador Van de Graaff tandem, que ha podido mantener de ese modo su contacto con la literatura especializada y con los desarrollos teóricos.

La Dirección del acelerador ha recibido ayuda de numerosos físicos extranjeros de Instituciones como MIT, la Universidad Rice, el Laboratorio Nacional de Argonne, etc. Han esta-

do colaborando en nuestros programas de investigación, científicos como Buechner, Phillips, Temmer, Enge, Sperduto, Ajzenberg, etc.

La CNEN y la Comisión de Energía Atómica de los EE. UU. acordaron unir al Centro Nuclear de Salazar de México y al Laboratorio Nacional de Argonne en los EE. UU., por medio de lazos fraternales. Estos dos centros científicos colaborarán en el futuro estrechamente, ayudándose uno al otro.

Recientemente desarrollan sus tesis profesionales tres pasantes de Física del IPN.

El personal científico y técnico que trabaja en el Centro Nuclear está muy consciente del enorme esfuerzo económico que nuestro Gobierno ha realizado para construir los edificios y para dotar al Centro de instrumentos, aparatos de laboratorio y de máquinas de taller. Los investigadores, ingenieros y técnicos pondrán todo su entusiasmo para corresponder a ese esfuerzo, y para conquistar para México el lugar que nuestro país se merece entre los que realizan investigaciones científicas y tecnológicas en el campo de la física nuclear.

## PRIMERA ETAPA DE TRABAJO DEL GRUPO DEL REACTOR EN EL CENTRO NUCLEAR DE MEXICO

Carlos Graef Fernández

*Director del Centro Nuclear de México*

### INTRODUCCION

El Centro Nuclear de México es una dependencia de la Comisión Nacional de Energía Nuclear. Está ubicado en el Estado de México, corta distancia del Km. 37 de la carretera de México a Toluca, en el municipio de Ocoyoacac, en la vecindad del pueblo de Salazar. Los terrenos del Centro colindan por el oriente con el parque nacional Miguel Hidalgo.

La ubicación del Centro Nuclear en los bosques de Salazar se debió principalmente a la necesidad de una gran extensión de terreno para poder localizar allí varios de los laboratorios de la CNEN, además de los edificios del Reactor, del Acelerador y de los Talleres Generales. El Gobierno asignó 1 millón 500 mil metros cuadrados para este propósito. En la ciudad de México misma, hubiera sido imposible que el Gobierno dedicara una extensión de esas dimensiones al Centro.

En varias partes del mundo hay reactores mucho mas poderosos que el del Centro ubicado dentro de grandes ciudades. En los Estados Unidos se encuentra el reactor de investigación del Instituto Tecnológico de Massachusetts, en la calle que lleva el nombre de ese Estado, en la Ciudad de Cambridge, en la inmediata vecindad del Instituto. En los sótanos del Hospital Bethesda Washington hay un reactor TRIGA que se utiliza en investigaciones médicas.

A pesar de estos antecedentes, un grupo de investigadores mexicanos estudió, entre otros cinco lugares, los terrenos del Centro en Salazar, con detalle para tener la seguridad de que aún en el más grave desprendimiento posible de sustancias radiactivas de las instalaciones, no hubiera ni la más remota posibilidad de que se contaminara algún núcleo de población. Estos estudios se presentaron en la Conferencia Internacional sobre localización de reactores que se celebró en Bombay, India en marzo de 1963. Los expertos de muchas partes del mundo que asistieron a esa presentación encontraron muy satisfactoria la ubicación del Centro Nuclear de México.

El Organismo Internacional de Energía Atómica ha mandado expertos a examinar, tanto los terrenos del Centro, como el edificio en que se aloja el reactor TRIGA MARK III. Estos expertos han declarado que encuentran completamente satisfactorios los terrenos y el edificio.

Parte de los terrenos fueron del Parque Nacional Miguel Hidalgo; otra de terrenos comunales. La CNEN se comprometió a ayudar a los pueblos y emplear personal de la región.

El Gobierno de México concedió a la Comisión Nacional de Energía Nuclear el terreno del Centro por medio de un decreto que se publicó en el Diario Oficial el jueves 30 de enero de 1964. Las obras se iniciaron el 24 de abril del mismo año. Se abrieron cepas y se localizaron los edificios. El 3 de julio de 1964 el C. Secretario de Hacienda y Crédito Público, Don Antonio Ortiz Mena, colocó la primera piedra.

#### OBRA CIVIL

La Secretaría de Obras Públicas, tomó a su cargo el proyecto de la obra civil y la construcción del Centro Nuclear. En el concurso realizado por esta dependencia resultó triunfadora la compañía Cimentaciones y Construcciones, S.A., (CYCSA) que ejecutó las obras.

La primera etapa de construcción comprende a los edificios de los conjuntos del Reactor, del Acelerador y Talleres Generales.

El costo de la obra civil fue de \$94,880,037.60 de los cuales corresponden \$39,303,370.45 al conjunto del Reactor.

Cuando se iniciaron los proyectos iniciales del Centro era presidente de la CNEN Don José María Ortiz Tirado y vocales de la misma los doctores Nabor Carrillo y Manuel Sandoval Vallarta. El Dr. Nabor Carrillo fue quien pugnó con su entusiasmo desbordante y su enorme vigor vital por la construcción del Centro Nuclear. La CNEN le encargó el hacer las

gestiones ante el Gobierno para conseguir el terreno para el Centro y los fondos para construirlo. Logró convencer al Lic. Don Adolfo López Mateos, entonces Presidente de México, de la necesidad urgente que tenía nuestro país de un Centro Nuclear. Hasta su muerte acaecida en Febrero de 1967, estuvo Nabor Carrillo impulsando la construcción del Centro Nuclear.

El actual presidente de la CNEN Don José Gorostiza ha continuado luchando por la realización del Centro, y ha conseguido fondos para el mismo.

### FINALIDADES

Las finalidades del Centro Nuclear son cuatro:

- 1.- Adiestramiento de Personal
- 2.- La Producción de Radioisótopos
- 3.- La Investigación Científica y Tecnológica
- 4.- El prestigio de México en el Campo de la Ciencia Nuclear.

Nuestro país necesitará en un futuro próximo de un gran número de ingenieros, técnicos, y científicos preparados en la investigación y aplicaciones pacíficas de la energía nuclear, y las instalaciones del Centro especialmente el Reactor TRIGA MARK III, son adecuados para adiestrar personal científico y técnico. La CNEN ha celebrado convenios con la UNAM y el IPN para que los estudiantes de la maestría en Ingeniería Nuclear de esas dos instituciones puedan hacer sus prácticas en el Centro Nuclear.

México es el último país de los 3 grandes países de la América Latina en instalar un reactor nuclear. Como la posición de nuestro país en la América Latina en otros campos de actividad cultural, técnica y científica es del primer lugar, el mundo científico veía con extrañeza que en el campo de los Reactores Nucleares quedáramos a la zaga. El Reactor del Centro Nuclear de México nos ayudará a conquistar el lugar que nos corresponde en el mundo de las Ciencias Nucleares.

El reactor TRIGA MARK III, es la herramienta más importante del Centro Nuclear y será utilizado básicamente para: Enseñanza y entrenamiento; investigación básica y aplicada y producción de radioisótopos.

El reactor alcanzó criticidad inicial el día 8 de Noviembre de 1968. Durante 1969, su primer año de operación trabajó 232 horas, habiendo pro-

ducido 179.44 MWH de energía. Durante el presente año y hasta el día 20 de Mayo ha trabajado 178 horas y producido 120.00 MWH de energía. Con objeto de que se comprendan mejor los datos anteriores en la tabla anexa se presentaran los datos de operación de otros reactores TRIGA de la misma potencia que el del Centro Nuclear.

TABLA 1.1

Datos comparativos en la operación de reactores TRIGA MARK III.

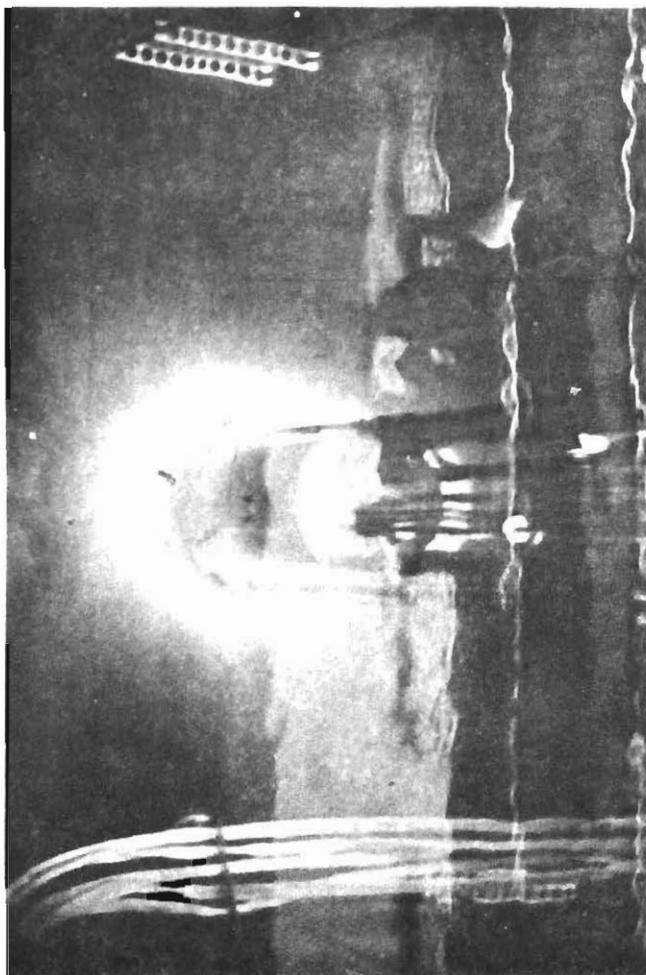
Reactor	Criticidad inicial	Energía producida desde criticidad inicial hasta 30 de Enero de 1970
UCB-Research Reactor	10-VIII-66	2000 MWH
Illinois Advanced TRIGA	16-VIII-60	1000 MWH
Oregon State University	8-III-67	311 MWH
US Geological Survey	26-II-69	560 MWH
University of Wisconsin	26-III-61	1550 MWH
Northrop Corporation	5-III-63	233 MWH
Pennsylvania State Univ.	31-XII-65	2340 MWH
AFRRI-TRIGA	28-VI-62	222 MWH

Nota: Los datos de la tabla fueron obtenidos en el Seminario sobre reactores TRIGA, celebrado en Denver Colorado, en Febrero del presente año.

El personal científico y técnico de la dirección del reactor, está muy consciente del enorme esfuerzo económico que nuestro Gobierno ha realizado, para construir los edificios y dotar a los laboratorios de instrumentos y equipos necesarios. Los investigadores, ingenieros y técnicos pondrán sus conocimientos y entusiasmo para corresponder a ese esfuerzo, y para conquistar para México el lugar que nuestro país se merece, entre los que se realizan investigaciones científicas y tecnológicas en el campo nuclear.

*Dirección del Reactor*

S-V





ENSAYOS Y CONFERENCIAS



# SECCION DE CIENCIAS EXACTAS

## El Aparato de Galton

Por Carlos Graef,  
Profesor del Depto. de Ciencias Físicas y Matemáticas

*A partir de este número de INGENIERIA, encontrarán nuestros lectores una sección nueva destinada a estudios y trabajos de Matemáticas. Inaugura la serie un interesante estudio del señor don Carlos Graef, joven y distinguido matemático, Profesor del Departamento de Ciencias de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, quien bondadosamente se ha servido tomar a su cargo la nueva Sección.*

### NOCIONES DE CALCULO DE LAS PROBABILIDADES

El concepto de probabilidad, lo forjó el hombre muchos siglos antes de saberla calcular. Seguramente que ya en el tiempo de la construcción de la esfinge era usual decir: es probable que decapiten al profanador de tumbas apresado ayer. Los matemáticos midieron la probabilidad hasta el siglo XVII. Es entonces posible hablar de probabilidad, antes de saber valorarla; es más, para poder calcular la probabilidad, es indispensable distinguir entre sucesos igualmente probables y sucesos desigualmente probables. A primera vista choca esto. Si para calcular la probabilidad, se necesita saber si varios sucesos tienen probabilidades iguales, parece que nos encontramos en un círculo vicioso. Pero no hay tal. La igualdad de probabilidad de varios sucesos es intuitiva; la medida de probabilidad no lo es. Cualquier merengüero sabe que es igualmente probable que al arrojar una moneda al aire, quede ésta después de caer con el sol hacia arriba, o que quede con el águila hacia arriba. Pero para afirmar esto, no calcula la probabilidad de cada uno de los dos sucesos. Para establecer la medición de una magnitud geométrica, se define siempre previamente la igualdad. Ejemplo: el caso de la medición de áreas. Dos polígonos tienen áreas iguales, si con las partes de uno de ellos es posible cubrir totalmente al segundo, y si con las partes del segundo es posible cubrir totalmente al primero. Es entonces posible definir lo que son dos polígonos de áreas iguales, sin saber valorar el área de ninguno de ellos. Al arrojar un dado cúbico homogéneo, aceptamos intuitivamente, que es igualmente probable, que quede hacia arriba la cara marcada con dos o la marcada con tres. En muchos casos particulares, es intuitiva la noción de igualdad de probabilidad de varios sucesos.

Hago las siguientes hipótesis:

- 1) Se va a efectuar un experimento, y el resultado es alguno de los acontecimientos compuestos A, B, C, D, . . . . . L.
- 2) Cada uno de estos acontecimientos compuestos, se puede descomponer en varios sucesos simples. El acontecimiento A en los sucesos simples  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . El B en  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_p$ , etc. Que el acontecimiento A está compuesto de los sucesos simples  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , significa que A se presenta siempre que se verifica cualquiera de los sucesos simples  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . A estos sucesos simples a se les llama sucesos favorables al acontecimiento A.
- 3) Los sucesos simples en que se descomponen los acontecimientos complicados, son todos igualmente probables. Al número total de sucesos simples, distintos, que se pueden presentar en un experimento se le llama número de sucesos posibles.
- 4) Al efectuar el experimento se presenta uno solo de los sucesos simples.

La probabilidad de un acontecimiento, es el cociente del número de sucesos elementales favorables, entre el número de sucesos elementales posibles, todos igualmente probables.

1. Ejemplo. El experimento consiste en arrojar dos dados sobre una tabla horizontal y en anotar la suma de los números marcados en las caras que queden hacia arriba. Voy a calcular la probabilidad de la suma 10. Supongo, para facilitar la exposición, que un dado es verde y el otro es rojo. Los acontecimientos compuestos que se pueden presentar son A = suma 2, B = suma 3, C = suma 4, etc. . . . J = suma 10, K = suma 11 y L = suma 12. El acontecimiento compuesto suma 10 se descompone en los sucesos simples: 6 con el dado verde y 4 con el dado rojo; 5 con el verde y 5 con el rojo; 4 con el verde y 6 con el rojo. Estos tres sucesos simples son igualmente probables. Cada uno de los acontecimientos compuestos se descompone en varios sucesos simples de este tipo.

Al efectuar el experimento, se pueden presentar 36 sucesos elementales posibles, todos igualmente probables, que son los de la siguiente tabla. El primer número se refiere a los puntos arrojados con el dado verde, y el segundo a los puntos arrojados con el rojo.

TABLA:

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

El número de sucesos elementales, favorables al acontecimiento compuesto suma 10, es 3. Al efectuar el experimento, se presenta forzosamente uno de los sucesos elementales de la tabla. Al presentarse cualquiera de los sucesos elementales 46, 55, ó 66 se ha verificado el acontecimiento suma 10. El número de sucesos elementales posibles, todos igualmente probables es 36. La probabilidad de arrojar la suma 10 es entonces  $\frac{3}{36}$  o sea igual a  $\frac{1}{12}$ .

El hecho de que el acontecimiento suma 10 tenga la probabilidad  $\frac{1}{12}$  tiene este otro significado:

Si se verifica el experimento de arrojar los dos dados un gran número *n* de veces, entonces el acontecimiento suma 10 se presentará aproximadamente 12 veces. Al número de veces que se presenta un acontecimiento en *n* pruebas, se le llama, frecuencia absoluta de ese acontecimiento. El cociente de la frecuencia absoluta entre el número total de pruebas *n*, es la frecuencia relativa. La frecuencia relativa de un acontecimiento es aproximadamente igual a su probabilidad.

El matemático contemporáneo Von Mises define la probabilidad de un acontecimiento, como el límite al que tiende la frecuencia relativa del mismo, cuando el número de pruebas tiende al infinito. En el caso del acontecimiento suma 10, se hace el experimento por ejemplo... 12000 veces. La suma 10 se presentará aproximadamente en 1000 casos; es decir, aproximadamente en la doceava parte del total, ya que su probabilidad es un doceavo. La frecuencia relativa del acontecimiento suma 10 en 12000 experiencias es aproximadamente  $\frac{1}{12}$ . Si se hace el experimento 24000 veces la frecuencia relativa del acontecimiento suma 10, es más próxima a un doceavo, según Von Mises.

Supongo que el número de sucesos elementales posible en un experimento, es finito. Si un acontecimiento tiene la probabilidad cero, esto significa que el número de sucesos elementales favorables es nulo, o expresado de otro modo, que no hay ningún suceso elemental que pueda originar a ese acontecimiento, es decir, que en el experimento que se está efectuando es imposible que se presente. Por ejemplo, la probabilidad de arrojar con dos dados la suma 13, es cero.

Si la probabilidad de un acontecimiento es igual a 1, el número de casos favorables a ese acontecimiento, es igual al número de sucesos elementales posibles. Expresado de otro modo: Todos los sucesos elementales posibles, originan al acontecimiento, porque todos ellos son favorables. Al hacer el experimento, hay pues la seguridad absoluta de que se verificará el acontecimiento. El haber de elegido al número 1 para medir la seguridad absoluta, es

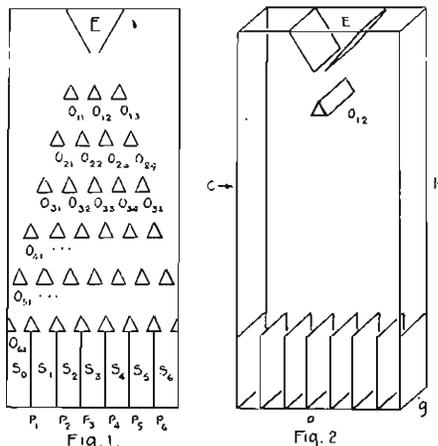
enteramente arbitrario, pero muy conveniente. Se podría haber elegido por ejemplo al número 100. Cuando decimos: la probabilidad de ganar en ese juego es de 50%, estamos asignando a la seguridad absoluta el valor 100%.

2. Ejemplo. El experimento consiste en tomar de una baraja mexicana una carta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea rey?

El número de sucesos elementales favorables es 4. El número de sucesos elementales posibles todos igualmente probables es 40. Entonces la probabilidad de que la carta tomada sea rey es  $\frac{4}{40}$ . Si se hace el experimento 1000 veces aproximadamente, en 100 casos se habrá tomado un rey.

EL APARATO

El aparato de Galton consta de un cajón *C*. (Fig. 2). El grueso *g* es mucho menor que la anchura *a*, y ésta también mucho menor que la altura *h*. Para facilitar la exposición, supongo que he colocado a *C*, de manera que las aristas *h*, sean verticales. Me coloco frente al aparato y contemplo una de las caras *a*, *h*. Esa cara frontal es de vidrio. Las otras son de madera, exceptuando la superior que se suprime.



Sobre el fondo, están colocadas las paredes divisorias verticales *P*<sub>1</sub>, *P*<sub>2</sub>, *P*<sub>3</sub>,... Estas paredes, dividen a la parte inferior de *C*, en los departamentos *S*<sub>0</sub>, *S*<sub>1</sub>, *S*<sub>2</sub>,... *E* es un embudo de lámina. Entre el embudo *E* y los departamentos *S*, están los obstáculos *o*. (Fig. 1). En la figura 1, sólo se muestra el obstáculo *o*<sub>12</sub> de la primera hilera de obstáculos, por aquítá del dibujante. Los obstáculos son prismas triangulares apoyados en la pared frontal y en la posterior.

Por el embudo *E*, arrojó una munición, esta choca con el obstáculo *o*<sub>12</sub>. Al tropezar con la arista superior del prisma, se desvía la munición a la izquierda o a la derecha. A una desviación a la izquierda, la llamo *l*, a

una desviación a la derecha, la llamo **D**. Los dos sucesos **I** y **D** son igualmente probables. Hago notar que **I** y **D** son los dos términos del binomio  $(I + D)$ . Si abajo de la primera hilera de obstáculos estuvieran colocados inmediatamente los departamentos  $S_0$  y  $S_1$  (Fig. 3) la probabilidad de que una munición cayera en  $S_0$  sería  $\frac{1}{2}$  y la probabilidad de que cayera en  $S_1$  sería también  $\frac{1}{2}$ .

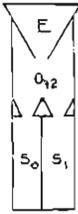


Fig. 3.

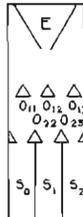


Fig. 4.

Después de pasar la munición la primera hilera de obstáculos, choca con la segunda hilera; aquí puede desviarse otra vez a la izquierda o a la derecha. La munición se puede desviar en las dos hileras hacia la izquierda **II**, o en la primera hilera a la izquierda y en la segunda a la derecha **ID**; o en la primera a la derecha y en la segunda a la izquierda; o en las dos a la derecha. Los casos posibles igualmente probables son **II**, **ID**, **DI**, **DD**. Estos son los términos del producto  $(I + D)(I + D)$ .

Si abajo de la segunda hilera de obstáculos, se encuentran inmediatamente los departamentos **S** (Fig. 4) una munición caería en  $S_0$  sólo que se desviara tres veces hacia la izquierda.

La probabilidad de que una munición cayera en  $S_0$  sería  $\frac{1}{2}$ . El acontecimiento caer en  $S_1$  se descompone en los dos sucesos elementales **ID** y **DI**. La probabilidad de que la munición caiga en  $S_1$  es entonces  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . La probabilidad de caer en  $S_2$  sería  $\frac{1}{2}$ .

Acontecimiento:	Sucesos simples:
$S_0$ .....	<b>II</b>
$S_1$ .....	<b>ID y DI</b>
$S_2$ .....	<b>DD</b>

Las probabilidades de las diferentes **S** son proporcionales a los números 1, 2, 1; coeficientes del desarrollo de  $(I + D)^2$ .

Voy a considerar el caso de 6 hileras de obstáculos. (Fig. 1).

Todos los casos que se pueden presentar están dados por los términos del producto de seis factores binomios:

$$(I + D)(I + D)(I + D)(I + D)(I + D)(I + D)$$

El número total de sucesos elementales igualmente probables es entonces  $2^6 = 64$ . Dos desviaciones hacia la

izquierda, y cuatro hacia la derecha conducen a la munición al departamento  $S_2$ , cualquiera que sea el orden en que se efectúan las desviaciones. En el producto de 6 factores binomios hay muchos productos parciales con 2 factores iguales a **I** y cuatro factores iguales a **D**. Todos estos productos parciales corresponden a trayectorias de la munición que terminan en  $S_2$ . Para obtener el número total de productos parciales con dos factores **I** y cuatro factores **D** considero la potencia  $(I + D)^6$ , que es igual al producto propuesto. En el desarrollo de  $(I + D)^6$  por la fórmula del binomio, se obtiene el total de productos parciales que nos interesa reunidos en un solo término, cuyo coeficiente nos indica el número de ellos en el producto primitivo.

$$(I + D)^6 = I^6 + 6I^5D + 15I^4D^2 + 20I^3D^3 + 15I^2D^4 + 6ID^5 + D^6$$

La probabilidad de que la munición caiga en el departamento  $S_2$  es entonces igual a  $\frac{15}{64}$ .

Departamento:	Sucesos simples correspondientes:
0.....	1
1.....	6
2.....	15
3.....	20
4.....	15
5.....	6
6.....	1

La probabilidad para cada departamento se obtiene dividiendo el número de sucesos simples correspondiente entre 64. Las probabilidades de los diferentes departamentos son por lo tanto proporcionales a los coeficientes del desarrollo del binomio  $(I + D)^6$ . A los coeficientes de este desarrollo se les designa con:

$$\begin{aligned} \binom{6}{0} &= 1 \text{ (seis binomial cero igual uno)} \\ \binom{6}{1} &= 6 \text{ (seis binomial uno igual seis)} \\ \binom{6}{2} &= 15 \text{ (seis binomial dos igual quince)} \\ \binom{6}{3} &= 20 \quad \binom{6}{4} = 15 \quad \binom{6}{5} = 6 \quad \binom{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

El desarrollo se puede escribir entonces:

$$(I + D)^6 = \binom{6}{0} I^6 + \binom{6}{1} I^5 D + \binom{6}{2} I^4 D^2 + \binom{6}{3} I^3 D^3 + \binom{6}{4} I^2 D^4 + \binom{6}{5} I D^5 + \binom{6}{6} D^6$$

La probabilidad de que una munición caiga en el departamento  $S_2$  es  $\frac{15}{64}$

Si en vez de 6 hileras de obstáculos se consideran **n** hileras, el producto que habrá entonces que considerar será uno de **n** factores iguales a  $(I + D)$ . Este producto es igual a una suma de  $2^n$  productos parciales. Cada pro-

ducto parcial representa un suceso elemental posible. Todos los sucesos elementales son igualmente probables. Si una munición se desvía  $k$  veces hacia la izquierda y  $n-k$  veces hacia la derecha, va a dar al departamento  $S_k$ , cualquiera que sea el orden en que se efectúen estas desviaciones. Para obtener el número total de productos parciales con  $k$  factores iguales a  $1$  y  $n-k$  factores iguales a  $D$  considero la potencia  $(1 + D)^n$ . El número de productos parciales es igual al coeficiente de  $1^k D^{n-k}$ . Este coeficiente se escribe con la notación abreviada debida a Euler  $\binom{n}{k}$  (n binomial k).

La probabilidad de que una munición caiga en el departamento  $S_k$  es  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ . Las probabilidades de los departamentos son proporcionales a los binomiales correspondientes a los índices de los mismos.

Si se arroja una munición por el embudo  $E$ , y se anota en qué departamento cae, y si se reitera este experimento muchas veces, la frecuencia de cada departamento será proporcional a su probabilidad.

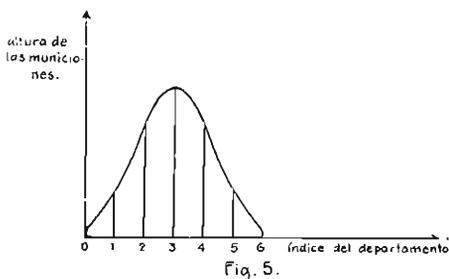


Fig. 5.

En lugar de hacer el experimento de arrojar una munición reiteradas veces se puede arrojar por el embudo  $E$  un gran número de municiones simultáneamente. Las municiones se acumulan en las divisiones  $S$ , llenándolas hasta cierta altura. Como todos los departamentos tienen la misma anchura, la altura de las municiones en cada departamento será proporcional al número de municiones acumuladas, pero éste a su vez es proporcional a la probabilidad del departamento. De esto se deduce que la altura de las municiones en cada departamento debe ser proporcional a la probabilidad del mismo. La figura 5 muestra cómo se distribuyen las municiones en un aparato de 6 hileras de obstáculos.

En el caso de  $n$  hileras de obstáculos, la altura de las municiones en cada departamento es:  $c \binom{n}{k}$  en que  $c$  es una constante que depende del número de municiones que se arrojan por  $E$  y de las dimensiones de cada departamento. Variando la cantidad de municiones total, se puede lograr llenar cualquier departamento hasta una altura arbitraria, que sólo está limitada por la altura de las paredes divisorias.

Si un aparato de Galton tiene muchas divisiones, y por lo tanto muchos departamentos, y si se arroja un gran número de municiones por el embudo  $E$ , la distribución

de las municiones en los diferentes departamentos produce la impresión de una curva continua con la forma de la sección diametral de una campana.

Es curioso observar que si se clasifica a un conjunto numeroso de elementos arbitrarios por un carácter cuantificable, la distribución de los elementos en las diferentes clases es igual en muchos casos, a la distribución de las municiones en los departamentos de un aparato de Galton.

Ejemplos:—1) Si 1000 hombres adultos se dividen en 7 clases por sus estaturas; colocando en la clase 0 a todos los individuos cuya estatura varía entre 1.55 m. y 1.60 m., en la clase 1 a aquellos cuya altura varía entre 1.60 m. y 1.65 m., en la clase 2 a aquellos cuya altura varía entre 1.65 m. y 1.70 m., etc. . . . y por último en la clase 6 a aquellos cuya altura varía de 1.90 m. y 1.95 m., y si se excluyen los individuos que no pertenecen a ninguna clase, entonces se puede lograr variando el número total de municiones en un aparato de Galton de 6 hileras de obstáculos, que la altura hasta la cual se llena cada departamento sea con mucha aproximación proporcional al número de hombres pertenecientes a la clase del mismo índice.

2). Si se ordena un conjunto muy numeroso de peces lenguados (familia de los pleuronéctidos, orden de los anacantinos) por el número de espigas de la cola, formando diferentes clases, la distribución de los peces en éstas, es la misma que la distribución de las municiones en un aparato de Galton.

3). Supongo que se ha medido la distancia entre dos puntos reiteradas veces, y que se ha formado la media aritmética de todas las medidas obtenidas. Las diferencias de esa media aritmética y las medidas individuales son los errores aparentes. Si se clasifican los errores por su magnitud, la distribución de éstos en las diferentes clases es también igual a la distribución de las municiones en un aparato de Galton.

No en todos los conjuntos se distribuyen los elementos en las diferentes clases como lo indica el aparato de Galton. Pearson modificó el aparato para obtener distribuciones más generales. Muchos de los conjuntos que estudia la biología se distribuyen como las municiones en un aparato de Pearson.

#### DATOS HISTORICOS

Los primeros problemas de cálculo de probabilidades fueron tratados por el matemático italiano Lucas Paciolo (1445-1514) en su obra: *Summa de Arithmetica Geometria Proportional et Proportionalita*, publicada en 1494. Paciolo propuso algunos problemas que él mismo no pudo resolver. Varios de ellos los resolvió Jerónimo Cardano (1501-1576) matemático italiano también. La obra en que resuelve esos problemas de cálculo de probabilidades es: *Practica Arithmeticae et Mesurandi Generalis*, publicada en 1539.

Al investigador que se debe considerar como el verdadero fundador del cálculo de las probabilidades es al gran matemático francés Blaise Pascal (1623-1662). Fue él quien logró que éste se convirtiera en una disciplina autónoma dentro de las matemáticas. Los primeros problemas que se trataron eran relativos a los juegos de azar.

En su primera época el cálculo de las probabilidades parecían ser un método muy general para resolver problemas de dados. Después estuvieron de moda los problemas de urnas. Fueron las geniales aplicaciones de esta rama del saber a la teoría de los errores y a la estadística, las que la elevaron al importante lugar que hoy ocupa en la ciencia.

El aparato de Galton fué inventado por el sabio inglés Francis Galton, que lo describió por primera vez en su obra: *Natural Inheritance*, publicada en 1889. Karl Pearson describe la generalización del aparato en su artículo: *Skew Variation in Homogeneous Material*, publicado en la *Phil. Trans. Roy. Soc. Series A*, Vol. CLXXXVI en 1895.

# SECCION DE CIENCIAS EXACTAS

## La Aceleración de Coriolis

Por Carlos Graef.

Profesor de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

### 1.—NOTACION

Sigo la notación de Gibbs para vectores.

Al producto escalar de dos vectores  $\vec{U}$  y  $\vec{V}$  lo designo con  $\vec{U} \cdot \vec{V}$ .

Al producto vectorial de los mismos con  $\vec{U} \times \vec{V}$ .

Al triple producto escalar de los tres vectores  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  y  $\vec{W}$  lo designo con

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{V} \times \vec{W}) = (\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W})$$

Utilizo un sistema de tres vectores unitarios perpendiculares  $I, J, K$ . Este sistema permanece fijo en todas las consideraciones siguientes. Los tres vectores unitarios perpendiculares  $I, J, K$ , supongo que forman un sistema derecho. Es decir, vista desde el extremo de  $I$ , tiene la rotación que conduce de  $J$  a  $K$ , un sentido contrario a la rotación de las manecillas de un reloj; vista desde el extremo de  $J$  tiene la rotación que conduce de  $K$  a  $I$  un sentido contrario al de la rotación de las manecillas de un reloj, y vista desde el extremo de  $K$ , tiene la rotación que conduce de  $I$  a  $J$  un sentido contrario al de la rotación de las manecillas de un reloj. (Fig. 1).

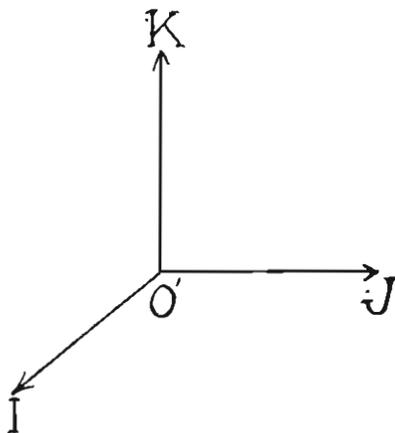


Fig. 1.

Considero otro sistema de tres vectores unitarios perpendiculares  $i, j, k$ .

Este sistema lo supongo también derecho y móvil con respecto al primer sistema. (Fig. 2).

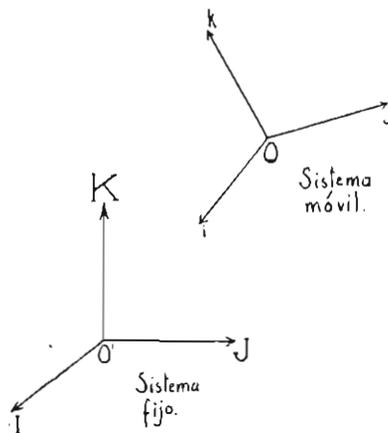


Fig. 2.

Supongo que en el sistema fijo se encuentra un observador, Felipe.

En el sistema móvil habita otro observador, Mateo.

Supongo a los vectores  $I, J, K$  del sistema fijo, materializados; tres varillas de longitud 1 m, perpendiculares y unidas rigidamente. A esta estructura está unida rigidamente una plataforma en la que hace sus observaciones Felipe.

A los tres vectores  $i, j, k$  del sistema móvil también los supongo materializados; son tres varillas unitarias soldadas rigidamente en  $O$  y perpendiculares entre sí. A este sistema de tres varillas está unida rigidamente una plataforma en la que hace sus observaciones Mateo. Supongo que los dos sistemas se encuentran en el espacio muy lejos de masas atrayentes. Si tiene uno la fantasía de un Julio Verne, imaginaré uno en cada plataforma una caseta cerrada herméticamente. Dentro de la caseta botellas con oxígeno líquido, acumuladores, calefacción, víveres, etc. Las casetas con sus ventanas de cuarzo. Cada uno de los sistemas provisto de cohetes para su pro-

pulsión. El lector debe pensar que él acompaña a Felipe. El sistema fijo es fijo por convención. Desde el fijo se observa al otro sistema y se ve cómo éste se mueve.

Felipe y Mateo se comunican por radio.

Las consideraciones que siguen están dentro de la **mecánica clásica**, sin ninguna intervención de la relatividad.

Felipe observa que los tres vectores  $i, j, k$  del sistema móvil cambian de dirección, pero no de longitud.

Para Felipe  $i, j, k$  son vectores variables. El expresa todos los vectores que considera, según sus tres componentes a lo largo de  $I, J$  y  $K$ .

$$\left. \begin{aligned} i &= A_1 I + A_2 J + A_3 K \\ j &= B_1 I + B_2 J + B_3 K \\ k &= C_1 I + C_2 J + C_3 K \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Las nueve cantidades  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  son variables, son funciones del tiempo.

Para estudiar los movimientos del sistema móvil, considera Felipe un sistema auxiliar de tres vectores  $i', j', k'$  unitarios, perpendiculares; este sistema también derecho. Lo supone Felipe con su origen en el origen  $O'$  del sistema  $I, J, K$ . El sistema auxiliar  $i', j'$  y  $k'$  efectúa movimientos: pero teniendo su origen permanentemente en el origen del sistema fijo.

Al vector  $i'$  lo obliga Felipe a ser paralelo a  $i, j'$  paralelo a  $j$  y  $k'$  paralelo a  $k$ .

El sistema  $i, j, k$  y el  $i', j', k'$  tienen siempre la misma orientación. Al moverse el sistema  $i, j, k$  automáticamente se mueve el sistema  $i', j', k'$ , cambiando de orientación.

Los vectores  $i', j', k'$ , son funciones del tiempo.

Desde el punto de vista del cálculo vectorial, los vectores  $i, j, k$  son iguales respectivamente a  $i', j', k'$ , porque tienen el mismo módulo y son paralelos. Felipe observa los extremos de los vectores  $i', j', k'$ . Como el producto escalar del vector  $i'$  por sí mismo es constante e igual a 1, la derivada de ese producto con respecto al tiempo es nula.

$$\begin{aligned} D_t i' \cdot i' &= 2i' \cdot \frac{di'}{dt} = 0 \\ \therefore i' \cdot \frac{di'}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

De aquí se infiere que los vectores  $i'$  y  $\frac{di'}{dt}$  son perpendiculares

$$i' \perp \frac{di'}{dt}$$

$i'$  es un vector variable en dirección; su derivada con respecto al tiempo o sea el vector velocidad de su cabeza,

es constantemente perpendicular al mismo vector  $i'$ . El vector  $\frac{di'}{dt}$  está colocada en un plano perpendicular a  $i'$ , y por eso, sólo tiene componentes a lo largo de  $j'$  y  $k'$ .

$$\text{De modo que } \frac{di'}{dt} = aj' + bk'$$

Se demuestra de manera semejante que

$$\frac{dj'}{dt} = ci' + dk' \quad \frac{dk'}{dt} = ei' + fj'$$

Como en el cálculo vectorial, dos vectores que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, se consideran iguales y tienen las mismas componentes en cualquier sistema.

$$\left. \begin{aligned} i' &\text{ es igual a } i, \\ j' &\text{ es igual a } j, \\ k' &\text{ es igual a } k. \end{aligned} \right\}$$

pero la derivada  $\frac{di'}{dt} = \frac{di}{dt}$  sólo es la velocidad de la cabeza de  $i$  cuando se coloca el origen de  $i$  en el origen de coordenadas. Si el origen del vector  $i$  también se mueve, entonces  $\frac{di}{dt}$  no es la velocidad de la cabeza del vector  $i$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= aj + bk \\ \frac{dj}{dt} &= ci + dk \\ \frac{dk}{dt} &= ei + fj \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Los escalares  $a, b, c, d, e$  y  $f$  no son totalmente independientes.

Como  $i, j, k$  son perpendiculares:

$$i \cdot j = 0 \quad i \cdot k = 0 \quad \text{y} \quad k \cdot j = 0$$

Las derivadas de los primeros miembros de estas tres ecuaciones con respecto al tiempo, también son nulas

$$\left. \begin{aligned} i \cdot \frac{dj}{dt} + j \cdot \frac{di}{dt} &= 0 \\ i \cdot \frac{dk}{dt} + k \cdot \frac{di}{dt} &= 0 \\ k \cdot \frac{dj}{dt} + j \cdot \frac{dk}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Sustituyendo ahora los valores de  $\frac{di}{dt}, \frac{dj}{dt}, \frac{dk}{dt}$  de las ecuaciones (2) en las ecuaciones (3) y obtengo:

$$\left. \begin{aligned} c + a &= 0 & e &= -a \\ e + b &= 0 & e &= -b \\ d + f &= 0 & f &= -d \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= aj + bk \\ \frac{dj}{dt} &= -ai + dk \\ \frac{dk}{dt} &= -bi + dj \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Los tres vectores  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{dj}{dt}$  y  $\frac{dk}{dt}$  son las velocidades de las cabezas de los vectores auxiliares  $i'$ ,  $j'$  y  $k'$ . Si se trasladan paralelamente a sí mismos  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{dj}{dt}$  y  $\frac{dk}{dt}$  de manera que sus orígenes coincidan, estos tres vectores quedan colocados en un plano. Demostración: El volumen del prisma definido por los tres vectores  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{dj}{dt}$  y  $\frac{dk}{dt}$  cuando coinciden sus orígenes, es igual al triple producto escalar de los mismos.

$$V = \frac{di}{dt} \cdot \left( \frac{dj}{dt} \times \frac{dk}{dt} \right) = \left( \frac{di}{dt} \cdot \frac{dj}{dt} \cdot \frac{dk}{dt} \right)$$

Si el triple producto escalar  $V$  es nulo, los vectores son coplanos.

$$V = (aj + bk, -ai + dk, -bi - dj)$$

Este triple producto escalar se escribe como la suma de 8 triples productos escalares. De esos 8 se anulan 6 y subsisten 2. Se anulan aquellos en que intervienen dos vectores paralelos.

$$\begin{aligned} V &= (aj, dk, -bi) + (bk, -ai, -dj) \\ V &= -abd(j, k, i) + adb(k, i, j) \\ (j, k, i) &= (k, i, j) = 1 \end{aligned}$$

$$V = 0$$

y los tres vectores  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{dj}{dt}$  y  $\frac{dk}{dt}$  son coplanos, cuando coinciden sus orígenes.

Llamo  $\bar{w}_0$  a un vector unitario perpendicular al plano de los tres vectores  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{dj}{dt}$  y  $\frac{dk}{dt}$ .

El vector  $\frac{di}{dt}$  es perpendicular a  $i$ , y perpendicular a  $\bar{w}_0$ . Entonces:

$$\frac{di}{dt} = l(\bar{w}_0 \times i)$$

$l$  es un escalar, que determinaré después. Del mismo modo:

$$\frac{dj}{dt} = m(\bar{w}_0 \times j)$$

$$\frac{dk}{dt} = n(\bar{w}_0 \times k)$$

para determinar  $l$ ,  $m$  y  $n$  utilizo las ecuaciones:

$$\begin{aligned} i \cdot j &= 0 \\ i \cdot k &= 0 \\ j \cdot k &= 0 \end{aligned}$$

y las derivadas con respecto al tiempo de los primeros miembros, que son nulas.

$$\left. \begin{aligned} i \cdot \frac{dj}{dt} + j \cdot \frac{di}{dt} &= 0 \\ i \cdot \frac{dk}{dt} + k \cdot \frac{di}{dt} &= 0 \\ j \cdot \frac{dk}{dt} + k \cdot \frac{dj}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

$$\begin{aligned} i \cdot m(\bar{w}_0 \times j) + j \cdot l(\bar{w}_0 \times i) &= 0 \\ m(\bar{w}_0 \cdot j, i) + l(\bar{w}_0 \cdot i, j) &= 0 \\ (m - l)(\bar{w}_0 \cdot j, i) &= 0 \end{aligned}$$

Esta última igualdad es una identidad.  $(\bar{w}_0 \cdot j, i)$  no puede ser nulo en todos los casos, porque entonces  $\bar{w}_0$  debería estar colocado siempre en el plano  $i, j$ ; y este plano no goza de ningún privilegio especial.

De aquí se deduce que  $m = l$ . Del mismo modo se demuestra que  $\underline{\underline{j = m = n}}$ . Entonces:

$$\frac{di}{dt} = l(\bar{w}_0 \times i)$$

$$\frac{dj}{dt} = l(\bar{w}_0 \times j)$$

$$\frac{dk}{dt} = l(\bar{w}_0 \times k)$$

$\bar{w}_0$  es un vector perpendicular al plano de  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{dj}{dt}$  y  $\frac{dk}{dt}$  y además es unitario.

El vector  $l\bar{w}_0$  es un vector perpendicular al plano de  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{dj}{dt}$  y  $\frac{dk}{dt}$  y de módulo 1. A este vector le llamo  $\bar{w}$ .

$$\underline{\underline{\bar{w} = l\bar{w}_0}}$$

Entonces:

$$\frac{di}{dt} = \vec{\omega} \times i$$

$$\frac{dj}{dt} = \vec{\omega} \times j$$

$$\frac{dk}{dt} = \vec{\omega} \times k$$

Recordemos ahora a los observadores Felipe y Mateo. Felipe en el sistema fijo y Mateo en el sistema móvil. El lector acompaña a Felipe; eso es lo que significa que su sistema es fijo. Mateo está estudiando un vector  $\vec{s}$  variable en el tiempo. Para Mateo

$$\vec{s} = s_x j + s_y j + s_x k$$

$s_x$ ,  $s_y$  y  $s_x$  son tres escalares variables, para Mateo, y los vectores  $i$ ,  $j$ ,  $k$ , también son variables.

$\vec{s}$  para Mateo es igual a la suma de los tres vectores  $s_x i$ ,  $s_y j$ ,  $s_x k$  de módulo variable, pero de dirección fija, y para Felipe  $\vec{s}$  es la suma de los tres vectores  $s_x i$ ,  $s_y j$ ,  $s_x k$  de módulo variable y de dirección variable. Las derivadas con respecto al tiempo del mismo vector  $\vec{s}$  en ambos sistemas tienen que ser distintas.

La derivada del vector  $\vec{s}$  para el sistema fijo la designo con  $\frac{d\vec{s}}{dt}$ . La derivada del vector  $\vec{s}$  para el sistema móvil, la designo con  $\frac{d^*\vec{s}}{dt}$ .

$$\vec{s} = s_x i + s_y j + s_x k$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} &= \frac{ds_x}{dt} i + \frac{ds_y}{dt} j + \frac{ds_x}{dt} k + s_x \frac{di}{dt} + \\ &+ s_y \frac{dj}{dt} + s_x \frac{dk}{dt} \end{aligned}$$

En el sistema fijo  $s_x$ ,  $s_y$ ,  $s_x$ ,  $i$ ,  $j$ ,  $k$ , son variables.

$$\frac{d^*\vec{s}}{dt} = \frac{ds_x}{dt} i + \frac{ds_y}{dt} j + \frac{ds_x}{dt} k$$

En el sistema móvil  $i$ ,  $j$ ,  $k$ , son vectores constantes.

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d^*\vec{s}}{dt} + s_x (\vec{\omega} \times i) + s_y (\vec{\omega} \times j) + s_x (\vec{\omega} \times k)$$

$\vec{\omega}$  es un vector perpendicular a  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{dj}{dt}$  y  $\frac{dk}{dt}$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d^*\vec{s}}{dt} + \vec{\omega} \times (i s_x) + \vec{\omega} \times (j s_y) + \vec{\omega} \times (k s_x)$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d^*\vec{s}}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{s})$$

Felipe encuentra para derivada del vector  $\vec{s}$  al vector  $\frac{d\vec{s}}{dt}$

Mateo afirma que la derivada de  $\vec{s}$  es el vector  $\frac{d^*\vec{s}}{dt}$ .

Hay que hacer notar que  $\vec{s}$  es un vector variable con el tiempo y que existe independientemente de los sistemas I, J, K e i, j, k.  $\vec{\omega}$  es otro vector, en general, también variable con el tiempo.

$\vec{\omega} \times \vec{s}$  se puede definir sin necesidad de recurrir a las componentes de  $\vec{\omega}$  y de  $\vec{s}$ .

## EL MOVIMIENTO RELATIVO

Felipe y Mateo convienen en observar un mismo astro A, que se ve en movimiento desde los dos sistemas. (Fig. 3).

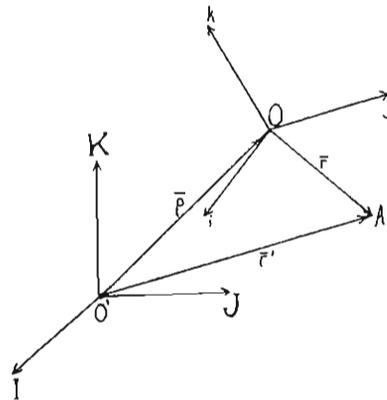


Fig. 3.

Felipe observa desde el sistema fijo al punto O, como punto móvil. El vector de posición del punto O en el sistema fijo es  $\vec{p}$ . El vector  $\vec{p}$  supongo que está definido como

$$\vec{p} = p_x I + p_y J + p_z K$$

Es decir, Felipe es el que estudia el vector  $\vec{p}$  y lo define en su sistema.

El vector de posición del astro A en el sistema fijo es  $\vec{r}$ ;  $\vec{r}'$  también es un vector que sólo incumbe a Felipe y éste lo define así:

$$\vec{r}' = r_x' I + r_y' J + r_z' K$$

El vector de posición del astro A en el sistema móvil

es  $\vec{r}$ .  $\vec{r}$  es un vector que estudia Mateo.  $\vec{r}$  está definido en el sistema móvil.

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

Supongo que de los dos observadores, Felipe, en el sistema fijo, es el más interesado en investigación científica.

Felipe pide a Mateo los datos observados por él y así tiene noticia de  $r_x$ ,  $r_y$  y  $r_z$ .

Felipe es el que hace el estudio siguiente:

$$\vec{r}' = \dot{\vec{p}} + \vec{r}$$

Derivo ambos miembros de esta ecuación con respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\dot{\vec{p}}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}$  es el vector velocidad del Astro en el sistema fijo, o sea la velocidad absoluta; la velocidad con que Felipe ve moverse al astro.

$\frac{d\dot{\vec{p}}}{dt} = \vec{V}_0$  es la velocidad del punto O origen del sistema móvil, vista desde el sistema fijo. Es la velocidad con que Felipe ve moverse a O.

Como Felipe está haciendo el estudio

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \therefore \quad \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}_0 + \frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\frac{d^*\vec{r}}{dt}$  es la velocidad relativa del astro en el sistema móvil; es la velocidad relativa

$$\frac{d^*\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r$$

$\vec{V}_r$  es la velocidad con que Mateo ve moverse al astro

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_r$$

Después interpretaré al término  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  y al vector  $\vec{\omega}$ .

Derivo otra vez ambos miembros de esta ecuación con respecto al tiempo.

La derivada de  $\vec{V}$  con respecto al tiempo es la aceleración  $\vec{a}$  del astro A en el sistema fijo. Es la aceleración que observa Felipe

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$$

Como Felipe está haciendo el estudio, define el vector  $\vec{\omega}$  en su sistema

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

La derivada del vector  $\vec{\omega}$  con respecto a  $t$  es simplemente:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt} \vec{i} + \frac{d\omega_y}{dt} \vec{j} + \frac{d\omega_z}{dt} \vec{k}$$

La derivada de  $\vec{r}$  con respecto al tiempo es:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d^*\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{V}_r$  es un vector que está definido en el sistema  $i, j, k$ , porque es la velocidad con que Mateo ve moverse al astro A. Entonces:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{d^*\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r$$

$$\vec{V}_r = (V_r)_x \vec{i} + (V_r)_y \vec{j} + (V_r)_z \vec{k}$$

Para Mateo solo varían  $(V_r)_x$ ,  $(V_r)_y$ ,  $(V_r)_z$  pero  $i, j, k$  son para él vectores fijos. La aceleración del astro es para Mateo

$$\frac{d^*\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r$$

$\vec{a}_r$  es la aceleración relativa.

$\vec{V}_0$  es la velocidad con la que Felipe ve moverse al punto O origen del sistema móvil.  $\vec{V}_0$  es entonces un vector definido en el sistema fijo, su derivada es la aceleración de O en el sistema fijo

$$\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{a}_0$$

$\vec{a}_0$  es la aceleración de O para Felipe

Derivo ahora ambos miembros de la ecuación

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_r$$

(El calculador es Felipe).

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \frac{d\vec{V}_r}{dt}$$

$$\begin{aligned} \bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{w} \times (\bar{V}_r + \bar{w} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r} + \\ + \bar{a}_r + \bar{w} \times \bar{v}_r \end{aligned}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{w} \times \bar{V}_r + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r} + \\ + \bar{a}_r + \bar{w} \times \bar{v}_r$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r} + 2\bar{w} \times \\ \times \bar{v}_r + \bar{a}_r$$

Interpretaré ahora cada uno de los términos que intervienen en la velocidad  $\bar{V}$  y en la aceleración  $\bar{a}$ .

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{w} \times \bar{r} + \bar{V}_r$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r} + 2\bar{w} \times \\ \times \bar{v}_r + \bar{a}_r$$

$\bar{V}_0$  es la velocidad con la que se mueve O para Felipe. Para interpretar  $\bar{w} \times \bar{r}$  conviene suponer que el sistema móvil sólo cambia de orientación para Felipe, pero que O permanece fijo; entonces  $\bar{V}_0$  es nula. Considero un punto P, fijo para Mateo. P es un punto rígidamente ligado al sistema i, j, k. Para el punto P  $\bar{V}_r$  es nula. P no tiene velocidad para Mateo. En este caso, en que  $\bar{V}_r = 0$  y  $\bar{V}_0 = 0$   $\bar{V} = \bar{w} \times \bar{r}$ .

En la figura 4 está representado el sistema móvil i, j, k; el vector  $\bar{w}$  y el punto P, fijo para Mateo.  $\bar{r}$  es el vector de posición de P. Para Mateo  $\bar{r}$  es constante.

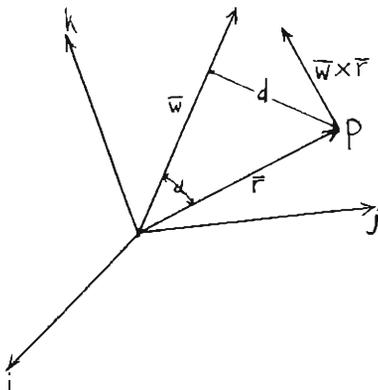


Fig. 4.

El producto vectorial  $\bar{w} \times \bar{r}$  es vector que tiene por módulo  $|\bar{w} \times \bar{r}| = wr \sin \alpha$  si  $\alpha$  es el ángulo que forman  $\bar{w}$  y  $\bar{r}$ . Desde el extremo de  $\bar{w} \times \bar{r}$  se ve la rotación de  $\bar{w}$  a  $\bar{r}$  en sentido contrario a las manecillas de un reloj.

La distancia del punto P al vector  $\bar{w}$  es d, siempre que éste se coloque con su origen en O.

La velocidad  $\bar{V}$  de P es perpendicular a  $\bar{w}$  y a  $\bar{r}$ . Lo que se dice para P vale para todos los puntos que permanecen fijos para Mateo. Todos ellos tienen velocidades perpendiculares al vector. El valor de la velocidad es  $\underline{wr \sin \alpha} = \underline{wd}$ .

Las velocidades de los puntos son proporcionales a sus distancias al vector  $\bar{w}$  y perpendiculares a éste.

El sistema móvil está efectuando entonces un movimiento de rotación con  $\bar{w}$  como eje.

El valor absoluto de la velocidad de un punto P es wd.

$\bar{W}$  es la velocidad angular de la rotación, porque d es la distancia de P al eje  $\bar{w}$ .

$\bar{W}$  es variable con respecto al tiempo. En cualquier instante es el eje de rotación.  $\bar{W}$  es el eje instantáneo de rotación. Si O no está inmóvil para Felipe, entonces  $\bar{V}_0$  no es nula. La velocidad de un punto P rígidamente ligado al sistema móvil, es decir, fijo para Mateo, es entonces:

$$\bar{V}_a + \bar{w} \times \bar{r}$$

A esta velocidad se le llama velocidad de arrastre  $\bar{V}_a$ .

$$\bar{V}_a = \bar{V}_0 + \bar{w} \times \bar{r}$$

La velocidad de arrastre es en general distinta en cada punto rígidamente unido al sistema móvil.  $\bar{V}_a$  es función de  $\bar{r}$ .

Si el sistema móvil no cambia de orientación, entonces la velocidad angular  $\bar{w}$  es nula y  $\bar{w}$  es nulo.

$$\bar{V}_a = \bar{V}_0$$

La velocidad de arrastre es entonces la misma para todos los puntos rígidamente ligados al sistema móvil.

El movimiento del sistema móvil con respecto al fijo es entonces una traslación. En general para un punto móvil para Mateo, es decir, móvil con relación al sistema móvil  $\bar{V} = \bar{V}_a + \bar{V}_r$ .

La velocidad del astro A para Felipe en un ins-

PAG. 182

tante dado es igual a la velocidad  $V_A$  del punto del sistema móvil unido rigidamente a éste y que ocupa en ese instante la misma posición que A, más la velocidad del astro A para Mateo.

La velocidad absoluta es igual a la velocidad de arrastre más la velocidad relativa.

Para la aceleración se puede hacer un estudio semejante.

$\bar{a}_s$  es la aceleración con la que se mueve O para Felipe.

$\bar{a}_a$  es la aceleración de O en el sistema fijo.

Si suponemos a un punto P rigidamente ligado al sistema móvil, es decir, fijo para Mateo, entonces  $\bar{r} = \text{constante para Mateo}$ .

$\bar{v}_r$  es nula y  $\bar{a}_r$  es nula.

Para ese punto P la aceleración es:

$$\bar{a}_o + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r}$$

A esta aceleración que tiene un punto rigidamente ligado al sistema móvil se le llama **aceleración de arrastre**  $\bar{a}_s$ .

$$\bar{a}_s = \bar{a}_o + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r}$$

Esta aceleración de arrastre varía en general de punto a punto de los rigidamente ligados al sistema móvil.

La aceleración de un punto móvil en un instante dado para Mateo, es decir, móvil para el sistema móvil, es entonces

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + 2(\mathbf{w} \times \mathbf{v}_r) + \mathbf{a}_r$$

$\mathbf{a}_s$  es la aceleración del punto que está rigidamente unido al sistema móvil y por el cual pasa en el instante dado el punto móvil.

Todos los términos de la aceleración de arrastre tienen una explicación mecánica inmediata.

$\mathbf{a}_o$  es la aceleración del O origen del sistema móvil.

Para interpretar el término  $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$  trazo la figura 5.

En la Fig. 5,  $\bar{w} \times \bar{r}$  es una de las componentes de la velocidad de P.

$\bar{w} \times \bar{r}$  es la velocidad con la que gira P en torno del eje  $\bar{w}$ .

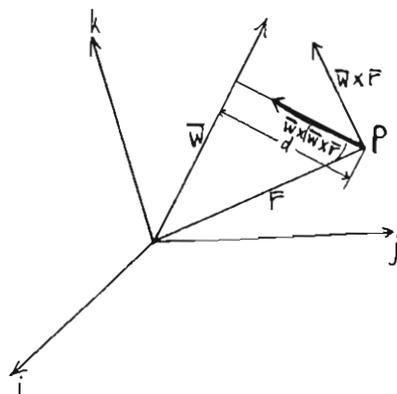


Fig. 5

Si  $\bar{v}_o = 0$  y  $\bar{r}$  es fijo, entonces toda la velocidad P se reduce a  $\bar{w} \times \bar{r}$ . La rotación de P en torno de  $\bar{w}$  se debe a una aceleración centrípeta, dirigida de P hacia  $\bar{w}$  y perpendicular a este eje.

Si se imagina uno a  $\bar{w}$  colocado con su origen en P,  $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$  es un vector perpendicular a  $\bar{w}$  y a  $\bar{w} \times \bar{r}$ . Como  $\bar{w} \times \bar{r}$  es a su vez perpendicular a  $\bar{w}$  y a  $\bar{r}$ ,  $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$  es un vector en el plano de  $\bar{w}$  y de  $\bar{r}$  y además perpendicular a  $\bar{w}$ . El módulo de  $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$  es igual al producto del módulo de  $\bar{w} \times \bar{r}$  que es  $wr \sin \alpha$  o sea  $w d$  multiplicado por el módulo de  $w$  que es  $w$  y por el seno del ángulo que forman  $w$  y  $w \times r$  que es  $\sin 90^\circ = 1$ . Entonces,

$$|\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})| = w^2 d$$

En esta expresión, cuadrado de la velocidad angular por la distancia al eje de rotación, se reconoce inmediatamente a la aceleración centrípeta.

La dirección de  $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$  es la que corresponde a la aceleración centrípeta de P que provoca la rotación de éste en torno de  $\bar{w}$ .

$\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$  es la aceleración centrípeta de P.

Como  $\bar{w}$  es función del tiempo, la velocidad  $(\bar{w} \times \bar{r})$  de P en torno de  $\bar{w}$  cambia aunque  $\bar{r}$  permanezca fijo. La relación del incremento del tiempo, cuando este último tiende a cero y  $\bar{r}$  permanece fijo, es

$$\frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r}$$

$\frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r}$ , es la aceleración de P debido a que  $\vec{w}$  es variable.  $\vec{w}$  cambia en dirección y en módulo. El módulo de  $\vec{w}$ ,  $w$  es la velocidad angular, su derivada la aceleración angular. Si  $\vec{w}_0$  es un vector unitario con la dirección y el sentido de  $\vec{w}$  entonces:

$$\vec{w} = w \vec{w}_0$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = w \frac{d\vec{w}_0}{dt} + \frac{dw}{dt} \vec{w}_0$$

$$\frac{d\vec{w}_0}{dt} \times \vec{r} = w \frac{d\vec{w}_0}{dt} \times \vec{r} + \frac{dw}{dt} \vec{w}_0 \times \vec{r}$$

$w \frac{d\vec{w}_0}{dt} \times \vec{r}$  es la aceleración de P, debido al cambio de dirección de  $\vec{w}$ .

$\frac{dw}{dt} \vec{w}_0 \times \vec{r}$  es la aceleración de P, debida a la aceleración angular  $\frac{dw}{dt}$ .

$\frac{dw}{dt} \vec{w}_0 \times \vec{r}$  es la aceleración tangencial en el movimiento de rotación de P en torno de  $\vec{w}$ .

$\frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r}$  es la componente de la aceleración debida a las variaciones de  $\vec{w}$ .

$$a_a = \vec{a}_0 + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r}$$

La aceleración absoluta es igual a:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + 2(\vec{w} \times \vec{v}_r) + \vec{a}_r$$

$\vec{a}_r$  es la aceleración del astro para Mateo.  $a_a$  es la aceleración de un punto móvil en el sistema móvil.  $\vec{a}$  es la aceleración del astro para Felipe.  $\vec{a}$  es la aceleración del mismo punto móvil en el sistema fijo.  $\vec{a}_a$  es la aceleración del punto que está rígidamente unido al sistema móvil y por el cual pasa en ese instante el astro.

$2(\vec{w} \times \vec{v}_r)$  es la aceleración de Coriolis.

La aceleración absoluta es igual a la suma de la aceleración de arrastre más la aceleración relativa más la aceleración de Coriolis.

#### APLICACIONES

Se llama sistema inercial a un sistema derecho de tres vectores perpendiculares unitarios, en el que se cumpla el principio de inercia de Newton. Una

partícula de masa sobre la que no obra ninguna fuerza, se mueve con velocidad constante, nula o diferente de cero, en una trayectoria rectilínea, con relación al sistema inercial. Si un sistema derecho de tres vectores unitarios I, J, K es inercial, cualquier otro sistema móvil i, j, k, que tenga un movimiento de traslación con respecto al primero, también es inercial. Si el movimiento del sistema móvil es únicamente de traslación  $\vec{w}$  es nula, porque la velocidad angular de la rotación es nula, y la aceleración  $\vec{a}_a$  de arrastre también es nula, porque en la traslación, todos los puntos del sistema móvil se mueven con velocidades constantes. Entonces:

$$\vec{a} = \vec{a}_a$$

La aceleración de una partícula en los dos sistemas I, J, K y i, j, k es igual. Si la partícula tiene aceleración nula en el sistema I, J, K, también tendrá aceleración nula en el i, j, k.

$$\vec{a} = \vec{a}_r = 0$$

Si el sistema I, J, K es inercial, una partícula sobre la que no obra ninguna fuerza, conserva su velocidad en dirección e inagnitud en ese sistema, y en el sistema i, j, k, que tiene un movimiento de traslación con velocidad constante, con relación al primer sistema. El sistema i, j, k también es inercial.

Si el sistema i, j, k tiene un movimiento de rotación, entonces la  $\vec{a}_a$  no es nula.

La aceleración de Coriolis  $2(\vec{w} \times \vec{v}_r)$  no es tampoco nula en general.

Un sistema i, j, k que cambia de orientación, visto desde un sistema inercial, no es inercial. Es muy fácil ver esto intuitivamente. Considero una partícula de masa moviéndose con velocidad constante en una trayectoria rectilínea, con respecto a un sistema inercial I, J, K. Sobre esta partícula no obra ninguna fuerza.

Considero otro sistema de tres vectores i, j, k materializados de alambre. Cada vector de 1cm. de longitud y soldados en el origen. A ese sistema de tres alambres le ato un hilo en el origen y lo hago ejecutar un movimiento caprichoso, con respecto al sistema I, J, K; por ejemplo, haciendo girar el hilo rápidamente en torno de un punto. La partícula que se mueve con velocidad constante y rectilínea con respecto a I, J, K tiene una trayectoria curva caprichosa, con respecto al sistema i, j, k. La velocidad

de la partícula para el sistema  $i, j, k$  tampoco puede ser constante. Si  $I, J, K$  es inercial,  $i, j, k$  no puede serlo. Se ha probado empíricamente que un sistema anclado en las estrellas fijas es inercial.

Considero el triángulo formado por los centros del Sol, de Sirio y de la estrella polar. Coloco el sistema  $I, J, K$  con su origen en el centro del lado Sol-Sirio y con el vector  $I$  señalando hacia el Sol y coincidiendo con dicho lado. Al vector  $K$  lo obligo a ser perpendicular al plano de ese triángulo. El sistema  $I, J, K$  definido en esa forma es inercial.

La masa líquida, en reposo con respecto a este sistema  $I, J, K$  inercial, adopta la forma esférica. Si además del  $I, J, K$ , considero un sistema  $i, j, k$ , que gira en torno de un eje  $\bar{w}$  con velocidad constante, siendo  $\bar{w}$  un vector fijo en  $I, J, K$ , y estando también fijo el origen de  $i, j, k$ , la masa líquida conserva su forma esférica sin que se altere ésta por las rotaciones del sistema  $i, j, k$ . Pero si se hace girar a masa líquida en torno de un eje fijo en  $I, J, K$ , ésta adopta la forma de un elipsoide de revolución.

Cualquier sistema de tres vectores  $i, j, k$ , anclado rápidamente a la tierra es un sistema no inercial.

Considero un sistema  $I, J, K$ , inercial, anclado en las estrellas fijas y un sistema  $i, j, k$ , con su origen en un punto de la superficie de la tierra, en la ciudad de México e inmóvil con relación a la tierra. Para facilitar la exposición utilizo otra vez a Felipe y a Mateo. Supongo que el lector que se encontraba con Felipe en  $I, J, K$ , se pasa a visitar a Mateo a  $i, j, k$ . El sistema  $I, J, K$ , de Felipe es inercial. El  $i, j, k$ , no lo es. De la ecuación

$$\bar{a} = a_0 + 2(\bar{w} \times \bar{V}_r) + \bar{a}_r$$

se deduce

$$\bar{a}_r = a - \bar{a}_0 - 2(\bar{w} \times \bar{V}_r)$$

$\bar{a}_r$  es la aceleración que observa Mateo.  $\bar{a}$  es la aceleración absoluta producida por las fuerzas que obran en la partícula. Si multiplico ambos miembros de esta última ecuación por la masa de la partícula, obtengo:

$$m\bar{a}_r = m\bar{a} - m\bar{a}_0 - m \cdot 2(\bar{w} \times \bar{V}_r)$$

$m\bar{a}$  es la resultante  $\bar{F}$  de las fuerzas que obran en la partícula.  $\bar{a}_r$  es la aceleración que se observa en el sistema móvil, no inercial.

Para Mateo  $\bar{a}_r$  es la aceleración. Convencionalmente le conviene decir a Mateo que sobre la partícula obran además de  $\bar{F}$  las dos fuerzas  $\bar{F}_a = -m\bar{a}_0$  y  $\bar{F}_c = -m(\bar{w} \times \bar{V}_r)$  que provocan en la partícula las aceleraciones  $-\bar{a}_0$  y  $-2(\bar{w} \times \bar{V}_r)$  respectivamente. A  $\bar{F}_a$  se le llama fuerza de arrastre a  $\bar{F}_c$  fuerza de Coriolis. Para Mateo obran en una partícula de masa  $m$ , tres fuerzas, la real  $\bar{F}$  que provoca una aceleración  $\bar{a}$ , las dos aparentes  $\bar{F}_a$  y  $\bar{F}_c$  que provoca en las  $m$  las aceleraciones  $-\bar{a}_0$  y  $-2(\bar{w} \times \bar{V}_r)$  y  $-\bar{a}_0$  respectivamente. La aceleración que observa Mateo  $\bar{a}_r$  queda así perfectamente explicada.

Una partícula de masa se mueve en un sistema no inercial, como si además de las fuerzas reales estuvieran obrando en ella dos fuerzas ficticias, la fuerza de arrastre y la fuerza de Coriolis.

$$\bar{F}_a = -m\bar{a}_0$$

$$\bar{F}_c = -2m(\bar{w} \times \bar{V}_r)$$

#### LA CAIDA LIBRE

Supongo un sistema  $i, j, k$ , anclado a la tierra en la ciudad de México. El vector  $k$  señalando hacia el Zenit. El vector  $i$  señalando hacia el norte y en un plano horizontal,  $j$  horizontal y señalando hacia el oeste.  $\bar{w}$  es un vector constante. El eje instantáneo es siempre paralelo al eje polar de la tierra. Colocando a  $\bar{w}$  en el origen de  $i, j, k$ , queda colocado en el plano del meridiano, es decir, en el plano  $i, k$ .

El eje polar  $\bar{w}$  forma con el vector  $k$  un ángulo igual a la colatitud  $\theta$  ( $\theta = 90^\circ - \text{latitud}$ ).

La tierra gira en torno de su eje polar con una velocidad de una vuelta cada 24 horas. Su velocidad angular  $w$  es

$$w = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot \frac{1}{\text{seg}} = 7.272 \cdot 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$$

$$w = 7.2727 \cdot 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$$

En la caída libre, el fenómeno dura algunos segundos. En ese intervalo de tiempo, el movimiento de la tierra en la eclíptica es prácticamente rectilíneo y uniforme, su aceleración se puede despreciar.

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_0 + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r}$$

La derivada  $\frac{d\bar{w}}{dt} = 0$  porque  $\bar{w}$  es constante.

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_0 + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

La aceleración  $\bar{a}_0$  también es demasiado pequeña para tomar en cuenta con respecto a  $2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r)$ , aceleración de Coriolis.

El módulo de  $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$  es menor que  $\omega^2 r$  y como  $\omega = 7.272 \cdot 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$ ,  $\omega^2$  es muy pequeña en comparación de  $\omega$  y si  $r$  no es exageradamente grande, se puede despreciar a  $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$  también y la partícula se mueve como si obraran en ella únicamente su peso  $\bar{P}$  y la fuerza de Coriolis  $\bar{F}_c = -2(\bar{\omega} \times \bar{r})m$ .  $\bar{V}_r$  es un vector vertical hacia abajo.

$-2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r)$  es un vector dirigido hacia el oriente, porque  $\bar{\omega}$  y  $\bar{V}_r$  están en el plano del meridiano.  $\bar{F}_c = -2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r)m$  es una fuerza dirigida hacia el oriente. Un cuerpo que cae libremente en el vacío, es desviado hacia el oriente con una aceleración igual en valor absoluto a

$$2\omega V_r \sin(\bar{V}_r, \bar{\omega}) = 2\omega V_r \sin \theta$$

Si se le llama  $x$  a la desviación oriental.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2V_r \sin \theta$$

y como  $V_r = gt$  si el móvil empieza a caer en el tiempo  $t = 0$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\omega gt \sin \theta$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega g t^2 \sin \theta$$

$$x = \frac{\omega g \sin \theta}{3} t^3$$

Porque al empezar la caída  $x = 0$  o la desviación hacia el oriente de un móvil en caída libre es:

$$x = \frac{\omega g \sin \theta}{3} t^3$$

Si  $h$  es la altura de la cual cae un móvil es:

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$x = \frac{\omega g \sin \theta}{3} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} \omega \sin \theta$$

Desviación oriental de un móvil en caída libre. En el caso de México la latitud es de  $19^\circ 24'$ . La Colatitud es igual a  $70^\circ 36'$  y  $g = 978 \text{ cm/seg}^2$ .

Para un móvil que ha caído  $h \text{ cm}$ , la desviación hacia el oriente en México es:

$$x = 2.068 \cdot 10^{-6} \cdot h^{\frac{3}{2}} \text{ cm. } x = 2.068 \cdot 10^{-6} \sqrt{h^3}$$

Si el móvil ha caído 1000m, la desviación es:

$$x = 65.39 \text{ cm.}$$

# SECCION DE CIENCIAS EXACTAS

## Las Geodésicas

Por Carlos Graef,

Profesor de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

### 1. PARTE

#### 1)—DEFINICION

Dos puntos de una superficie se pueden ligar por muchos arcos contenidos totalmente en la superficie. Al arco de longitud mínima se le llama geodésica.

En una superficie convexa perfectamente lisa, se fijan dos clavos en dos puntos cualesquiera. (Fig. 1). A uno de los clavos, se ata el extremo de una soga flexible pero inextensible. El otro extremo se dobla en torno del otro clavo. Si se ejerce una tensión considerable en este segundo extremo, la soga se acomoda a lo largo de la geodésica que liga a ambos clavos.



Fig. 1

Las geodésicas en el plano son líneas rectas; en las superficies curvas son, en general, curvas alabeadas; es decir, curvas que no están totalmente contenidas en un plano.

#### 2)—EL PLANO OSCULADOR DE UNA CURVA ALABEADA

AB es un arco de una curva alabeada. (Fig. 2). F es un punto fijo en esa curva; t es la tangente en F. Considero otro punto M cercano a F. M es punto móvil; la

curva es su carril, s es la tangente en M. P es un plano apoyado en t y paralelo a s. Si M se mueve en la curva, la tangente s cambia de dirección. El plano P, obligado a ser paralelo a s, y a estar apoyado en t, gira en torno de t como eje, pasando siempre por F. Si M se acerca a F, el plano P gira en torno de la recta fija t, conservándose

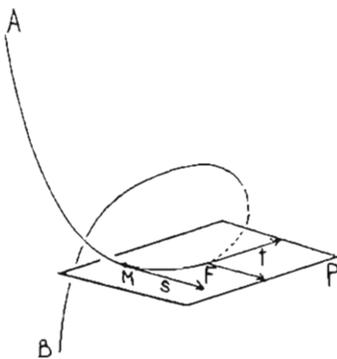


Fig. 2.

siempre paralelo a s, hasta llegar a una posición límite P', cuando M llega a F. Esa posición límite P' del plano P, se llama plano osculador de la curva en F. El plano P' oscula, es decir besa, a la curva en F. El plano P' es el que tiene el contacto más íntimo con la curva en F. Cuando M, en su movimiento hacia F, está ya muy cerca de éste, las tangentes s y t son casi coplanas; s está entonces casi colocada en el plano osculador.

El plano osculador a una curva plana, es el plano de la curva.

Considero una superficie curva, y en ella un punto P. (Fig. 3).

Corto a esa superficie con un plano  $\pi$  colocado a muy corta distancia de P, y paralelo al plano tangente a la superficie en P. La intersección de la superficie S y del plano  $\pi$  es el contorno C. El plano  $\pi$  es el plano osculador de C, en todos los puntos de este contorno.

Si se coloca un observador a bastante distancia de la superficie, el plano  $\pi$  parece ser el plano tangente a la superficie en P.

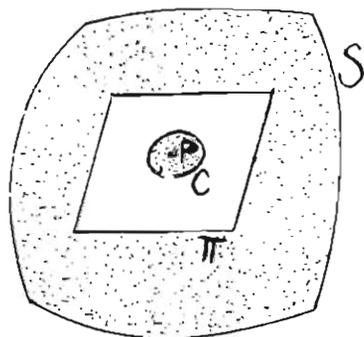


Fig. 3.

### 3) — EL PLANO OSCULADOR DE UNA GEODÉSICA

(Fig. 4). **AB** es un pequeño tramo de sogá, que está tendida, a lo largo de una geodésica, entre dos clavos fijados en una superficie convexa, perfectamente lisa. **AB** es entonces un pequeño tramo de geodésica.

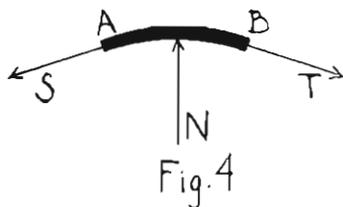


Fig. 4

En **AB** están aplicadas tres fuerzas. Las tensiones **S** y **T** en **A** y en **B**, y la reacción normal de la superficie, que designo con **N**. La superficie no ejerce una reacción tangencial en **AB**, porque es perfectamente lisa, y la sogá resbala sin fricción sobre de ella. Como el tramo **AB** está en reposo después de que se acomoda la sogá, el sistema de fuerzas que obra en él, está en equilibrio. Para que tres fuerzas estén en equilibrio se necesita que sean coplanas. Las tensiones **S** y **T** son tangentes a la geodésica en **A** y **B**, porque la sogá es flexible, y por eso solamente susceptible de transmitir tensiones tangenciales. **S**, **T** y **N** son coplanas. Si el tramo de sogá **AB** es muy pequeño, **S** y **T** están casi colocadas en el plano osculador de la geodésica en **A**. **N**, que es normal a la superficie, también debe estar casi colocada en ese plano. El plano osculador a una geodésica en un punto contiene a la normal a la superficie en ese punto. Expresado de otro modo: El plano osculador de una geodésica en un punto, es normal a la superficie en ese mismo punto.

Hay que hacer notar (Fig. 4), que **N** es la resultante de las reacciones normales de la superficie en todos los puntos de **AB**, y que por eso debe escogerse éste lo suficientemente pequeño, para que las normales a la superficie en todos los puntos del arco **AB**, se puedan considerar como paralelas, y la resultante **N**, por lo tanto, como normal a la superficie en el punto en que su línea de acción corte a ésta. Si **A** y **B** están muy cerca uno del otro, **S**, **T** y **N** están casi en el plano osculador en **A**; y **N** se puede considerar como aproximadamente paralela a la normal en **A**.

### 4) — IMPRESION QUE CAUSAN LAS GEODÉSICAS

El ilustre matemático Sotero Prieto, decía que a él le causaban las geodésicas la impresión de estar montadas en la superficie, por tener su plano osculador, en cada punto normal, a la superficie en que están trazadas. Compárese la impresión que causan las curvas de las figuras 1, 10, 12, 13, 14 y 15 que son geodésicas, con la que producen las curvas de las figuras 3 y 11 que no lo son.

### 5) — PROPIEDADES DEL MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN

Hay una propiedad de las geodésicas semejante a una propiedad del mínimo de una función. No intento demostrar aquí esa propiedad, pero sí la enunció y la aclaro por medio de una comparación.

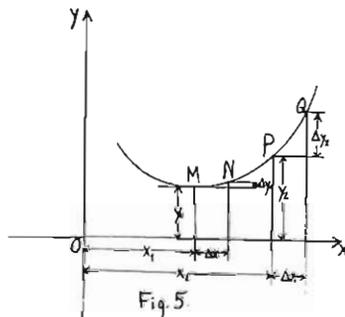


Fig. 5

(Fig. 5). **M** es un punto de ordenada mínima. **P** es otro punto cualquiera de la curva, cercano a **M**.  $x_1$  y  $y_1$  son las coordenadas de **M**.  $x_2$  y  $y_2$  son las coordenadas de **P**.  $\Delta x$  es un segmento pequeño, que utilizo como incremento de  $x_1$  y de  $x_2$ . Si a  $x_1$  le doy el incremento  $\Delta x$  obtengo la abscisa  $x_1 + \Delta x$  del punto **N**. La ordenada  $y_1$  adquiere el incremento  $\Delta y_1$ .  $x_1 + \Delta x$  y  $y_1 + \Delta y_1$  son las coordenadas de **N**. Si a  $x_1$  le doy el incremento  $\Delta x$  obtengo la abscisa  $x_2 + \Delta x$  del punto **Q**. La ordenada  $y_2$  adquiere el incremento  $\Delta y_2$ .

$x_2 + \Delta x$  y  $y_2 + \Delta y_2$  son las coordenadas del punto **Q**. Un teorema muy conocido del cálculo diferencial es el siguiente: (Fig. 5).

Si la curva es regular en un intervalo en que estén comprendidas  $M, N, P$  y  $Q$  entonces siempre se puede determinar un número positivo  $\epsilon$  tal, que para cada  $|\Delta x| < \epsilon$ ,  $|\Delta y_1| < |\Delta y_2|$ .

Hablando en términos menos técnicos:

Para iguales y muy pequeños incrementos de la abscisa, la ordenada mínima varía mucho menos, que la ordenada de un punto vecino cualquiera. En la figura esto salta a la vista.

Una curva regular es, en lenguaje común, una curva sin picos y sin interrupciones. Si la curva no es regular en el intervalo, la proposición enunciada en el teorema no se realiza siempre, como se ve en la figura 6.

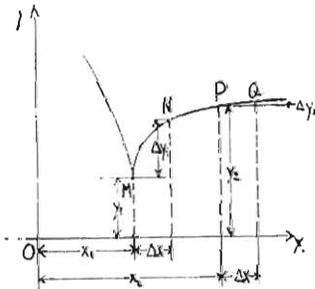


Fig. 6.

Una curva regular es la representación gráfica de una función continua provista de derivada. La propiedad de la ordenada mínima de los puntos de una curva se puede enunciar como propiedad del valor mínimo de una función, de la manera siguiente:

Si una función  $f(x)$  es continua en el intervalo  $a \leq x \leq b$  y si posee derivada para todos los valores de  $x$  de ese intervalo, y si además  $f(c)$  es el único valor mínimo de  $f(x)$  en el intervalo,  $a < c < b$ , y si por último  $f(x)$  no tiene máximos en ese intervalo, entonces siempre es posible determinar una cantidad positiva  $\epsilon$  tal que  $|f(c + \Delta x) - f(c)| < \epsilon$  y  $|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$  para todos los valores de  $|\Delta x| < \epsilon$  y  $a < x < b$ ,  $x \neq c$ .

Si se sacrifica el rigor, se puede sustituir el enunciado por este otro más inteligible:

Para incrementos pequeños e iguales de la variable, una función varía mucho menos, cerca de un mínimo, que en la cercanía de otro valor cualquiera de la variable, que no corresponda ni a un máximo ni a un mínimo.

Esta propiedad del mínimo de una función, corresponde a una propiedad parecida de las geodésicas.

6) — UNA PROPIEDAD DE LAS GEODÉSICAS

$S$  es una superficie curva.  $A$  y  $B$  son dos puntos de  $S$ .  $G$  es la geodésica que liga  $A$  con  $B$ , o sea la línea de longitud mínima entre  $A$  y  $B$  a lo largo de la superficie.  $L$  es una línea cualquiera que une  $A$  con  $B$ . Considera que se disponga de una gran cantidad de discos circulares

de papel, todos ellos de radio  $r$ . Todos estos discos iguales los supongo de radio tan pequeño, que se puedan colocar en la superficie sin que se arruguen notablemente. A cada uno de estos discos lo designo con  $D$ . Se coloca un disco  $D$  con su centro en cada punto de  $G$ . Esto es prácticamente imposible, porque en  $G$  hay una infinidad

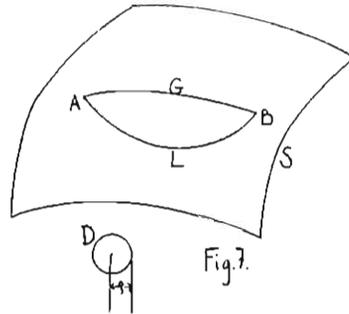


Fig. 7.

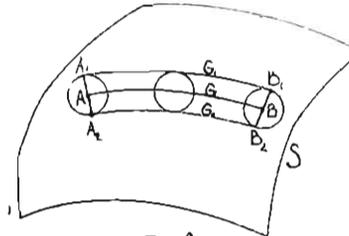


Fig. 8.

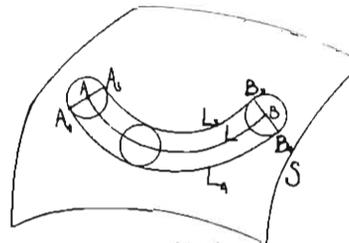


Fig. 9.

de puntos; pero basta colocar una gran cantidad de esos discos  $D$  con sus centros en  $G$ , a muy pequeños intervalos, de manera que tapicen una angosta faja de  $S$ . (Fig. 8). En el disco  $D$ , colocado con su centro en  $A$ , he trazado el diámetro  $A_1A_2$  perpendicular a la tangente a  $G$  en  $A$ . En el disco  $D$  colocado en  $B$ , he trazado el diámetro  $B_1B_2$  perpendicular a la tangente a  $G$  en  $B$ . La parte de la

superficie  $S$  tapizada por los discos está separada de la parte no cubierta por ellos, por los lados del cuadrilátero curvilíneo  $A_1B_1B_2A_1$ . Al lado  $A_1B_1$  le llamo  $G_1$ ; al lado  $A_2B_2$  lo designo con  $G_2$ . Todos los puntos de  $G_1$  distan de  $G$  un segmento  $r$ . Todos los puntos de  $G_2$  distan de  $G$  el mismo segmento  $r$ .

Repto la operación para la línea  $L$ . Coloco un enorme número de discos de papel  $D$  con sus centros colocados a pequeños intervalos en la línea  $L$ . Estos discos tapizan una parte de  $S$ . (Fig. 9). En el disco  $D$ , cuyo centro coloco en  $A$ , trazo el diámetro  $A_1A_2$  perpendicular a la tangente a  $L$  en  $A$ ; y en el disco, cuyo centro coloco en  $B$ , trazo  $B_1B_2$  diámetro perpendicular a la tangente a  $L$  en  $B$ . La parte de la superficie  $S$  tapizada por los discos cuyos centros están colocados en  $L$ , está separada de la parte libre, por el cuadrilátero curvilíneo  $A_1B_1B_2A_2$ . Al lado  $A_1B_1$  lo llamo  $L_1$ ; al lado  $A_2B_2$  lo designo con  $L_2$ . La distancia de cualquier punto de  $L_1$  a  $L$  es  $r$ ; la distancia de cualquier punto  $L_2$  a  $L$  es también  $r$ .

Insisto en que el radio  $r$  de los discos  $D$  ha de ser tan pequeño, que éstos no se arruguen notablemente al aplicarlos a la superficie.

Además, conviene recordar que los discos usados para formar la faja en torno de  $G$ , son todos iguales entre sí, e iguales a los que se utilizan para formar la faja en torno de  $L$ .

Siempre se puede determinar una cantidad positiva  $\epsilon$  tan pequeña, que para todas las colecciones de discos  $D$  de radio  $r < \epsilon$ ,  $|G_1 - G_2|$  y  $|L_1 - L_2|$  sean menores que  $|L_1 - L_2|$  y  $|L_1 - L_2|$ .

Hablando groseramente se puede decir: Siempre se pueden escoger los discos iguales tan pequeños, que las discrepancias de las longitudes de  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  sean extremadamente más pequeñas que las discrepancias entre las longitudes de  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ .



Fig. 10

Para que el enunciado anterior se verifique es necesario que la superficie  $S$  no tenga discontinuidades en la parte en que se opera.

#### 7) —TRAZO DE UNA GEODESICA POR MEDIO DE UN LISTON

Un listón es una faja rectangular de trapo. Uno de los lados del rectángulo es mucho mayor que el otro. A los dos lados mayores les llamo bordes del listón, y a la paralela equidistante de ambos, hilo central. Las longitudes de los dos bordes y del hilo central son iguales. Si coloco el hilo central de un listón encima de una geodésica en una superficie (Fig. 10), los dos bordes quedan colocados encima de dos líneas que difieren en longitud poquísimo de la longitud de la geodésica. Como las longitudes de los bordes son iguales a la del hilo central, este casi no se arruga.

Pero si coloco el hilo central encima de una línea que no sea geodésica en una superficie, los bordes quedan colocados en dos líneas que difieren notablemente en longitud de la longitud del hilo central, y el listón se arruga bastante (Fig. 11).



Fig. 11

Trazados dos puntos en una superficie, es fácil imaginar cómo queda un listón aplicado a esa superficie entre los dos puntos y colocado de manera que no se arrugue; el hilo central del listón es entonces con mucha aproximación una geodésica de esa superficie. Para aplicar el listón no es necesario operar exclusivamente en el lado convexo de una superficie.

#### 8) —TRAZO DE UNA GEODESICA POR MEDIO DE DOS RUEDAS FIJAS A UN EJE

Se pueden trazar las geodésicas en una superficie empleando un carrito (Figs. 12 y 13) de dos ruedas igua-



Fig. 12

les fijas a un eje, de manera que no pueda girar ninguna de ellas, sin que gire también la otra. Supongo que las ruedas son pequeñas, como las del carro de las figuras 12 y 13. La distancia de las dos ruedas debe ser tan peque-



Fig. 13

ña como el ancho del listón en el ejemplo anterior, o como el diámetro de los discos  $D$  del 6. Si este carrito se hace rodar en una superficie, las dos ruedas trazan dos líneas de longitudes iguales. La línea equidistante de los dos carriles de las ruedas, es una geodésica de la superficie.

### 9) — LAS GEODESICAS EN LOS POLIEDROS

Si en un poliedro se coloca un listón con su hilo central entre dos puntos de una misma cara, y de manera que no se arrugue, este hilo central se acomoda a lo lar-



Fig. 14

go de una línea recta. Pero si un punto está en una cara, y el otro en una de las caras contiguas, el listón consta de dos tramos rectilíneos formando una poligonal de dos lados. (Fig. 14).

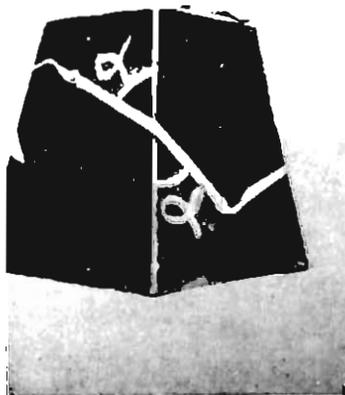


Fig. 15

Es casi evidente que los dos lados de la poligonal forman ángulos iguales con la arista que separa a las caras contiguas. Porque si por un momento imaginamos que una de las caras del poliedro gira en torno de la arista común, hasta colocarse en el plano de la otra, y si entonces se tienen los dos puntos dados con un listón, éste queda colocado en el plano de la cara fija y con su hilo central a lo largo de la recta que une los dos puntos; el hilo central corta en esa posición a la arista bajo dos ángulos iguales, opuestos por el vértice. Ahora regresamos la cara móvil a su posición inicial, arrastrando con ella al listón.

En este movimiento, ninguna línea de la superficie

altera su longitud. Los ángulos que forman las dos partes del hilo central del listón con la arista en las dos caras, son iguales, antes de iniciarse el movimiento; y siguen siéndolo durante éste, y en la posición final. Las geodésicas en los poliedros cortan a las aristas bajo ángulos iguales. (Fig. 15).

Las hábiles dependientes de las dulcerías colocan el listón con el que amarran las cajas de los chocolates a lo largo de geodésicas. El listón jamás presenta arrugas en las aristas de la caja.

En la segunda parte de este artículo presentaré las ecuaciones de las geodésicas.

---

## El Espacio de Cuatro Dimensiones

Por el Prof. Carlos Graef

Los espacios de más de tres dimensiones tienen para un principiante de las Matemáticas, apasionado por su ciencia, un singular atractivo, un sabor de misterio.

Vivimos en un espacio de tres dimensiones y, al oír hablar por primera vez de espacios de 4, 5, 6 y más dimensiones, soñamos con formas exóticas, con figuras fantásticas, con regiones pobladas en entes extraños.

Pensamos que los matemáticos que trabajan en esos misteriosos hiperespacios están dotados de facultades mentales de particular especie, que los capacitan para imaginarse los entes que poblan esos campos inaccesibles a los otros hombres.

Es enormemente más rico en formas el espacio de tres dimensiones, que el plano. Las curvas en el espacio de tres dimensiones forman nudos, se tuercen, tienen formas caprichosas que las pobres curvas planas les envidian, sin poder imitarlas.

Soñamos entonces que los entes de un espacio de cuatro dimensiones son más variados todavía, más extraños, más complicados, más sorprendentes.

Yo soy un fanático de las Matemáticas. Hace años vi en el estante de una librería una obra en dos tomos sobre la geometría de cuatro dimensiones. La tomé para acercarla con la veneración con la que un egiptólogo sostiene un papiro que no ha descifrado, con la sensación de un alpinista ante una montaña que no ha podido escalar, con la turbación de un Don Juan ante una hermosa que todavía no es suya.

Al penetrar en esa rara geometría, ávido de exóticas aventuras mentales, con temor de no poder seguir con la imaginación las audaces construcciones, el estudiante, amante de las Matemáticas, recibe una decepción muy triste. Esa decepción es la que quiero provocar en los lectores de este artículo, que no hayan penetrado todavía en los hiperespacios y que amen a las Matemáticas. Quiero decepcionarlos, para ayudarlos después a salir de el estado de ánimo que originan las primeras noticias concretas de los espacios de más de tres dimensiones.

\*\*\*

Los espiritistas poblaron en el siglo pasado al espacio de cuatro dimensiones con espíritus chocarreros y también con espíritus serios. Fue este espacio el refugio de los entes alternativamente perceptibles y no perceptibles.

Que cosa más cómoda, que hacerlos habitar en un espacio de cuatro dimensiones; podían así entrar

y salir al nuestro de tres, siendo alternativamente visibles e invisibles para nosotros.

\*\*\*

A fines del siglo pasado, se presentó en las universidades europeas un prestidigitador norteamericano, que sorprendió a los profesores de Matemáticas y Física.

Colocaba este habilísimo y admirable pilla, sobre una mesa una esfera hueca de lámina, sin ninguna apertura notoria y junto a ella un cubo de madera. Cubría ambos objetos con una manta. Introducía las manos entre la manta y la mesa. Cerraba los ojos, fruncía el entrecejo, y al quitar la manta, el cubo de madera había desaparecido. Con una tijera para lámina se abría la esfera y dentro de ella aparecía el cubo de madera.

Antes del experimento, los profesores tenían la precaución de pesar la esfera hueca. Después de éste, se pesaron los pedazos de la misma y no se encontró ninguna diferencia de pesos. El mago explicaba el fenómeno, afirmando que él sacaba el cubo de nuestro espacio de tres dimensiones y que por una trayectoria no imaginable para nosotros y localizada en el espacio de cuatro dimensiones, introducía al cubo en la esfera hueca, totalmente cerrada. Pasaron meses, después de los primeros experimentos, hasta que se logró desenmascarar al embaucador. El prestidigitador era muy hábil en el manejo de sus manos en el espacio de tres dimensiones, pero claro que no tenía acceso al de cuatro.

En la Ciudad de México, vive actualmente (calle de Bucareli 128) un astrólogo, H. N. Darius, que afirma que es el único hombre que tiene facultades para salirse al espacio de cuatro dimensiones. Desde allí ve a nuestro espacio, como nosotros vemos a un plano. Es capaz de reconciliar a amantes disgustados, de dar consejo, con éxito, a comerciantes apurados, de solucionar desavenencias familiares, gracias a su acceso al hiperespacio.

El espacio de cuatro dimensiones de los matemáticos, no es un nido de espíritus, ni viven en él los consejeros del astrólogo Darius; es, por desgracia, un ente aritmético inhabitable, como los números.

Me voy a referir, en lo que sigue, casi exclusivamente a los espacios más sencillos, a los llamados espacios euclídeos.

### EL ESPACIO EUCLIDEO DE UNA DIMENSION

Es posible hacer corresponder a cada punto de una recta, un número. Para lograr esta correspondencia, hay que elegir en la recta, un punto arbitra-

vio, al que se llama origen. Además es necesario escoger en la recta un sentido positivo. Es indispensable convenir también en la unidad de longitud, que es un segmento de recta al arbitrio del investigador.  $r$  es la recta en la que se pretende hacer corresponder números a los puntos.

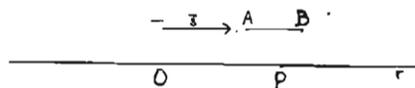


Fig. 1.

$O$  es el punto arbitrario escogido como origen.  $AB$  es el segmento que se eligió como unidad de longitud.

$\bar{s}$  indica el sentido positivo convenido.

A cualquier punto  $P$  de la recta  $r$  se le hace corresponder la longitud del segmento  $OP$ , medida con la unidad  $AB$ . Si al recorrer el segmento  $OP$  de  $O$  a  $P$ , se barre a éste en el sentido que indica  $\bar{s}$ , entonces se le asigna a  $P$  el número positivo que mide la longitud de  $OP$  en unidades  $AB$ . Pero si al recorrer el segmento  $OP$  de  $O$  a  $P$ , se barre a éste en sentido contrario al que indica  $\bar{s}$ , entonces se le asigna a  $P$  el número negativo que es igual en valor absoluto a la longitud de  $OP$  medida en unidades  $AB$ . Con esta convención, se le puede hacer corresponder a cada punto de una recta un número. El número se llama abscisa del punto. A un lado del origen están colocados los puntos correspondientes a números positivos, al otro lado los correspondientes a números negativos. Dado un número real cualquiera, le corresponde a este número un solo punto de la recta.

Aunque parece pedantería insistir en que a cada punto de la recta le corresponde un número y a cada número un punto de la recta, está muy lejos de ser una de las dos correspondencias, consecuencia de la otra.

Supongo que tengo una colección de 40 objetos. 10 de ellos son azules, 10 blancos, 10 rojos y 10 verdes. A cada uno de los objetos de esa colección de 40 le corresponde un color. Dado un objeto, se puede decir si es azul, blanco, rojo o verde. Pero si se indica un color, no corresponde a ése un solo objeto. Al rojo corresponden 10 objetos, al blanco otros 10. A cada objeto corresponde un color, pero a cada color no le corresponde un solo objeto bien determinado.

En algunas prisiones se acostumbra numerar a los presos. Esta numeración consiste en hacer corresponder a cada preso un número. Siempre se efectúa la correspondencia de modo que a cada preso le corresponde un número y a cada número un solo preso.

A los presos se les llama siempre por su número. Cuando en alguna de esas prisiones se dice: "el 24

trató de evadirse", claro es que no se refiere este enunciado al número 24, sino al preso que le corresponde el número 24. Pero como sólo corresponde un prisionero al número 24, está éste perfectamente determinado, indicando su número.

Hay autores de novelas sensacionales, que se aprovechan de la impresión que causa al gran público la aparente identificación de un hombre con un número y que bautizan sus obras con títulos como El Legionario 5378. El Prisionero 13.

La correspondencia entre un grupo de prisioneros y la colección de números que se usa para designarlos, es semejante a la correspondencia de los puntos de una recta y los números reales.

Las dos correspondencias son biunívocas. Dos colecciones están en correspondencia biunívoca, si cada elemento de la primera colección le corresponde uno sólo de la segunda y a cada uno de la segunda, le corresponde uno sólo de la primera.

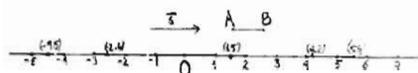


Fig. 2.

En la Fig. 2, he marcado algunos puntos con su número correspondiente. Es ahora costumbre entre los matemáticos el identificar a los puntos con su número correspondiente. Dicen p. e.:— La distancia entre 9 y 14 es 5, en vez de decir: La distancia entre los puntos correspondientes a 9 y a 14 es de 5 unidades longitud. Lo que en un principio fué descuido en el lenguaje, se convirtió después en un cambio de conceptos. Los conceptos geométricos de punto y recta fueron expulsados de las Matemáticas modernas, por los rigeristas exaltados. Se evitaron así los choques con los filósofos. El punto y la recta se definen ahora como entes aritméticos.

Considero una variable independiente  $x$ , completamente libre, que varía desde menos infinito hasta más infinito. A cada valor de  $x$  le corresponde un punto en una recta. A todos los valores que es capaz de adquirir  $x$  le corresponden todos los puntos de la recta.

Una recta es el conjunto de valores que adquiere una variable independiente. Cada valor particular de la variable es un punto de esa recta. Estas dos definiciones son puramente aritméticas, de las que emocionan a los rigoristas.

Supongo que (a) y (b) son dos valores particulares de  $x$ . La distancia entre (a) y (b) es (a)—(b); por definición.

A una recta se le llama también Espacio Euclideo de una Dimensión.

## EL ESPACIO EUCLIDEO DE DOS DIMENSIONES

Es posible hacer corresponder a cada punto de un plano una pareja de números. Para efectuar esta correspondencia se trazan en el plano dos rectas perpendiculares a las que se les llama ejes.

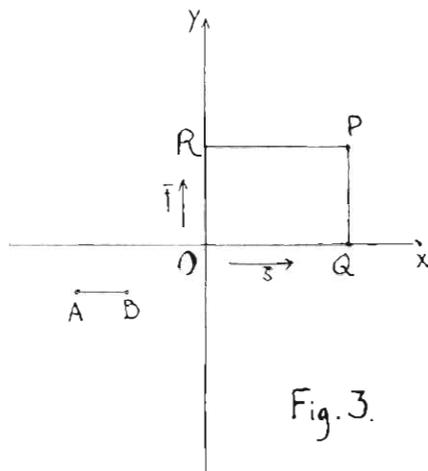


Fig. 3.

El punto de intersección de los dos ejes, se elige para origen en ambas rectas. Un segmento  $AB$ , arbitrario se utiliza para unidad de longitud. En cada eje se marca el sentido positivo. A uno de los ejes se le llama eje de las equis o eje de las abscisas, al otro, eje de las ordenadas o de las yes. (Es rutinario designar a la letra  $y$  con el nombre de *ye*, entre los profesores de Matemáticas de México).

A cada punto del eje de las abscisas se le puede hacer corresponder un número, único y bien determinado; ese número es la abscisa del punto. A cada punto del eje de las ordenadas, se le puede hacer corresponder un número biunívocamente; ese número es la ordenada del punto. Para asignarle a un punto  $P$  cualquiera del plano, una pareja de números, se trazan por  $P$  rectas paralelas a los ejes hasta que corten a éstos.

La paralela al eje de las *yes* (Fig. 3) corta al eje de las *x* en el punto  $Q$ . La abscisa de  $Q$  es uno de los números que se le asignan a  $P$  y se llama también abscisa de  $P$ . La paralela al eje de las *x* corta al eje de las *yes* en el punto  $R$ . La ordenada de  $R$  es el segundo número que se hace corresponder a  $P$ . A esta ordenada de  $R$  se le llama también ordenada de  $P$ . Al punto  $P$  se corresponden dos números, la abscisa de  $Q$  y la ordenada de  $R$ , que son respectivamente la abscisa y la ordenada de  $P$ .

Se utiliza el nombre de coordenadas para referirse a la abscisa y a la ordenada de un punto.

A cada punto de un plano le corresponde una sola pareja de números, sus 2 coordenadas. A cada pareja de números le corresponde un solo punto del plano.

La pareja de números correspondiente a un punto se encierra en un paréntesis redondo, que se coloca después de la letra con que se designa a ese punto. Primero se escribe la abscisa y luego la ordenada. Con  $A(3, 5)$  se designa al punto  $A$ , de abscisa 3 y ordenada 5. En la Fig. 4 he marcado algunos puntos anotando al lado de cada uno, la pareja de números correspondiente.

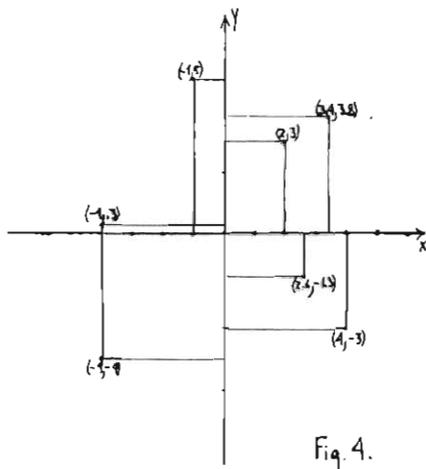


Fig. 4.

De un modo riguroso debería decirse: "el punto correspondiente a la pareja de números  $(3, 5)$ "; pero se acostumbra decir el punto  $(3, 5)$ . A la pareja de dos números se le identifica con el punto. En un principio quizás por pereza, más después con toda intención. Un punto en un plano es una pareja de números.

Designo con  $x$  y a dos variables susceptibles de adquirir todos los valores posibles, es decir, completamente independientes. Formo con los valores de  $x$  y  $y$  todas las parejas imaginables. A cada una de las parejas de valores de  $x$  y  $y$  le corresponde un punto del plano; a todas las parejas posibles les corresponden todos los puntos del plano. Si se identifica la pareja de dos números con el punto, se puede decir: —Un plano es el conjunto de parejas de valores que adquieren dos variables independientes. —Una pareja de números cualquiera, es un punto del plano. —Al plano se le llama también espacio Euclideo de dos dimensiones.

## EL ESPACIO EUCLIDEO DE TRES DIMENSIONES

En el espacio en que vivimos, es posible asignarle a cada punto una terna de números, de una manera biunívoca. Para lograr esta correspondencia, se traza por un punto cualquiera, tres rectas perpendiculares, que se llaman ejes coordenados. Cada eje debe ser perpendicular a los otros dos. El punto común de los tres, se designa con el nombre de origen. En cada eje se marca un sentido positivo. Se elige una unidad de longitud; cualquier segmento de recta puede servir para ésto.

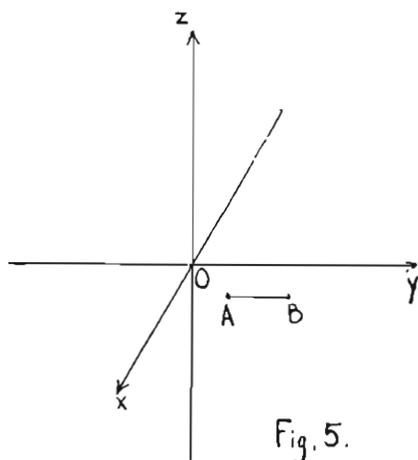


Fig. 5.

La (Fig. 5), aunque plana, provoca en el que la contempla, la misma impresión que tres rectas perpendiculares en el espacio, apoyadas en el punto **O** (Origen). En cada eje se le puede hacer corresponder un número a cada punto. A uno de los ejes se le llama eje de las equis o de las abscisas; a otro, eje de las yes o de las ordenadas, y al tercero, eje de las zetas o de las cotas. Al número correspondiente a un punto del eje de las equis, se le llama abscisa del mismo; al número correspondiente a un punto del eje de las yes, se le llama ordenada de ese punto, y al número correspondiente a un punto del eje de las zetas, se le designa con el nombre de cota de ese punto.

Para hacer corresponder a un punto **P** del espacio, una terna de números, se apoyan en ese punto tres planos perpendiculares a los ejes.

El plano  $\pi_1$  es perpendicular al eje de las equis y está apoyada en **P**;  $\pi_2$  es un plano también apoyado en **P** y perpendicularmente al eje de las yes.  $\pi_3$  por último, es un plano, que pasa por **P** y es perpendicular al eje de las zetas.  $\pi_1$  corta al eje de las equis en **Q**.  $\pi_2$  corta al eje de las yes en **R** y  $\pi_3$  corta al eje de las zetas en **S**.

La abscisa de **Q** es la abscisa de **P**. La ordenada de **R** es la ordenada de **P**. La cota de **S** es la cota de **P**.

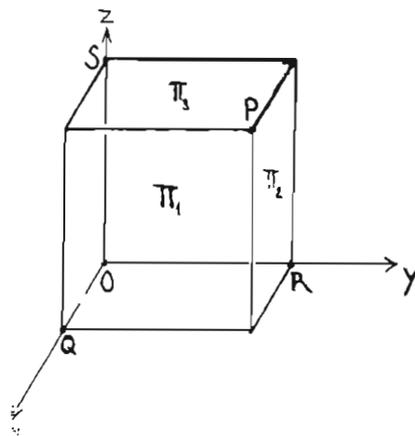


Fig. 6.

A **P** le corresponden tres números, su abscisa, su ordenada y su cota. Estos números son en ese orden, las longitudes de los segmentos **OQ**, **OR** y **OS** medidas con la unidad de longitud escogida.

Llamo **x** a la longitud de **OQ**, **y**, a la longitud de **OR** y **z** a la longitud de **OS** medidas con la unidad de longitud escogida.

Se acostumbra designar a un punto por medio de una letra seguida de los tres números que corresponden a ese punto. Se escribe primero el abscisa, después la ordenada **y**, por último, la cota. La abscisa, la ordenada y la cota, se designan con el nombre de coordenadas. Ahora ya ni se emplea la letra; la terna de números caracteriza totalmente al punto. Dada una terna  $(x_1, y_1, z_1)$  se obtiene el punto correspondiente, marcando primero en el eje de las equis un punto **Q** de abscisa  $x_1$ , en el eje de las yes, un punto **R** de ordenada  $y_1$ , y en el eje de las zetas, un punto **S** de cota  $z_1$ . Se apoya en **P** un plano perpendicular al eje de las equis, en **Q** un plano perpendicular al eje de las yes y en **S**, un plano perpendicular al eje de las zetas.

Esos planos son perpendiculares entre sí y los tres tienen un solo punto común. Ese punto común es el que corresponde a la terna  $(x_1, y_1, z_1)$ . A cada terna de números corresponde un punto del espacio y a cada punto del espacio le corresponde una terna de números. La correspondencia es biunívoca.

**x**, **y**, **z** son tres variables independientes. Puede adquirirse cada una de ellas todos los valores posibles. Forman todas las ternas de valores de **x**, **y**, **z** que se pueden formar. A cada terna le corresponde un punto del espacio; a todas las ternas posibles, todos los

puntos del espacio. Si se identifica una terna de números con un punto, se puede decir:

Espacio de tres dimensiones, es el conjunto de ternas de valores que adquieren tres variables independientes. Cada terna de números es un punto del espacio de tres dimensiones.

Con esta definición completamente aritmética de espacio, se evitan las matemáticas discusiones con los filósofos y con los físicos. Porque la existencia del espacio físico de tres dimensiones no le interesa al matemático; su espacio de tres dimensiones es un ente aritmético, no físico.

#### EL ESPACIO EUCLIDEO DE CUATRO DIMENSIONES

A un grupo de cuatro números se le llama una tétrada de números.

Al conjunto de tétradas de valores que adquieren cuatro variables independientes, se le designa con el nombre de espacio de cuatro dimensiones. Supóngase que esas variables son  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y  $u$ . Todas pueden adquirir todos los valores posibles. Asocio un valor de  $x$  con uno de  $y$ , uno de  $z$  y uno de  $u$ . Se forma así una tétrada. El conjunto de todas las tétradas posibles es el espacio de cuatro dimensiones. Es costumbre escribir los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $u$  en ese orden precisamente. El punto (5,1,2,3) es diferente del punto (5,1,3,2). Los cuatro números que definen a un punto, se llaman coordenadas de ese punto.

\* \* \*

Lo que decepciona en esta definición es que los puntos sean tétradas de números, entes aritméticos y no entes geométricos.

El espacio de cuatro dimensiones, es el conjunto de todas las tétradas de números posibles, no es una región misteriosa, rara, sólo accesible para ciertos investigadores, es un ente de la misma especie que el conjunto de los números pares, o que el conjunto de los números irracionales.

Quien se asusta por primera vez a esta geometría, entusiasmado, con ansias de imaginar nuevas formas, siente repulsión al primer contacto. La definición del hiperespacio repugna. Después se pierde poco a poco ese asco; pero no es la fuerza de la costumbre la que nos hace agradable lo que primero nos disgustaba. Al ver que la mayoría de los conceptos geométricos de los espacios de 1, 2 y 3 dimensiones tienen sus correspondientes en el espacio de 4, se siente, el que ama a las Matemáticas, reconciliado con este hiperespacio.

Voy a examinar el concepto de distancia entre dos puntos. En el espacio euclideo de una dimensión, la distancia entre los puntos  $P_1(x_1)$  y  $P_2(x_2)$  es:

$$d = \left| \sqrt{(X_2 - X_1)^2} \right|$$

En el espacio de dos dimensiones, la distancia entre los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  es:

$$d = \left| \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \right|$$

En el espacio de tres dimensiones, la distancia entre los puntos  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  es:

$$d = \left| \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \right|$$

No es difícil prever a qué expresión se le llamará distancia entre dos puntos en un espacio de cuatro dimensiones. La distancia entre  $P_1(x_1, y_1, z_1, u_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2, u_2)$  en el espacio euclideo de cuatro dimensiones es:

$$d = \left| \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 + (U_2 - U_1)^2} \right|$$

Examinó en seguida el concepto de línea recta en los espacios euclideos de 2, 3 y 4 dimensiones.

#### LA RECTA EN EL ESPACIO EUCLIDEO DE DOS DIMENSIONES

Con  $\lambda$  designo a una variable completamente independiente, puede adquirir todos los valores desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ . Con  $a$ ,  $b$  y  $\alpha$ ,  $\beta$  designo a 4 constantes arbitrarias.

$$X = a + \alpha \lambda$$

$$Y = b + \beta \lambda$$

Cuando  $\lambda$  varía desde  $-\infty$  a  $+\infty$ ,  $x$  y  $y$  adquieren una infinidad de valores. El conjunto de todas las parejas de valores de  $x$  y  $y$  que se obtiene, dándole a  $\lambda$  todos los valores posibles, se llama recta en un espacio de dos dimensiones. Cada valor de  $\lambda$  da origen a una pareja de valores. Fijándose solamente en esa recta, a cada punto de ella le corresponde un valor de  $\lambda$ . A todos los valores de  $\lambda$  corresponden todos los puntos de la recta.

#### LA RECTA EN UN ESPACIO EUCLIDEO DE TRES DIMENSIONES

Utilizo a  $\lambda$  otra vez, para variable independiente. Con  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , designo a 6 constantes arbitrarias.

$$X = a + \alpha \lambda$$

$$Y = b + \beta \lambda$$

$$Z = c + \gamma \lambda$$

A cada valor de  $\lambda$  corresponden un valor de  $x$ , un valor de  $y$  y un valor de  $z$ ; se puede expresar es-

to, diciendo que a cada valor de  $\lambda$  corresponde un punto en el espacio. A todos los valores de  $\gamma$  corresponde una infinidad de puntos del espacio; estos puntos están alineados.

Recta en un espacio de tres dimensiones es el conjunto de ternas de valores que adquieren las tres variables  $x, y, z$ , funciones lineales del parámetro variable  $\lambda$ .

#### LA RECTA EN EL ESPACIO EUCLIDEO DE CUATRO DIMENSIONES

Utilizo  $\lambda$  por última vez, para variable independiente; con  $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  designo a 8 constantes arbitrarias.

$$X = a + \alpha \lambda$$

$$Y = b + \beta \lambda$$

$$Z = c + \gamma \lambda$$

$$U = d + \delta \lambda$$

A cada valor particular de  $\lambda$  corresponde una tetrada de valores de  $x, y, z$  y  $u$ . A todos los valores posibles de  $\lambda$  corresponden una infinidad de tétradas de valores de  $x, y, z$  y  $u$ . Al conjunto de todas las tétradas de valores de  $x, y, z$  y  $u$  que se obtienen dando  $\lambda$  todos los valores posibles, se le llama recta en un espacio euclideo de 4 dimensiones.

• • •

Se han definido planos, curvas, superficies curvas y espacios curvos en el espacio de cuatro dimensiones. Se generalizaron los conceptos de curvatura, longitud de arco, perpendicularidad, para que fueran aplicables a los entes que pueblan el hiperespacio.

Lo más admirable del espacio de 4 dimensiones es que es indispensable para comprender la geometría del espacio de tres dimensiones en que vivimos; pues éste no es un simple espacio euclideo como se suponía antes; es ésta por lo menos la opinión de algunos físicos actuales.

Esa necesidad que tienen los físicos del espacio de cuatro dimensiones, para fundar su mecánica, es la que le ha dado al hiperespacio fama entre los profanos de las Matemáticas.

Después de estudiar las curvas, las superficies y los espacios colocados en el espacio de cuatro dimensiones, se ve que la posibilidad de este estudio, radica precisamente en la definición aritmética del mismo; que cualquier otra definición es inaceptable.

• • •

En el desarrollo de este estudio, insisto mucho en el adjetivo euclideo. Se llama espacio NO-euclideo de una dimensión, a una curva; espacio NO-euclideo de dos dimensiones a una superficie curva. En casi to-

dos los espacios NO-euclideos de tres dimensiones, es imposible mover a un cuerpo sin que se deforme.

Los matemáticos no se han conformado con las modestas cuatro dimensiones. Hilbert introdujo el espacio de un número infinito de dimensiones, el espacio funcional. En ese espacio, cada función de una variable independiente, está representada por un solo punto. La recta que une el origen con la función seno, es perpendicular a la recta que une el origen con la función coseno. Las concepciones, no por ser aritméticas, dejan de ser atrevidísimas, grandiosas. Son a prueba del más exigente rigor, los estudios hechos en ese espacio, tan rigurosos como los razonamientos de la teoría de los números.

Los matemáticos crean espacios de cualquier número de dimensiones a su antojo, euclideos, curvos, con propiedades singularísimas. Al matemático no le importan que esos espacios "no existan" para el físico. Da lástima ver, cómo estos últimos tienen que conformarse con lo que pueden observar.

El matemático crea espacios, crea geometrías, crea entes nuevos; en la posibilidad de estas creaciones está lo grandioso de las **MATEMÁTICAS**.

# El Principio de Hamilton

## 1). Hipótesis del principio de Hamilton.

Sea un sistema de  $n$  partículas:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n, \dots, p_n.$$

La masa de la partícula  $p_n$  es  $m_n$ .—Se elige un sistema de ejes coordenados. La partícula  $p_n$  tiene por coordenadas  $x_n, y_n, z_n$ .

El movimiento de las  $n$  partículas está restringido. Algunas de ellas están obligadas a permanecer en reposo, u otras se les prescriben trayectorias fijadas de antemano, y a otras más se les obliga a moverse en superficies determinadas.

En la figura 1 está representado un caso particular de un tal sistema de partículas.

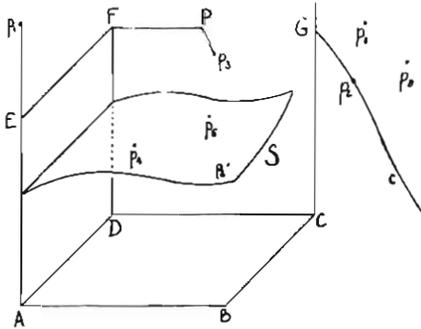


Fig. 1

ABCDEF G P es un armazón rígido sin masa, ligado firmemente a un sistema de ejes inercial. La partícula  $p_1$  está unida rigidamente por medio de una varilla al armazón. La partícula  $p_2$  se puede mover en la curva  $c$ , anclada al armazón inmóvil en  $G$ . La curva  $c$  es indeformable;  $p_2$  resbala libremente en  $c$ .  $p_3$  está unida por una varilla inflexible al punto  $P$  del armazón inmóvil, la varilla está articulada en  $P$ .  $p_3$  está obligada a moverse en una esfera de centro en  $P$  y que tiene por radio la longitud de la varilla; esa varilla no tiene masa.  $p_4$ ,  $p_5$  y  $p_6$  sólo se puede mover en la superficie  $S$ , fijada al armazón. La superficie  $S$  no tiene masa.  $p_1$  y  $p_6$  son partículas enteramente libres.

Al que le irrita mi insistencia en que el arma-

zón no tiene masa, puede sustituirlo en los razonamientos, por un sistema de varillas de masas pequeñas en comparación con las de  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_6$ . A la superficie  $S$  se le puede reemplazar por una lámina delgada de muy pequeña masa. Las condiciones fijadas para el sistema  $S$  son irrealizables: cualquier armazón tiene masa.

Es, empero, indispensable razonar con un sistema en esas condiciones, porque si se tiene en consideración la masa del armazón, los cálculos superan los recursos matemáticos actuales. Apenas si es posible establecer las ecuaciones de las trayectorias en el caso de dos partículas enteramente libres. En los casos de más de dos partículas, no es posible establecer de un modo general, las ecuaciones de las órbitas de las partículas, ni aunque todas sean libres. Las condiciones se pueden fijar de un modo riguroso, por medio de ecuaciones entre las coordenadas de las partículas. Si en el ejemplo anterior,  $S$  tiene por ecuación en el sistema de ejes coordenados elegido,  $f(x, y, z) = 0$ , las coordenadas de  $p_1, p_2$  y  $p_4$  satisfacen la ecuación de  $S$ , porque esas partículas no abandonan a  $S$ .

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0$$

$$f(x_2, y_2, z_2) = 0$$

$$f(x_4, y_4, z_4) = 0$$

En el mismo ejemplo se puede considerar a la curva  $c$  como intersección de dos superficies.

$$\psi(x, y, z) = 0 \text{ y}$$

$$\phi(x, y, z) = 0$$

Las coordenadas de  $p_2$  tienen que satisfacer ambas ecuaciones.

$$\psi(x_2, y_2, z_2) = 0$$

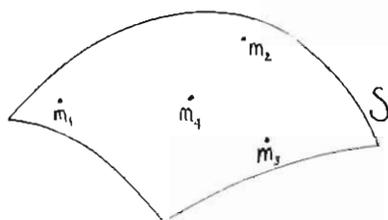
$$\phi(x_2, y_2, z_2) = 0$$

En general, en un sistema  $S$  cualquiera de  $n$  partículas  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , las ecuaciones de condición, son de la forma siguiente:

$$0 = C_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) \\ i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Esas  $m$  ecuaciones de condición, restringen el movimiento de las  $n$  partículas del sistema.

El sistema de partículas  $S$  se sumerge en un campo de fuerzas  $F$ , con potencial. En cada partícula obra una fuerza debida a ese campo, una segunda fuerza resultante de las atracciones de las otras partículas y una reacción del mecanismo que limita su movimiento. Ese mecanismo está anclado a un sistema de coordenadas inercial. En las partículas libres no obra ninguna reacción del mecanismo. Las restricciones que el mecanismo impone en una partícula, han de ser tales, que la reacción sea siempre normal a la trayectoria que describe esa partícula; esa reacción no debe trabajar. No se puede aceptar por eso un mecanismo como el que muestra la figura 2.



$S$  es una superficie sin masa, fijada a las partículas  $m_1, m_2$  y  $m_3$ .  $m_1$  es una partícula que se mueve en  $S$ , sin estar fija en un punto determinado de  $S$ . Si se arroja a  $S$  en un campo de fuerzas  $F$  con potencial, sin fijarla a un sistema inercial, la reacción que ejerce  $S$  en  $m_1$  trabajará en general. El mecanismo descrito es inadmisibile: no es compatible con la hipótesis enunciada más arriba.

Al calcular el trabajo total de las fuerzas, ya hay que tomar en consideración a las reacciones del mecanismo en cada partícula, porque estas fuerzas no trabajan.

## 2). El trabajo de las fuerzas que obran en el sistema.

En cada partícula obra una fuerza debida al campo  $F$ ; a esta se le designa con el nombre de fuerza exterior. Estudio el movimiento de la partícula  $p_h$  de masa  $m_h$ . Supongo el mecanismo que restringe el movimiento de las partículas, no es tal, que obligue a  $p_h$  a permanecer en una línea única.

El Principio de Hamilton precisamente caracteriza a las trayectorias que siguen las partículas urgidas por las fuerzas que obran en ellas, entre todas las trayectorias que podrían seguir dentro de las res-

tricciones que les impone el mecanismo a que están sujetas. Si una partícula está obligada por un mecanismo a permanecer en una línea fijada de antemano, no es posible decir nada más sobre su trayectoria, pues ésta está predeterminada.

Algunas de las partículas del sistema  $S$  son enteramente fijas, otras tienen sus trayectorias predeterminadas, pero para hacer el estudio, en general, prefiero utilizar una partícula  $p_h$  que no esté tan restringida en sus movimientos.

La partícula  $p_h$  tiene por coordenadas  $x_h, y_h$  y  $z_h$ , su masa es  $m_h$ . El campo de fuerzas exterior  $F$  tiene potencial. Supongo que el potencial de este campo de fuerzas  $F$  en el punto en que se encuentra la partícula  $p_h$  es  $P_h$ . La energía potencial exterior de esa partícula es

$$V_h^{\text{exterior}} = m_h P_h$$

Paralizo el movimiento de todas las partículas, aplicando a cada una de ellas una fuerza ajena al campo  $F$ , y precisamente la necesaria para mantenerla en equilibrio. Materialmente se puede lograr esto, fijando cada partícula con hilos al armazón rígido e inmóvil que soporta los mecanismos que restringen los movimientos de las partículas. Llamo  $S_0$  a una posición particular del sistema  $S$ .  $(Q_h)_0$  es el punto en que se encuentra la partícula  $p_h$  cuando  $S$  tiene la posición  $S_0$ . Supongo ahora que el sistema  $S$  pasa de la posición  $S_0$  a la  $S_1$ . La partícula  $p_h$  pasa entonces del punto  $(Q_h)_0$  al punto  $(Q_h)_1$ .

Para obligar al sistema  $S$  a pasar de la posición  $S_0$  a la posición  $S_1$  me valgo, si es necesario, de fuerzas ajenas a las que obran en las partículas debidas al campo  $F$  y al campo interior, que se forma por la presencia de las masas

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_{h-1}, m_{h+1}, m_{h+2}, \dots, m_n.$$

Al pasar  $S$  de la posición  $S_0$  a la  $S_1$  trabajan las fuerzas que obran en las partículas. Las fuerzas ajenas a los campos  $F$  e interior, también trabajan; pero me interesa únicamente el trabajo de las fuerzas del campo  $F$  y del campo interior.

La energía potencial exterior de la partícula  $p_h$  es  $(V_h^{\text{exterior}})_0$  en el sistema  $S_0$  y  $(V_h^{\text{exterior}})_1$  en el sistema  $S_1$ . El trabajo  $T_h$  de la fuerza con la que el campo exterior urge a esa partícula, cuando esta pasa de  $(Q_h)_0$  a  $(Q_h)_1$  es igual al decremento de su energía potencial

$$T_h^{\text{exterior}} = (V_h^{\text{exterior}})_0 - (V_h^{\text{exterior}})_1.$$

El trabajo total de las fuerzas debidas al campo F es:

$$\sum_1^n T_h^{\text{exterior}} = \sum_1^n (V_h^{\text{exterior}})_0 - \sum_1^n (V_h^{\text{exterior}})_1$$

Al trabajo total de las fuerzas de  $F \sum_1^n (T_h^{\text{exterior}})$  lo designo con  $T^{\text{exterior}}$ .

A  $\sum_1^n (V_h^{\text{exterior}})_0$  lo designo con  $(V^{\text{exterior}})_0$ ,  $\sum_1^n (V_h^{\text{exterior}})_1$  con  $(V^{\text{exterior}})_1$ .

Entonces:

$$T^{\text{exterior}} = (V^{\text{exterior}})_0 - (V^{\text{exterior}})_1$$

cuando S pasa de la posición  $S_0$  a la posición  $S_1$ .

Para evaluar la energía potencial interior  $V^{\text{interior}}$  del sistema S, designo a la distancia de la partícula  $pk$  a la partícula  $pk$  por  $r_{pk}$ . La energía potencial  $V^{\text{interior}}$  del sistema S es entonces igual a la suma de todos los productos  $C \frac{m_k m_l}{r_{kl}}$  (c constante).

$$V^{\text{interior}} = C \sum_1^n \sum_1^n \frac{m_k m_l}{r_{kl}}$$

El trabajo total  $T^{\text{interior}}$  que ejecutan las fuerzas interiores, cuando el sistema pasa de la posición  $S_0$  a la posición  $S_1$  es igual al decremento de su energía potencial interior.

$$T^{\text{interior}} = (V^{\text{interior}})_0 - (V^{\text{interior}})_1$$

Cuando S pasa de la posición  $S_0$  a la posición  $S_1$ , el trabajo total T que ejecutan las fuerzas del campo F y del campo interior es igual a

$$T = [(V^{\text{interior}})_0 + (V^{\text{exterior}})_0] - [(V^{\text{interior}})_1 + (V^{\text{exterior}})_1]$$

La suma de  $V^{\text{interior}}$  y  $V^{\text{exterior}}$  es la energía potencial total V del sistema.

$$T = V_0 - V_1$$

Las reacciones de los mecanismos que restringen los movimientos de las partículas, no trabajan: supongo que no hay fricción, es que ésta es despreciable, de manera, que las reacciones son normales a las trayectorias de las partículas. Para cualquier posición del sistema, S existe un potencial V perfectamente determinado.

Si el sistema S sumergido en el campo de fuerzas F, se abandona a sí mismo, sin agregar fuerzas ajenas a éste, las partículas se moverán rígidas únicamente por las fuerzas del campo F y del campo interior. Fijo mi atención en dos posiciones particulares del sistema S, la posición  $S_0$  y la posición  $S_1$ . A la posición  $S_0$  le llamo posición inicial, a la  $S_1$  posición final; esto no significa que el sistema haya ocupado cierto intervalo de tiempo la posición  $S_0$  y luego pase a la  $S_1$  para permanecer en ésta por otro intervalo más o menos largo, S pasa por  $S_0$  después de haber sido sumergido en el campo F y llega más tarde a  $S_1$ . Para pasar de la posición  $S_0$  a la  $S_1$  hay una infinidad de trayectorias posibles para las partículas, permitidas por los mecanismos que restringen sus movimientos. ¿En qué se distinguen las trayectorias que efectivamente siguen las partículas, de todas las otras trayectorias permitidas?

El principio de Hamilton contesta a esta pregunta.  $C_h$  es la trayectoria real de la partícula  $pk$ .

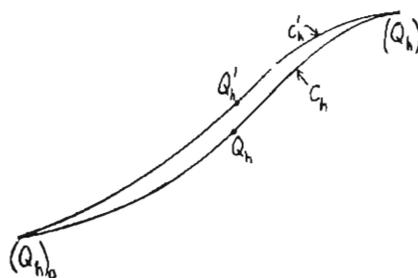


Fig. 3.

Considero otra trayectoria ficticia  $C'_h$ , vecina a la real  $C_h$ . Las coordenadas de  $Q_h$  son  $x_h, y_h, z_h$ ; estas tres variables son funciones del tiempo.

Supongo que S ocupa la posición  $S_0$  en el instante  $t_0$  y la posición  $S_1$  en el instante  $t_1$ .

A cada punto  $Q_h$  de la trayectoria real, hago corresponder uno  $Q'_h$  de la trayectoria ficticia.

La trayectoria ficticia está apoyada en  $Q_h0$  y en  $Q_h1$  que son los puntos en que se encuentra  $pk$  en las posiciones inicial y final de S.

Las coordenadas de  $Q'_h$  son  $x_h + \delta x_h, y_h + \delta y_h, z_h + \delta z_h$  son las variaciones de las coordenadas  $x_h, y_h, z_h$  v, por lo tanto, funciones del tiempo.

$$\left( \dot{x}_{n0}, \dot{y}_{n0}, \dot{z}_{n0} \right), \frac{d}{dt} (\dot{x}_{n0}), \frac{d}{dt} (\dot{y}_{n0}) \text{ y } \frac{d}{dt} (\dot{z}_{n0}).$$

supongo que son menores en valor absoluto que cierta cantidad  $\epsilon$  fijada de antemano para  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Para lograr caracterizar a la trayectoria real  $C_h$  entre las ficticias como  $C'_h$ , considero primero que  $p_h$  recorre la trayectoria  $C_h$  desde  $(Q_h)_0$  hasta  $(Q_h)_1$  en el intervalo de tiempo de  $t_0$  a  $t_1$ ; considero después que  $p_h$  recorre la trayectoria  $C'_h$  desde  $(Q_h)_0$  hasta  $(Q_h)_1$ , también en el intervalo de  $t_0$  a  $t_1$ . No son posibles esos dos movimientos simultáneamente.

Considero que el origen del tiempo es distinto en ambas experiencias, de manera que estas no se estorben. Dejo pasar a  $S$  de  $S_0$  a  $S_1$  abandonando al campo  $F$  y a su campo interior; las partículas recorren sus trayectorias reales.  $S$  adquiere la posición  $S_0$  en el tiempo  $t_0$  y la posición  $S_1$  en el tiempo  $t_1$ .

La segunda experiencia es ficticia, imaginaria. Supongo que el sistema  $S$  ocupa la posición  $S_0$  y obligo al cronómetro a marcar el instante  $t_0$ .

La partícula supongo que tiene en ese instante la velocidad, cuyas componentes son:

$$\left[ \frac{d}{dt} (x_h + \delta x_h) \right]_0, \left[ \frac{d}{dt} (y_h + \delta y_h) \right]_0, \left[ \frac{d}{dt} (z_h + \delta z_h) \right]_0$$

$p_h$  recorre la trayectoria ficticia  $C'_h$  y llega a  $(Q_h)_1$  en el instante  $t_1$ . Pasa por  $Q'_h$  en el instante  $t$ . En la experiencia real  $p_h$  pasa por  $Q_h$  en el instante  $t$ , en la experiencia ficticia está en ese instante en  $Q'_h$ .

Trato de investigar ahora qué es lo que distingue a las trayectorias reales de las ficticias. Cálculo para eso la variación de

$$\int_{t_0}^{t_1} V dt.$$

La integral de  $V dt$  desde  $t_0$  a  $t_1$  depende de las trayectorias que siguen las partículas, cuando  $S$  pasa de  $S_0$  a  $S_1$ . Si estas se mueven en sus trayectorias reales,  $V$  depende exclusivamente del tiempo. Dada un valor de  $t$ , están perfectamente determinados los puntos en los que se encuentran las partículas en ese instante, aunque el calculador no puede valorar las coordenadas de cada una de ellas. A cada valor de  $t$  corresponde un valor de  $V$ . Pero si ahora considero que las partículas  $p_h$  ( $h = 1, 2, 3, \dots, n$ ), en vez de recorrer sus trayectorias reales  $C_h$  recorre la trayectoria ficticia  $C'_h$ ,  $V$  tiene otros valores en cada ins-

tante  $t$ , que el caso anterior. Si  $S$  pasa de  $S_0$  a  $S_1$  recorriendo las partículas, sus trayectorias reales,  $V$  adquiere en cada instante un valor determinado. Si  $S$  pasa de  $S_0$  a  $S_1$  en una experiencia ficticia, recorriendo las partículas trayectorias imaginarias en el mismo intervalo de tiempo, de  $t_0$  a  $t_1$ ,  $V$  adquiere a cada instante un valor distinto del anterior. En el instante  $t$ , el sistema  $S$  tiene una energía potencial  $V$  cuando las partículas recorren las trayectorias reales  $C_h$ ; en el mismo instante  $t$ , el sistema  $S$  tiene una energía  $V + \delta V$  cuando las partículas recorren las trayectorias ficticias  $C'_h$ . Cálculo ahora  $\delta V$ .

Cuando  $p_h$  está en  $Q_h$  tiene una aceleración:

$$\bar{a} = \frac{d^2 x_h}{dt^2} i + \frac{d^2 y_h}{dt^2} j + \frac{d^2 z_h}{dt^2} k$$

En  $p_h$  está obrando una fuerza

$$\bar{f} = m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} i + m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} j + m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} k$$

$\delta V$  es el incremento en la energía potencial entre las posiciones  $S$  y  $S'$  del sistema. El incremento  $\delta V$  en la energía potencial, es igual a menos el trabajo que ejecutan las fuerzas que obran en las partículas al pasar el sistema de  $S$  a  $S'$ . Como en  $S$  y  $S'$  una misma partícula se encuentra en puntos muy cercanos, se puede escribir:

$$\delta V = -\sum_{h=1}^n \left[ m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} \delta x_h + m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} \delta y_h + m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} \delta z_h \right]$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} V dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta V dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} \delta x_h dt = \Delta \int_{t_0}^{t_1} \left( m_h \frac{dx_h}{dt} \delta x_h \right) - \int_{t_0}^{t_1} m_h$$

$$\frac{dx_h}{dt} \delta \left( \frac{dx_h}{dt} \right) dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} \delta x_h dt = -\frac{m_h}{2} \int_{t_0}^{t_1} \delta \left[ \left( \frac{dx_h}{dt} \right)^2 \right] dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta V dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} m_h \frac{v_h^2}{2} \left\{ \left( \frac{dx_h}{dt} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left( \frac{dy_h}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz_h}{dt} \right)^2 \right\} \right] dt$$

$$\left(\frac{dx_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_h}{dt}\right)^2 = V_h^2$$

Cuadrado de la velocidad de  $p_h$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta V dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_h \frac{1}{2} m_h V_h^2 \right) dt$$

A  $\sum \frac{1}{2} m_h V_h^2$  se le llama energía cinética del sistema S en el instante t. Se designa con L

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} V dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (L_1 - V_1) dt = 0$$

#### Principio de Hamilton

Helmholtz bautizó a la diferencia  $L-V$  con el nombre de **potencial cinético**.

El principio de Hamilton se enuncia entonces:  
—La variación de la integral del potencial cinético de un sistema de partículas por la diferencial del tiempo en un intervalo cualquiera, es nula para las trayectorias reales de las partículas. —Hamilton descubrió este principio en el año 1834.

## I. LAS DEFORMACIONES ELASTICAS

Por Carlos Graef

Prácticamente todos los cuerpos son deformables. Un cuerpo sujeto a la acción de fuerzas sufre deformaciones. Las partículas del cuerpo cambian sus posiciones relativas. Las deformaciones son funciones de los esfuerzos. Para estudiar los esfuerzos en el interior de un cuerpo es necesario analizar previamente las deformaciones.

Considero un prisma rectangular muy pequeño en el interior del cuerpo deformable (Véase la figura 1). Llamo P al centro de ese prisma. Trazo por P tres rectas paralelas a las aristas del prisma. Utilizo esas tres rectas perpendiculares como un sistema de ejes coordenados rectangulares con P como origen. Llamo A al punto en que el lado positivo del eje Px perfora la cara del prisma; y B y C respectivamente a los puntos en los que los lados positivos de los ejes Py y Pz perforan a otras dos caras.

Al vértice del prisma rectangular colocado en el primer octante del sistema de coordenados elegido lo llamo Q.

El prisma descrito se encuentra en el cuerpo antes de la deformación. Al aplicar fuerzas al cuerpo

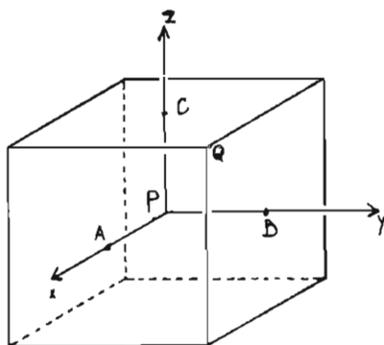


Figura 1.

el prisma rectangular se deforma. Si las longitudes de las aristas son pequeñas puede considerarse el prisma deformado como paralelepípedo rectilíneo. Las aristas del prisma deformado serán en general curvilíneas. Solo en el caso de ser pequeñísimo el prisma primitivo puede aceptarse como una primera aproximación que el deformado es un poliedro de caras planas y aristas rectilíneas. El sistema de tres ejes coordenados perpendiculares debe considerarse fijado al prisma. Por las mismas consideraciones

hechas antes se puede afirmar que los segmentos PA, PB y PC (Figura 1) de los ejes seguirán siendo muy aproximadamente rectilíneos. Los ángulos que forman dichos segmentos si dejarán de ser rectos, y la diferencia será bastante notable.

En la figura 2 se muestra el prisma rectangular de la figura 1 deformado. Utilizo acentos para distinguir a los puntos del prisma deformado de los puntos correspondientes del prisma primitivo.

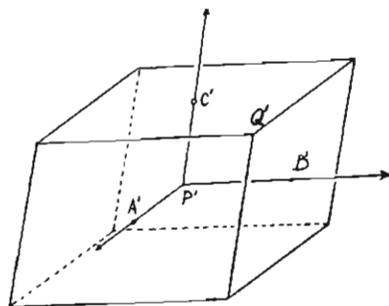


Figura 2.

Llamo la atención al lector una vez más en que el prisma considerado está en el interior de un cuerpo. La deformación del prisma se efectúa aplicando fuerzas al cuerpo provocando así un corrimiento de las partículas que lo forman. El prisma debe ser muy pequeño. Para poder expresar cuantitativamente las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones es necesario describir con toda precisión estas últimas. Describir con precisión es expresar numéricamente.

La descripción ha de ser de tal manera que sea sencillo determinar la deformación que sufre cualquier segmento de recta pequeño con un extremo en el punto P.

Se ha encontrado que la forma más sencilla de expresar la deformación consiste de 6 números tres de los cuales expresan las deformaciones de PA, PB y PC y los otros tres expresan las deformaciones que sufren los tres ángulos del sistema de ejes.

En la deformación PA se transforma en P'A'. Llamo  $\Delta$  al incremento que sufrió PA.  $\Delta$  puede ser positivo o negativo.

$$P'A' = PA + \Delta \quad (1)$$

Se ha observado experimentalmente que  $\Delta$  es proporcional a PA.

Conviene detallar lo que esto significa: Imagino en el cuerpo que sufre la deformación un segmento de la recta apoyada en P y en A. (Figura 3). Marco en ese segmento los puntos  $R_1, R_2, R_3, R_4$  y  $R_5$ , y  $PR_1$  debe ser pequeño. En la deformación el segmento  $PR_1$  se transforma en  $P'R'_1$ ,  $PR_2$  en  $P'R'_2$ , etc., etc.

Llamo  $\Delta_1$  al incremento que sufrió  $PR_1$ ,  $\Delta_2$  al incremento que sufrió  $PR_2$ , etc. Los segmentos grandes sufren incrementos grandes; los segmentos pequeños sufren incrementos pequeños. Los incremen-

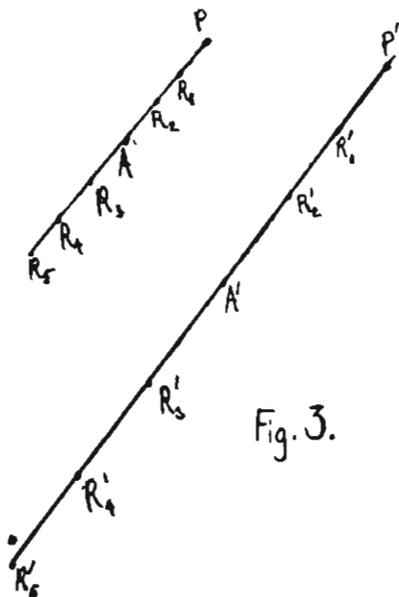


Fig. 3.

tos  $\Delta$  son rigurosamente proporcionales a los segmentos primitivos. La constante de proporcionalidad se llama  $S_x$ .

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= S_x PR_1 \\ \Delta_2 &= S_x PR_2 \\ \Delta_3 &= S_x PR_3 \\ \Delta_4 &= S_x PR_4 \\ \Delta_5 &= S_x PR_5 \\ \Delta &= S_x PA\end{aligned}\quad (2)$$

Cualquier segmento pequeño con un extremo en P y colocado a lo largo del eje de las egnis (Figura 1) sufre un incremento igual al producto de  $S_x$  por su longitud.

$$P'A' = PA + S_x PA. \quad (3)$$

$$PP'A' = PA (1 + S_x). \quad (4)$$

Las constantes de proporcionalidad en los otros dos ejes se llaman  $S_y$  y  $S_z$ .

$$P'B' = PB (1 + S_y). \quad (5)$$

$$P'C' = PC (1 + S_z). \quad (6)$$

Los tres números  $S_x, S_y, S_z$  describen parcialmente a la deformación en la vecindad de P. Se les llama los *estiramientos* según las direcciones  $PX, PY$  y  $PZ$ . La deformación completa no queda totalmente determinada por esos tres valores. Es necesario describir además numéricamente las alteraciones que sufren los ángulos rectos  $APB, BPC$  y  $CPA$ . Los nuevos ángulos  $A'P'B', B'P'C', y C'P'A'$  difieren poco de  $90^\circ$ . Llamo  $\epsilon_1$  al pequeño incremento que sufre el ángulo  $PBC$ ,  $\epsilon_2$  al pequeño incremento que sufre el ángulo  $CPA$  y  $\epsilon_3$  al pequeño incremento que sufre el ángulo  $APB$ . Entonces:

$$\text{ang. } B'P'C' = \text{ang. } BPC + \epsilon_1 = 90^\circ + \epsilon_1 \quad (7)$$

$$\text{ang. } C'P'A' = \text{ang. } CPA + \epsilon_2 = 90^\circ + \epsilon_2 \quad (8)$$

$$\text{ang. } A'P'B' = \text{ang. } APB + \epsilon_3 = 90^\circ + \epsilon_3 \quad (9)$$

Conviene que la deformación se caracterice por medio de números que tiendan a cero cuando la deformación es cada vez más insignificante; con otras palabras, conviene que los números que caractericen a la deformación sean tanto más pequeños, mientras menor sea esta, y que sean nulos cuando no haya deformación. Los tres números  $S_x, S_y$  y  $S_z$  satisfacen esas condiciones. Los cosenos de los tres ángulos  $B'P'C', C'P'A'$  y  $A'P'B'$  también cumplen con el requisito.

$$\text{Cos. } B'P'C' = \text{sen } \epsilon_1 \quad (10)$$

$$\text{Cos. } C'P'A' = \text{sen } \epsilon_2 \quad (11)$$

$$\text{Cos. } A'P'B' = \text{sen } \epsilon_3 \quad (12)$$

Cuando los incrementos que sufren los ángulos rectos son nulos es decir, cuando  $\epsilon_1, \epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  son nulos, entonces los tres cosenos mencionados son nulos. Mientras más pequeños sean los incrementos  $\epsilon_1, \epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  menores serán estos cosenos.

Los tres cosenos son los tres números más indicados para describir la deformación, además de los tres estiramientos.

Al coseno del ángulo  $B'P'C'$  se le llama  $\sigma_{11}$ . Los índices indican los ejes que forman el ángulo que al deformarse se convierte en el  $B'P'C'$ .

$$\text{Cos } B'P'C' = \sigma_{11} \quad (13)$$

de un modo análogo:

$$\text{Cos } C'P'A' = \sigma_{22} \quad (14)$$

$$\text{Cos } A'P'B' = \sigma_{33} \quad (15)$$

Los seis números:  $S_x, S_y, S_z, \sigma_{11}, \sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$  describen totalmente a la deformación. Esto significa que dados esos seis parámetros es posible calcular el esti-

ramiento de cualquier segmento pequeño con un extremo en P (Figura 1) y la alteración de cualquier ángulo de vértice en P en la deformación descrita por los seis datos.

Demuestro en seguida esta afirmación. Considero por lo pronto un ángulo recto de vértice en P. (Figura 4).

$$\text{áng. RPT} = 90^\circ$$

PR y PT pequeños

$$PR = r, PT = t$$

Para poder contestar a la pregunta: cuanto vale el estiramiento en las direcciones PR y PT, hay que indicar esas dos direcciones. Una dirección en el espacio se caracteriza por sus tres cosenos directores.

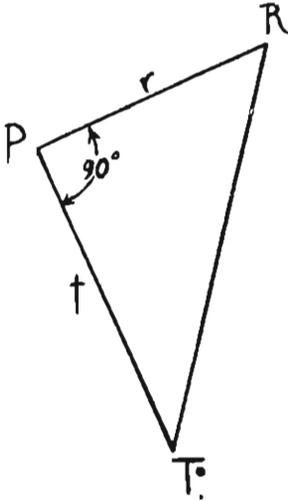


Figura 4.

En la figura 5 se muestra la posición de PR dentro del prisma rectangular de la figura 1. Llamo  $\alpha_1$  al ángulo que forma PR con el eje de las equis,  $\beta_1$  al ángulo que forma PR con el eje de las yes y  $\gamma_1$  al ángulo que forma PR con el eje de las zetas.

Los tres cosenos  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \beta_1$  y  $\cos \gamma_1$  son los cosenos directores de PR. Estos tres números caracterizan a la dirección PR. Los designo con  $l_1$ ,  $m_1$  y  $n_1$  respectivamente.

$$l_1 = \cos \alpha_1 \quad (16)$$

$$m_1 = \cos \beta_1 \quad (17)$$

$$n_1 = \cos \gamma_1 \quad (18)$$

Los tres cosenos no son independientes entre sí, la suma de sus cuadrados es igual a 1.

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (19)$$

La demostración de esta última proposición es sencillísima si se recurre al cálculo vectorial.

Supongo un vector unitario (de módulo 1) a lo largo de PR. (Figura 5). Los componentes de ese vector según los ejes Px, Py, y Pz son sus proyecciones en los mismos.

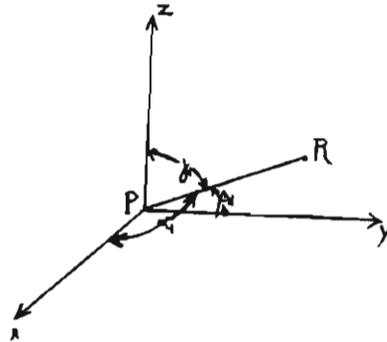


Figura 5.

Estas proyecciones son iguales a la longitud del vector por los cosenos de los ángulos que forma el vector con los ejes  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \beta_1$  y  $\cos \gamma_1$  son las componentes de un vector unitario en la dirección de PR. El módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes:

$$1 = \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1} \quad (20)$$

$$1 = \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \quad (21)$$

$$1 = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 \quad (22)$$

Llamo  $l_2$ ,  $m_2$ ,  $n_2$ , a los cosenos directores de PT (Figura 4)  $l_2$ ,  $m_2$ ,  $n_2$  son las tres componentes de un vector de longitud 1 que tenga la dirección de PT y el sentido de P a T. Como los dos vectores unitarios a lo largo de PR y PT son perpendiculares, su producto escalar es nulo.

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (23)$$

por otra parte:

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (24)$$

Interesa calcular el estiramiento sufrido por PR. El incremento que adquiere PR en la deformación es proporcional al PR mismo, a la constante de proporcionalidad la llamo Sr. Si designo con un acento a los puntos de la figura deformada, entonces:

$$P'R' = PR + Sr \cdot PR \quad \text{Fig. 6} \quad (25)$$

El incremento de PT es proporcional a PT misma; llamo St a la constante de proporcionalidad. Entonces:

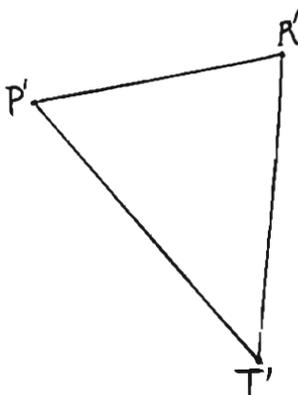


Figura 6.

$$P'T' = PT + St \cdot PT \quad (26)$$

Al coseno del ángulo S'P'T' se le llama  $\sigma_{rt}$ .

$$\sigma_{rt} = \cos R'P'T' \quad (27)$$

Me propongo resolver el siguiente problema: Valor Sr., St, y  $\sigma_{rt}$  en función de Sx, Sy, Sz,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$  y  $\sigma_{xy}$ . Para resolverlo considero al vector PR. Elijo en cada uno de los tres ejes coordenados un vector unitario. Al vector unitario en la dirección de la parte positiva del eje de las equis le llamo i, al vector unitario en la dirección de la parte positiva del eje de las yes le llamo j, y por último llamo k al vector unitario en la dirección de la parte positiva del eje OZ. (Fig. 7).

El módulo del vector es  $\frac{r}{PR} = n_1 r_i + n_2 r_j + n_3 r_k$ .

Los componentes del vector son  $n_1 r$ ,  $n_2 r$ , y  $n_3 r$ . (Fig. 8). Después de la deformación poligona alabeado PFGQR se transforma en P'F'G'R'. Utilizo el acento para distinguir a los puntos del cuerpo deformado de los puntos correspondientes del cuerpo sin deformar (Figura 9).

Llamo a  $\bar{a}$  a un vector unitario a lo largo del eje P'X'.  $\bar{\beta}$  al vector unitario de la dirección de la parte positiva del eje P'Y' y  $\bar{\gamma}$  al vector unitario a lo largo de la parte positiva de P'Z'.

$$P'R' = P'F'\bar{a} + F'G'\bar{\beta} + G'R'\bar{\gamma} \quad (29)$$

$$P'F' = PF(1 + Sx) \quad (30)$$

$$F'G' = FG(1 + Sy) \quad (31)$$

$$G'R' = GR(1 + Sz) \quad (32)$$

$$P'R' = PF(1 + Sx)\bar{a} + FG(1 + Sy)\bar{\beta} + GR(1 + Sz)\bar{\gamma} \quad (33)$$

El cuadrado del módulo de  $\overline{P'R'}$  es igual a  $\overline{P'R'} \cdot \overline{P'R'}$ . En este producto escalar intervienen los productos escalares que se pueden formar con los vectores unitarios  $\bar{a} \cdot \bar{\beta}$  y  $\bar{\gamma}$ .

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = 1$$

$$\bar{a} \cdot \bar{\beta} = 1 \cos \text{áng.}(\bar{a}, \bar{\beta}) = \sigma_{xy}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{\gamma} = 1 \cos \text{áng.}(\bar{a}, \bar{\gamma}) = \sigma_{xz}$$

Análogamente:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\beta} \cdot \bar{a} = 1 \quad \bar{\beta} \cdot \bar{\beta} = 1 \quad \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma} = \sigma_{yx} \quad \bar{\gamma} \cdot \bar{a} = \sigma_{zx} \\ \bar{a} \cdot \bar{\beta} = \sigma_{xy} \quad \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma} = 1 \quad \bar{\gamma} \cdot \bar{\beta} = \sigma_{yx} \\ \bar{a} \cdot \bar{\gamma} = \sigma_{xz} \quad \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma} = \sigma_{yx} \quad \bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma} = 1 \end{array} \right\} \quad (34)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \overline{P'R'}^2 &= PF^2(1 + Sx)^2 + FG^2(1 + Sy)^2 + GR^2(1 + Sz)^2 \\ &+ 2PF \cdot FG(1 + Sx)(1 + Sy)\sigma_{xy} + 2PF \cdot GR(1 + Sx)(1 + Sz)\sigma_{xz} \\ &+ 2FG \cdot GR(1 + Sy)(1 + Sz)\sigma_{yz} \end{aligned} \quad (35)$$

Pero según la ecuación (25)  $P'R' = PR$

$$P'R' = PR(1 + Sr)$$

Entonces:

$$P'R'^2 = PR^2(1 + Sr)^2 \quad (36)$$

Supongo ahora que las deformaciones son tan pequeñas que son despreciables los productos de dos cualesquiera de los seis números.

$$\begin{aligned} Sx, Sy, Sz, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \\ P'R' \dot{=} PR^2(1 + 2Sr) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1 + Sx)^2 \dot{=} (1 + 2Sx) \\ (1 + Sy)^2 \dot{=} (1 + 2Sy) \\ (1 + Sz)^2 \dot{=} (1 + 2Sz) \\ (1 + Sx)(1 + Sy) \sigma_{xy} \dot{=} \delta_{xy} \\ (1 + Sx)(1 + Sz) \sigma_{xz} \dot{=} \delta_{xz} \\ (1 + Sy)(1 + Sz) \sigma_{yz} \dot{=} \delta_{yz} \end{array} \right\} \quad (38)$$

La ecuación (35) se transforma con esto en

$$PR^2 (1 + 2 Sr) = PF^2 (1 + 2Sx) + FG^2 (1 + 2Sy) + GR^2 (1 + 2Sz) + 2 PF \cdot FG \delta xy + 2PF GR \delta xz + 2 FG \cdot GR \delta yz \quad (39)$$

De la figura (8) se ve que:

$$PR^2 = PF^2 + FG^2 + GR^2 \quad (40)$$

Con ayuda de la 49 la (39) se transforma des-

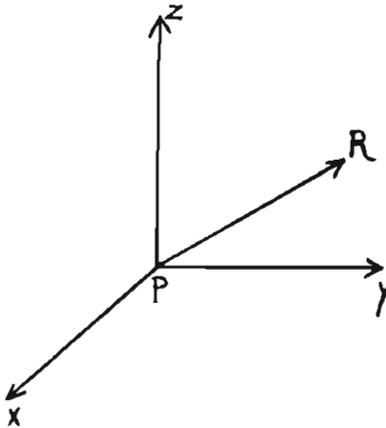


Figura 7.

pués de dividir entre 2 en:

$$PR^2 Sr = PF^2 Sx + FG^2 Sy + GR^2 Sz + PF \cdot FG \delta xy + PF \cdot GR \delta xz + FG \cdot GR \delta yz \quad (41)$$

Como:

$PF = l_1 r$  (Figura 8) y  $FG = n_1 r$   
y  $GR = n_2 r$  entonces:

$$PR^2 Sr = l_1 r^2 Sx + n_1^2 r^2 Sy + n_2^2 r^2 Sz + l_1 n_1 r_2 \delta xy + l_1 n_2 r^2 \delta xz + n_1 n_2 r^2 \delta yz \quad (42)$$

Divido ambos miembros de la ecuación (42) entre  $r^2$ , y obtengo:

$$Sr = l_1^2 Sx + n_1^2 Sy + n_2^2 Sz + l_1 n_1 \delta xy + l_1 n_2 \delta xz + n_1 n_2 \delta yz \quad (43)$$

De un modo análogo:

$$Sr = l_1^2 Sx + n_1^2 Sy + n_2^2 Sz + l_1 n_2 \delta xy + l_2 n_2 \delta xz + m_2 n_2 \delta yz \quad (44)$$

Cálculo ahora  $\overline{a}$ .

De la ecuación (33):

$$\overline{P'R'} = PF (1 + Sx) \overline{a} + FG (1 + Sy) \overline{b} + GR (1 + Sz) \overline{c}$$

de otro modo:

$$\overline{P'R'} = l_1 r (1 + Sx) \overline{a} + m_1 r (1 + Sy) \overline{b} + n_1 r (1 + Sz) \overline{c} \quad (45)$$

de un modo análogo:

$$\overline{P'T'} = l_2 r (1 + Sx) \overline{a} + m_2 r (1 + Sy) \overline{b} + n_2 r (1 + Sz) \overline{c} \quad (46)$$

Multiplico escalarmente a:

$$\begin{aligned} \overline{P'R'} \cdot \overline{P'T'} &= l_1 l_2 r^2 (1 + Sx)^2 + m_1 m_2 r^2 (1 + Sy)^2 + n_1 n_2 r^2 (1 + Sz)^2 \\ &+ (l_1 m_2 + l_2 m_1) (1 + Sx) (1 + Sy) r^2 \delta xy \\ &+ (l_1 n_2 + l_2 n_1) (1 + Sx) (1 + Sz) r^2 \delta xz \\ &+ (m_1 n_2 + m_2 n_1) (1 + Sy) (1 + Sz) r^2 \delta yz \end{aligned} \quad (47)$$

Como  $\overline{P'R'} = PR (1 + Sr) = r (1 + Sr)$  y  $\overline{P'T'} = PT (1 + St) = r (1 + St)$

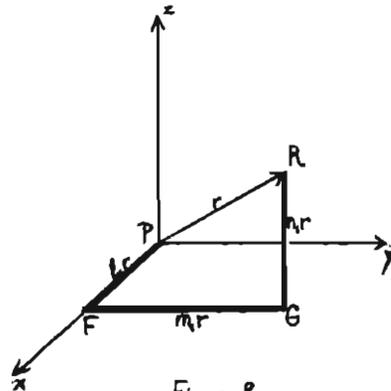


Figura 8.

entonces:

$$\begin{aligned} r^2 (1 + Sr + St) \delta rt &= l_1 l_2 r^2 (1 + 2 Sx) + m_1 m_2 r^2 (1 + 2 Sy) + n_1 n_2 r^2 (1 + 2 Sz) \\ &+ (l_1 m_2 + l_2 m_1) r^2 (1 + Sx + Sy) \delta xy \\ &+ (l_1 n_2 + l_2 n_1) r^2 (1 + Sx + Sz) \delta xz \\ &+ (m_1 n_2 + m_2 n_1) r^2 (1 + Sy + Sz) \delta yz \end{aligned} \quad (48)$$

Dividido ambos miembros de la ecuación (48) entre  $rt$  y obtengo:

$$(1 + Sr + St) \cdot rt = l_1 l_2 (1 + 2Sx) + m_1 m_2 (1 + 2Sy) + n_1 n_2 (1 + 2Sz) + (l_1 m_2 + l_2 m_1)(1 + Sx + Sy) \cdot oxy + (l_1 n_2 + l_2 n_1)(1 + Sx + Sz) \cdot oxz + (m_1 n_2 + m_2 n_1)(1 + Sy + Sz) \cdot oyz \quad (49)$$

La hipótesis en que se basa todo este estudio es la siguiente: las deformaciones son tan pequeñas que pueden despreciarse los productos de dos de las eses y de las sigmas. El primer miembro de la ecuación (49) se reduce con esa hipótesis como sigue:

$$[1 + Sr + St] \cdot rt = \cdot rt + Sr \cdot rt + St \cdot rt = \cdot rt \quad (50)$$

En el segundo miembro de la ecuación (49) intervienen productos que se simplifican mucho despreciando los términos de segundo orden:

$$[1 + Sx + Sy] \cdot oxy = \cdot oxy + Sx \cdot oxy + Sy \cdot oxy = \cdot oxy \quad (51)$$

$$[1 + Sx + Sz] \cdot oxz = \cdot oxz + Sx \cdot oxz + Sz \cdot oxz = \cdot oxz \quad (52)$$

$$[1 + Sy + Sz] \cdot oyz = \cdot oyz + Sy \cdot oyz + Sz \cdot oyz = \cdot oyz \quad (53)$$

Utilizando los resultados de las ecuaciones (50), (51), (52) y (53) para simplificar la ecuación (49)

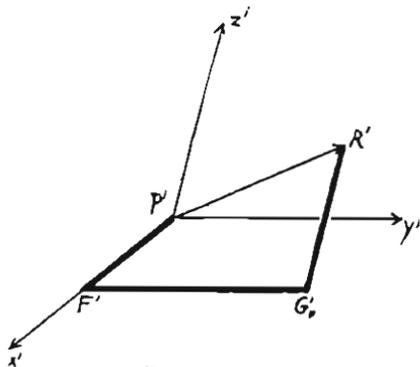


Figura 9.

se obtiene:

$$\cdot rt = l_1 l_2 [1 + 2Sx] + m_1 m_2 [1 + 2Sy] + n_1 n_2 [1 + 2Sz] + [l_1 m_2 + l_2 m_1] \cdot oxy + [l_1 n_2 + l_2 n_1] \cdot oxz + [m_1 n_2 + m_2 n_1] \cdot oyz \quad (54)$$

Ejecuto las multiplicaciones pendientes en los tres primeros términos del segundo miembro de la ecuación (54) y obtengo:

$$\cdot rt = l_1 l_2 + m_1 m_2 n_1 n_2 + 2 l_1 l_2 Sx + 2 m_1 m_2 Sy + 2 n_1 n_2 Sz + [l_1 m_2 + l_2 m_1] \cdot oxy + [l_1 n_2 + l_2 n_1] \cdot oxz + [m_1 n_2 + m_2 n_1] \cdot oyz \quad (55)$$

Según la ecuación (23) la suma de los tres primeros términos de la ecuación (55) es nula. La ecuación (55) se transforma en:

$$\cdot rt = 2 l_1 l_2 Sx + 2 m_1 m_2 Sy + 2 n_1 n_2 Sz + [l_1 m_2 Sx + l_2 m_1] \cdot oxy + [l_1 n_2 + l_2 n_1] \cdot oxz + [m_1 n_2 + m_2 n_1] \cdot oyz \quad (56)$$

Transcribo en segunda las ecuaciones (43), (44) y (56) porque estas expresan a  $Sr$ ,  $St$  y  $\cdot rt$  en función de  $Sx$ ,  $Sy$ ,  $Sz$ ,  $\cdot oxy$ ,  $\cdot oxz$ ,  $\cdot oyz$ .

$$43] Sr = l_1^2 Sx + m_1^2 Sy + n_1^2 Sz + l_1 m_1 \cdot oxy + l_1 n_1 \cdot oxz + m_1 n_1 \cdot oyz$$

$$44] St = l_2^2 Sx + m_2^2 Sy + n_2^2 Sz + l_2 m_2 \cdot oxy + l_2 n_2 \cdot oxz + m_2 n_2 \cdot oyz$$

$$56] \cdot rt = 2 l_1 l_2 Sx + 2 m_1 m_2 Sy + 2 n_1 n_2 Sz + [l_1 m_2 + l_2 m_1] \cdot oxy + [l_1 n_2 + l_2 n_1] \cdot oxz + [m_1 n_2 + m_2 n_1] \cdot oyz$$

Antes de seguir adelante conviene resumir lo expuesto hasta aquí:

1) Las deformaciones que se consideran deben ser pequeñas. Si la distancia entre dos partículas del cuerpo es pequeña antes de la deformación, debe seguir siendo pequeña después de la misma. Un segmento de recta pequeño debe seguir siendo sensiblemente rectilíneo después de la deformación.

2) Para estudiar las deformaciones en un punto  $P'$  del cuerpo, se imagina una un prisma rectangular con centro en ese punto  $P'$ . Se considera un sistema de ejes coordenados perpendiculares a las caras del prisma y de origen en el centro del mismo; hay que considerar a los ejes como formados por puntos del cuerpo deformable. Los ejes son perpendiculares y rectilíneos antes de la deformación. Después de la misma ya no son perpendiculares: se consideran rectilíneos; pero únicamente se toman en cuenta segmentos muy pequeños de los mismos en la deformación.

3) Los incrementos de los pequeños segmentos con un extremo común y de la misma dirección son proporcionales a sus longitudes.

4) La deformación queda totalmente descrita por medio de los seis números

$$Sx, Sy, Sz, \cdot oxy, \cdot oxz, \cdot oyz$$

Un segmento pequeño de longitud  $l$  con un extremo en el punto  $P$  y colocado en la dirección del eje de las  $x$ is sufre en la deformación un incremento  $Sx \cdot l$ .

Un segmento pequeño de longitud  $m$  con un extremo en el punto  $P$  y colocado en la dirección del

eje de las yes sufre en la deformación un incremento  $Sy$  m. Un segmento pequeño de longitud  $n$  y con un extremo en el punto P y colocado en la dirección del eje de las zetas, sufre en la deformación un incremento  $Sz$  n.

Los tres ejes coordenados son perpendiculares antes de la deformación. Después de la misma forman ángulos que, en general, no son rectos.

$\delta x$  y es el coseno del ángulo que forman el eje de las equis y el eje de las yes después de la deformación.

$\delta x z$  es el coseno del ángulo que forman el eje de las equis y el eje de las zetas después de la deformación.

$\delta y z$  es el coseno del ángulo que forman el eje de las yes y el eje de las zetas después de la deformación.

5)  $l_1$ ,  $m_1$  y  $n_1$  son los cosenos directores de una dirección y  $r$  es un pequeño segmento en esa dirección en la deformación  $r$  sufre un pequeño incremento  $E$ . El cociente  $\frac{E}{r}$  se designa con el nombre de estiramiento en esa dirección; en símbolos

$$s_r = \frac{E}{r}$$

6)  $Sr$  es función de  $Sx$ ,  $Sy$ ,  $Sz$ ,  $\delta xy$ ,  $\delta xz$  y  $\delta yz$  y también de  $l_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$ .

en símbolos:

$$Sr = l_1^2 Sx + m_1^2 Sy + n_1^2 Sz + m_1 n_1 \delta yz + n_1 l_1 \delta xz + l_1 m_1 \delta xy$$

7) Conociendo los seis números

$$Sx, Sy, Sz, \delta xy, \delta xz \text{ y } \delta yz$$

se puede calcular fácilmente en estiramiento en cualquier dirección según la fórmula anterior.

8)  $l_2$ ,  $m_2$ ,  $n_2$  son los cosenos directores de una dirección a la que designo con T. La dirección t y la dirección r considerada en 5) y 6) supongo que son perpendiculares. Llamo  $\delta r t$  al coseno del ángulo que forman las direcciones

r y t después de la deformación.  $\delta r t$  es una función de  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ,  $\delta xy$ ,  $\delta xz$  y  $\delta yz$  y también de  $l_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$  y  $l_2$ ,  $m_2$ ,  $n_2$  en símbolos.

$$\delta r t = 2 l_1 l_2 Sx + 2 m_1 m_2 Sy + 2 n_1 n_2 Sz + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \delta yz + (n_1 l_2 + n_2 l_1) \delta xz + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \delta xy$$

# La Fundación de la Sociedad Matemática Mexicana

Por el Sr. Carlos Graef Fernández  
Dr. en Matemáticas.

Desde hace muchos años existía en el grupo de los que cultivan las matemáticas en nuestro país, el intenso deseo de formar la Sociedad Matemática de México. El primer esfuerzo serio para la creación de una organización de este tipo, se debe al insigne maestro don Sotero Prieto, quien en una serie de brillantes conferencias que sustentó ante las sociedades científicas de México, demostró dominar a la perfección el difícil y abstracto campo de las matemáticas modernas. Él fué el primero en señalar el lamentable estado de atraso en que se encontraba esta ciencia en nuestra patria. Esto fué el primer paso, doloroso e indispensable, en la empinada senda hacia el progreso. Era necesario saber con rigor, y confesar sin miedo, el estado en que se encontraba el cultivo de las matemáticas en México, para conocer el punto de partida en la ascensión hacia una cultura matemática superior. Hoy se realiza, con la fundación de la Sociedad Matemática de México, uno de los más nobles sueños de nuestro querido maestro.

Don Sotero Prieto tuvo el enorme valor de mostrar despiadadamente nuestra triste posición ante la ciencia mundial. Esta crítica dura, es una de las condiciones necesarias, para que podamos alcanzar el alto nivel, en el que se encuentran las matemáticas en los países más cultos de la tierra. Desgraciadamente, no basta con conocer el punto de partida, para poder emprender la ardua ascensión. Le estaba reservada a don Sotero Prieto además, la difícil, necesaria e ingrata tarea, de depurar al profesorado de matemáticas de la Universidad Nacional de México. El maestro ahuyentó de las cátedras a profesores tarsantes, que pretendían tener profundos conocimientos científicos, y que se escudaban detrás de términos técnicos altisonantes, y de títulos mal adquiridos. Fué don Sotero un enemigo implacable de la deshonestidad científica. Combatió tenazmente a los grupos de pseudo-científicos que se dedicaban a elogiarse mutuamente, y a formar en la sociedad la opinión, de que tenían profundos conocimientos en ciertas ramas del saber, que en realidad ignoraban casi completamente.

Era la honestidad en la ciencia uno de los rasgos característicos del maestro. Pero su papel principal en la evolución de las matemáticas en México, no fué negativo. Don Sotero Prieto reunió a su alrededor a un grupo de discípulos, a quienes inculcó el amor por el cultivo de las matemáticas, y a quienes inició en la ascensión hacia las lejanas cumbres de la Ciencia Moderna.

El alumno, a quien interesaban las matemáticas, admiraba a don Sotero Prieto, y seguía con intensa atención sus inigualables exposiciones. En cátedra prendió el maestro en los corazones de sus discípulos la llama que debía de arder en el futuro, ante el altar de la Reina de las Ciencias. Su constante insistencia en un lenguaje preciso, formó en México el hábito de la expresión matemática rigurosa.

En la evolución de las matemáticas en México, representa don Sotero Prieto al crítico, que señala el bajo nivel desde el que hay que empezar la ascensión, y que exige honestidad en la Ciencia, reconociéndola como una condición indispensable para el progreso; representa don Sotero también, al maestro, que forja toda una generación de matemáticos; y representa finalmente, al hombre que abre la brecha, para iniciar a sus discípulos en el camino hacia la lejana meta, que son las disciplinas matemáticas modernas.

En el año de 1932 reunió don Sotero Prieto a un grupo de sus discípulos, y formó la Sección de Matemáticas de la Academia Nacional de Ciencias "Antonio Alzate". Este grupo se reunió durante la vida del maestro, todos los viernes a las 7 de la noche, a escuchar conferencias de matemáticas superiores; y es sin duda alguna el precursor de la Sociedad Matemática de México.

En las reuniones de los viernes un continuo estímulo para los amantes de las matemáticas. Allí escuchamos de los labios del maestro, fascinantes exposiciones sobre matemáticas modernas.

Allí habló, por primera vez, don Alfonso Nápoles Gándara de la geometría diferencial y del cálculo vectorial, disciplinas que él estudió en los Estados Unidos de Norteamérica, y en las que inició en México a un grupo de profesores. El doctor Alfonso Nápoles Gándara es ahora el maestro, en torno del cual nos reunimos los que cultivamos las matemáticas.

Después de la trágica muerte de don Sotero Prieto en 1935, ha sido él, quien ha mantenido vivo en México el entusiasmo por nuestra ciencia, y el que nos ha guiado y estimulado en nuestros estudios e investigaciones. Don Alfonso Nápoles Gándara ha sido fiel a la memoria de don Sotero; en el campo de las matemáticas en la Universidad Nacional, reina la honestidad que había en los tiempos del maestro desaparecido.

También fué en las reuniones de los viernes, en las que escuchamos al ilustre doctor Manuel Sando-

val Vallarta, quien en esa época era profesor de Física del Instituto Tecnológico de Massachusetts, en Estados Unidos, y quien nos hacía el honor de acompañarnos en las sesiones del grupo de matemáticas. Don Manuel nos exponía entonces con el entusiasmo, la claridad y el brillo, que él sabe poner en sus conferencias, los últimos adelantos de la física y de las matemáticas. Este contacto con las últimas creaciones de la ciencia, fué para nosotros de una importancia fundamental. Ver a un mexicano que tomaba parte activa en la formación de la física moderna, fué un estímulo de inmenso valor para nuestro grupo.

El pequeño grupo de entusiastas de las matemáticas, que se reunía los viernes bajo la dirección de don Sotero Prieto, siguió trabajando con más o menos intensidad hasta el año pasado; en los últimos años las reuniones habían adquirido la forma de sesiones del Seminario de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional. Gracias a los esfuerzos de tres miembros de ese núcleo de trabajadores desinteresados de la Ciencia, el doctor Alfonso Nápoles Gándara, el Maestro en Ciencias Alberto Barajas Celis y el Ingeniero Francisco José Alvarez se efectuó el Primer Congreso Nacional de Matemáticas en la primera semana de noviembre del año de 1942, en la Ciudad de Saltillo. En una de las sesiones de este Congreso, que fué un éxito científico muy importante, se nombró a una comisión para que organizara la Sociedad Matemática de México; el autor tuvo el honor de ser nombrado miembro de esa comisión.

La fundación de la Sociedad Matemática de Méxi-

co es de enorme trascendencia para el país. Los esfuerzos aislados de numerosos matemáticos mexicanos que trabajaban hasta ahora sin conocerse, sin las facilidades que ofrece una biblioteca especializada de matemáticas, sin el estímulo de un auditorio docto que pudiera entenderles, se polarizarán en el futuro próximo, en que la Sociedad les proporcione todos estos recursos, para trabajar por la creación de una cultura científica mexicana de orden superior. Nuestros matemáticos, al contar con los libros en qué beber los conocimientos modernos, y con el ambiente estimulante que la Sociedad Matemática les brinde, colaborarán con sus creaciones a darle prestigio a nuestra patria. Las creaciones científicas y artísticas son la mejor y la más noble publicidad que podemos hacer por México en el extranjero.

El cultivo de las matemáticas es además requisito indispensable, para el desarrollo de la física y de la química, que a su vez son la base de la técnica y de la industria modernas. Los países que no desarrollen sus matemáticas, estarán condenados a importar técnicos extranjeros para los trabajos delicados de ingeniería y de la industria, y nunca serán intelectualmente independientes, en el sentido noble de esta palabra; no me refiero a una independencia de las culturas de otros países, que sería necio desear, sino independencia para dirigir la explotación de los propios recursos naturales, y la propia producción industrial.

Por esa independencia luchará la Sociedad Matemática de México al lado de nuestros físicos, químicos e ingenieros.

## AFINIDADES MORFOLOGICAS ENTRE LAS MATEMATICAS Y LA PINTURA \*

Por Carlos GRAEF FERNANDEZ

LA Cultura de un pueblo en una época es única, pero se manifiesta de muy diversas maneras en las diferentes artes y ciencias. Se trata del mismo espíritu buscando expresarse, por medio de superficies que limitan volúmenes en las esculturas, por medio de melodías y armonías en la música, por medio de relaciones abstractas en las matemáticas. Las creaciones artísticas y científicas gestadas por un pueblo en una misma etapa de su historia, son realizaciones diversas de una misma cultura y todas ellas acusan una unidad de estilo.

El que mire profundamente podrá ver entonces, detrás de una pintura o de un razonamiento matemático al espíritu único que se manifestó de modos diversos porque usó medios distintos. Una misma sensibilidad espiritual se exhibe de muy desemejantes maneras cuando lo hace a través de materiales y artificios muy diferentes entre sí. En la creación artística y científica impone el medio de expresión usado, su característica propia, y es esta la que salta más a la vista, la que está más próxima a la superficie, la que oculta la unidad de estilo de las diversas manifestaciones culturales, subrayando las diferencias que existen entre ellas. No nos debe sorprender que con colores y líneas en un lienzo se obtenga un resultado muy distinto que con relaciones entre objetos matemáticos.

Oswald Spengler hace de las semejanzas esenciales entre todas las creaciones culturales de una época, el *Leitmotiv* de su "Decadencia de Occidente". Fué este valiente filósofo de la historia quien acuñó el giro "afinidades morfológicas" para

---

\* Conferencia del ciclo de la Sociedad Mexicana de Estudios y Lecturas pronunciada en el Palacio de Bellas Artes el 21 de agosto de 1946.

designar estas analogías fundamentales, y esta expresión ha pasado a enriquecer el acervo de vocablos de todos los idiomas cultos. Dice Spengler: "Todavía no he encontrado a nadie que haya acometido con seriedad el estudio de esas *afinidades morfológicas* que traban íntimamente las formas todas de una misma cultura; nadie que, saliéndose de la esfera de los hechos políticos, haya conocido a fondo los últimos y más profundos pensamientos matemáticos de los griegos, árabes, indios y europeos; el sentido de sus primeras ornamentaciones, de las formas primarias de su arquitectura, de su metafísica, de su dramática, de su lírica; los principios selectivos y la tendencia de sus artes mayores; las particularidades de su técnica artística y de la elección de materiales". Después de esta declaración, emprende la tarea con increíble vigor y entusiasmo.

Tratamos de exhibir, en este artículo, las afinidades morfológicas entre la pintura y las matemáticas en nuestra cultura occidental, desde los griegos hasta nuestros días, y usamos un principio de comparación propio que nos parece la clave que descifra las ocultas semejanzas.

Spengler extiende sus investigaciones a todas las actividades culturales, nosotros nos restringimos a dos, una artística: la pintura; científica la otra: las matemáticas. El sujeto creador en este artículo son los pueblos de occidente, las creaciones que estudiaremos son sus pinturas y sus matemáticas.

Es evidente que un examen superficial de las pinturas y de los resultados matemáticos de una época no puede revelarnos las analogías morfológicas. El campo de la creación estética pictórica está muy lejos del de las disciplinas matemáticas. Si no se penetra hasta los hontanares de la inspiración, se cae en semejanzas de detalle triviales y fáciles. En ocasiones los pintores han buscado un contacto con la ciencia, y alguna vez éste ha sido fecundo, aunque superficial.

El análisis espectral de los físicos en el siglo XIX influyó considerablemente en la técnica de los pintores impresionistas. Asombrados los artistas ante el progreso de la ciencia de la luz quisieron ponerlo al servicio del arte pictórico. Los físicos descomponían la luz solar en sus colores elementales, —*puros*—, y este hecho indujo a los pintores a pretender analizar, —descomponer en sus elementos puros—, a los colores de los

seres y objetos que les servían de modelos. Llamaron a sus estudios: "Laboratorios del Color"; y usaron "colores puros" en sus lienzos.

El concepto "color puro" tiene un significado muy distinto para el físico y para el pintor. Se llama "color puro" en la ciencia al que refleja luz que tiene la propiedad de ser inalterable al pasar por un prisma cualquiera. Si iluminamos una superficie teñida de un color puro en el sentido de la física, y hacemos pasar la luz reflejada por un prisma de vidrio, la luz emergente será idéntica a la incidente. Color puro en el sentido de los pintores es aquél que se prepara con un solo pigmento, y que por lo tanto no es el resultado de mezclar en la paleta varios colores. Los "colores puros" de los artistas nunca son monocromáticos —es decir puros— para los físicos. No creo que los "colores puros" de la ciencia, —los colores monocromáticos—, tengan valor especial alguno en la creación estética. Quien quiera sujetar este juicio a una revisión estricta puede contemplar estos colores puros de los físicos en el espectro de un prisma de vidrio. Basta hacer pasar luz solar por uno de estos instrumentos ópticos e interceptar la luz emergente con una pantalla blanca. Para la ciencia contemporánea no es problema difícil preparar pigmentos de color puro.

Como los colores de las superficies que el pintor impresionista deseaba captar en su lienzo, generalmente no eran idénticos a los de los pigmentos que tenía disponibles, los analizaba y descomponía en una suma de "colores puros". El artista de esta escuela no mezclaba sus pigmentos en la paleta, aplicaba al lienzo manchas de color, cada una de un solo pigmento, yuxtaponiéndolas. Aplicando pinceladas contiguas rojas y azules se logra que la superficie pintada aparezca morada, por integración retiniana, cuando se la contempla desde cierta distancia. El ojo humano realiza la fusión de la luz que proviene de las pequeñas manchas de color yuxtapuestas. La integración retiniana la concibió Newton para sintetizar la luz blanca a partir de sus componentes.

Este contacto entre la física y la pintura es superficial, trivial y baladí. Lo expongo para contrastar una relación de tipo intrascendente con la analogía profunda que mostraré más tarde. No quiero criticar a los pintores impresionistas por el uso incorrecto de resultados científicos en el arte. Con la téc-

nica de esta escuela se lograron lienzos de hermosura extraordinaria, como el cuadro de Claude Monet: "La Catedral de Rouen", que se exhibe en el Museo Metropolitano del Arte de la Ciudad de New York. En esta hermosa pintura Monet plasmó la luz que juega en la superficie del edificio, y sustrajo las piedras, lo sólido, lo material; quedó solamente la vibración luminosa sin ningún apoyo concreto.

En contraposición con este contacto epidérmico entre el Impresionismo y la Ciencia, existe un principio de comparación que permite revelar las analogías esenciales entre las Matemáticas y la Pintura; este principio es: la relación con la realidad. Si examinamos en cada época la actitud de la pintura o de las artes plásticas hacia la realidad con la de las matemáticas hacia la realidad, descubriremos las semejanzas fundamentales, las analogías morfológicas que buscaba Spengler.

La realidad tiene estructura matemática en muchos de sus aspectos más importantes. Santayana, el filósofo yanqui de origen hispano, dice que este hecho es el que da *dignidad* a las matemáticas. Si la realidad no tuviera en facetas esenciales estructura matemática, esta ciencia no tendría la dignidad que tiene; su valor quedaría reducido al que tienen la teoría del ajedrez y el análisis del juego de damas. Del campo de los grandes matemáticos, escuchamos opinión semejante del genial inglés: Hardy, quien en su obra "A Mathematician's Apology" afirma que si bien la afición del matemático por su ciencia es independiente de la estructura matemática de la realidad, también es cierto que en caso de faltar ésta, las matemáticas no tendrían gran valor cultural. Tanto Santayana como Hardy están de acuerdo también en el carácter enteramente convencional de las matemáticas.

En su libro: "Persons and Places, The Background of my Life", que tiene un sabor tan español a pesar de estar escrito en el inglés más perfecto, hace Santayana esta afirmación, halagüeña para los que cultivamos una disciplina tan injustamente tachada de árida: "si alguno de mis profesores me hubiera señalado el hecho de que las matemáticas son enteramente convencionales, un juego lógico en el que de unos cuantos postulados arbitrarios se deducen todos los teoremas, yo me hubiera dedicado a las matemáticas".

Santayana fué víctima, junto con muchos otros, de la ignorancia de sus profesores de matemáticas elementales, y de los programas repugnantes que rigen para la enseñanza de esta ciencia en casi todas las escuelas secundarias. Son muy pocos los profesores de esta asignatura que tienen una justa visión panorámica de lo que son las matemáticas contemporáneas, y los que conocen las ramas vivas de esta ciencia, y solamente éstos podrán despertar el entusiasmo en sus alumnos.

Del hecho, que la estructura matemática de la realidad dé dignidad a las matemáticas no debe deducirse que no deben cultivarse disciplinas científicas que no tienen nada que ver con la realidad. Pueden citarse muchos casos de ramas de las matemáticas que estaban en un principio enteramente alejadas de toda aplicación a la realidad, y que más tarde encontraron aplicaciones muy fecundas e importantes. Cuando los griegos estudiaron las secciones cónicas, nada estaba más alejado de su espíritu que pensar en aplicaciones físicas; las secciones cónicas son ahora indispensables al ingeniero, al astrónomo, al físico. La gráfica del momento flexionante de una viga libremente apoyada con carga uniforme en una parábola; la forma de los cables de un puente colgante con carga también uniforme es parabólica; las órbitas planetarias son elipses; la representación concreta de las variaciones con la dirección de la constante dieléctrica en un medio anisotrópico, es un elipsoide. Todo esto hubiera sorprendido al mago heleno de las cónicas, Apolonio, quien jugaba con ellas como un niño juega con conchas nacaradas en la playa, fascinado por su belleza intrínseca, sin pensar en sus aplicaciones.

Usando una metáfora del mundo de las finanzas, que impone en nuestra época su sello hasta en los campos más alejados de él, dice Hardy que no solamente por esta *inversión espiritual a largo plazo* deben cultivarse las ramas de las matemáticas que no tienen relación alguna con la estructura de la realidad; las disciplinas matemáticas tienen otros valores además del de sus aplicaciones; algunas permiten señalar la identidad formal entre la estructura de ramas científicas muy alejadas unas de otras, luchando así por la unidad en la ciencia; otras completan el cuadro de los desarrollos matemáticos, y son imprescindibles para la simetría y belleza del edificio de las ideas que ha creado el hombre.

Por otra parte es obvio que la corriente principal de las matemáticas en una época puede caracterizarse por su actitud hacia la realidad, y también es cierto que esta actitud es un rasgo esencial en la ciencia. Exactamente lo mismo puede decirse con relación a la pintura. Es fundamental la actitud del pintor hacia la realidad, esta postura caracteriza un rasgo esencial en su obra. Claro está que la "actitud hacia la realidad" no agota ni a las matemáticas ni a la pintura; existen otros rasgos importantes en los que ambas actividades humanas difieren esencialmente. Pero nuestro propósito es señalar las semejanzas formales, las *afinidades morfológicas*, y no insistir en las diferencias esenciales, que existen, que conocemos, y que no haremos resaltar.

**I**NICIAMOS la comparación con la matemática griega y la plástica de este pueblo. Por sernos mucho más familiar la estatuaría griega que su arte pictórico es éste el único caso en que recurrimos a la escultura.

¿Qué tiene que ver la matemática griega con la realidad?  
¿Existen en la realidad las rectas, los planos, los círculos de la ciencia helena?

Los objetos matemáticos no son nunca idénticos a los objetos reales; existen empero en la realidad objetos que tienen propiedades muy semejantes a las de los objetos matemáticos. La superficie tersa y tranquila de un lago sugiere un plano. Un hilo tenso nos conjura una recta en la imaginación; el disco del sol y el de la Luna llena nos inspiran la forma del círculo. Ciertas formas muy simples de la naturaleza provocan en nuestras mentes la gestación de objetos matemáticos. Existen en la realidad formas elementales que de un modo natural, y casi sin esfuerzo, crean en nuestro espíritu los objetos ideales de las matemáticas. El matemático griego no busca después estructura matemática en la realidad. Se contenta con dejar que ésta sugiera objetos ideales sobre los que enfoca su atención. Olvida pronto la fuente que le inspiró su material. La realidad hace aquí el papel de manantial de sugerencias; sólo señala de un modo leve la existencia de idealizaciones de objetos que ella contiene. El círculo matemático es ideal; no existe en el mismo sentido que existe en el disco solar. En la realidad no hay círculos matemáticos. El círculo que Euclides traza en un papel

es un cuerpo formado por granos de pigmento que quedan adheridos a la hoja por medio de un pegamento. Ni la hoja es plana, ni la línea trazada es tal línea. Se construye una acumulación de granos de pigmento sujetos a las fibras del papel por medio de granos de pegamento; a la estructura final se le llama círculo. Los griegos estaban perfectamente conscientes de que los círculos trazados en un papel no son los objetos matemáticos. Ellos decían que los círculos trazados eran imperfectos, y los círculos ideales eran perfectos. Nosotros preferimos decir que los círculos trazados son objetos físicos, mientras que los círculos matemáticos son objetos ideales.

La aplicación del atributo "perfecto" para el objeto ideal, y del atributo "imperfecto" para el real, es tópica de la cultura griega.

Veamos ahora cuál es la actitud de los grandes artistas griegos hacia la realidad. En el mundo real existen mujeres hermosas ante cuyos bellos cuerpos nos extasiamos. Estas sugieren al artista la existencia de una mujer ideal más hermosa que las más hermosas mujeres reales. La Afrodita del escultor no existe en la realidad; no es una reproducción fiel de una mujer real, es una mujer ideal, sin imperfecciones, sin las pequeñas irregularidades que tiene toda mujer real, por hermosa que sea. La Afrodita del escultor existe en otra esfera óptica que las mujeres reales; la relación de su Afrodita con las mujeres reales que se la sugirieron es la misma que la de un círculo matemático con los discos del Sol y de la Luna.

En el mundo real hay mancebos de cuerpos hermosos que sugieren al escultor heleno la existencia del cuerpo de un Apolo, de un cuerpo ideal, perfecto. Las mujeres y hombres reales, de cuerpos hermosos, son aquí solamente formas sugerentes de otras formas ideales y perfectas. La actitud del matemático y del escultor griego ante la realidad es pues la misma. Esto no es sino una fuente de sugerencias; al matemático le sugiere la existencia de objetos ideales con los que juega después olvidando su origen. Al escultor le sugiere la existencia de mujeres y hombres divinos, de cuerpos perfectos de Afroditas y Apolos. Para el griego la realidad *no tiene* estructura matemática, pero sugiere objetos que *sí la tienen*. La realidad no es estéticamente perfecta, pero sugiere objetos que sí lo son. El cuerpo de las mujeres reales tiene pequeñas imperfecciones,

irregularidades, que lo hacen imperfecto; el cuerpo de Afrodita es perfecto, irreal, ideal y divinamente hermoso. El disco solar tiene protuberancias, pequeñas imperfecciones; el círculo matemático es irreal, ideal y perfecto.

Se puede objetar al paralelo aquí expuesto que la época de los grandes escultores griegos (siglo V) no coincide con la época de los grandes matemáticos helenos (siglos II y III). Existe entre las intensidades de la actividad artística de un pueblo y de su actividad científica, un fenómeno semejante al que se presenta entre el voltaje y la intensidad de la corriente alterna en un circuito eléctrico. El voltaje máximo aplicado precede siempre a la máxima intensidad de la corriente eléctrica. Primero llega a su mayor valor el potencial alterno, —el voltaje—, y después, con algún retraso, llega la corriente a su valor más grande. Al lapso transcurrido entre ambos máximos se le llama "fase"; a la presencia de ese intervalo de tiempo se le llama "desfasamiento". Nos parece extraordinariamente sugestivo este giro del lenguaje del ingeniero, y usándolo, podemos decir: existe un *desfasamiento* entre la producción pictórica y la producción matemática de un pueblo. Generalmente maduran en una cultura primero los frutos artísticos más exquisitos, y después sus frutos científicos. En la etapa griega de la cultura de occidente, se producen primero las grandes esculturas y después las grandes creaciones matemáticas. Tenemos la fortuna que muchas de las grandes creaciones artísticas que los griegos plasmaron en el mármol hayan llegado hasta nuestros días. Desgraciadamente no ocurre lo mismo con la pintura helénica. La poca resistencia de los materiales usados en el arte pictórico hace que sus producciones sucumban fácilmente a los embates de las fuerzas destructoras de la naturaleza.

Omitiré las analogías entre el arte pictórico y las matemáticas en el Medievo. Solamente señalaré que durante ese milenio se desarrolla una técnica importante de la pintura, pues en la aurora del Renacimiento ya cuenta el Giotto con conocimientos técnicos que le permiten ejecutar sus maravillosos cuadros. Los artistas medievales han permanecido en un anonimato casi completo. Las obras de arte eran trabajos colectivos en los que no se inmortaliza un genio singular. La ciencia de esta época tiene un sabor semejante. ¿Quiénes son los

grandes matemáticos de la Edad Media? Muy pocos son los nombres que perduran de los científicos de ese *edón*. Sin embargo se desarrolla anónimamente la aritmética, y Vieta cuenta ya con el sistema decimal de numeración y con números de signo al iniciar sus investigaciones algebraicas en el siglo xvi.

**A**L trazar las analogías morfológicas entre la pintura y las matemáticas en el Renacimiento hay que tener en cuenta la fase entre las diferentes actividades culturales.

El apogeo de la escultura con Mirón, Policleto y Fidias precede en tres siglos a la gran época de las matemáticas, la era de Arquímedes y Apolonio. Ese desfaseamiento se observa más tarde en el Renacimiento, y no es sino hasta el siglo xix en el que desaparece totalmente, y el arte y la ciencia ascienden "en fase" hacia un máximo futuro.

Si se quieren señalar las analogías esenciales, es necesario comparar máximo con máximo, y etapa ascendente con etapa ascendente, aunque se tenga que comparar la pintura de un siglo con la matemática de otro. La gráfica que representa los valores pictóricos creados es la que se compara con la que representa la gestación de valores matemáticos. La fase existente entre las dos disminuye de los griegos a nosotros hasta anularse completamente.

**C**OMPAREMOS ahora la actitud hacia la realidad de los más grandes matemáticos con la de los más grandes pintores renacentistas. Fijémonos en Newton, quizás el más grande matemático de todos los tiempos. ¿Cuál es su actitud hacia la realidad? Newton cree que en la realidad hay fenómenos con estructura matemática. De todos los mecanismos físicos observables en el tiempo de Newton, el que muestra en forma más palpable y obvia su estructura matemática es el sistema solar. Es necesario ser ciego para no *ver* la estructura matemática de este gigantesco mecanismo. Las regularidades del sistema saltan a la vista. ¿Qué hace entonces Newton? Busca la estructura matemática de este sistema solar, y la exhibe. En esa búsqueda se muestra como genio matemático de talla gigan-

tesca. Gesta el cálculo diferencial e integral con el que pone en evidencia las leyes de la gravitación, y deduce de unos cuantos principios todos los movimientos de los planetas, cometas y asteroides. Ante un sistema con estructura matemática obvia, Newton la exhibe en forma genial y elegante. La creación matemática de este genio es perfecta, y sólo recientemente en este siglo XX, ha sido superada. La actitud del matemático Newton se puede resumir diciendo: que creyendo que en la realidad existen sistemas con estructura matemática, exhibe de un modo insuperable esa estructura en aquellos sistemas que la tienen obviamente.

¿Cuál es la actitud de los titanes de la pintura correspondientes a Newton en las matemáticas?

Contemplemos la *Madonna Alba* de Rafael. Existen en la realidad conjuntos de entes que tienen un claro valor estético. Uno de éstos es el grupo formado por la hermosa y joven madre, su bello hijo, y el San Juan, niño. No se necesita esfuerzo alguno para ver que este conjunto tiene un gran valor estético. ¿Qué hace Rafael? Exhibe en su pintura este valor. De un modo casi insuperable presenta el valor estético de esta escena que lo tiene de un modo natural: la joven y bella virgen con los dos hermosos niños.

Semejante es la actitud del gran Ticiano hacia la realidad. Es evidente que el cuerpo de una mujer bella tiene un gran valor estético. *Venus* y el *Músico del Laud* forman una escena que tiene de un modo casi palpable valor estético; es muy fácil percibir su belleza. Ticiano exhibe este valor de una manera magistral.

Señalaré aquí una diferencia esencial entre el arte del Renacimiento y el arte de los griegos, que también se presenta entre la matemática de la gran época y la matemática griega. En la *Afrodita de Cirene* vemos una mujer ideal, que no existe en la realidad. Ninguna mujer real es como la *Afrodita de Cirene*. Los rasgos de *Afrodita* están dispersos entre muchas mujeres bellas, pero *Afrodita* es ideal, perfecta e irreal. En cambio existe una mujer hermosa igual a la virgen del *Alba Madonna* de Rafael. Esta virgen es el retrato fiel de una hermosa mujer real, que sirvió de modelo a Rafael. Lo mismo se puede decir de la *Venus* de Ticiano. Existe una hermosa modelo que posó para esa *Venus*. De ahí que las mujeres

hermosas que a los griegos sugerían tan sólo la existencia de cuerpos femeninos perfectos, ideales e irreales, eran para el genio pictórico del Renacimiento las fuentes mismas del valor estético. Este se creaba reproduciendo fielmente a los modelos. Para los griegos los objetos reales: superficie de un lago, discos solar y lunar, y cuerda tirante, sugerían la existencia de otros objetos: los entes matemáticos, ideales, perfectos e irreales. Para Newton existen en la realidad objetos, —v. g. el sistema solar— que son los portadores mismos de la estructura matemática.

En el arte renacentista: reproducciones fieles de objetos reales bellos como los portadores del valor estético. En la matemática de la gran época: ciertos sistemas regulares como los portadores de una estructura matemática.

Cuando la pintura culmina en Flandes con Rubens, sigue ese mismo curso. El lienzo Venus y Adonis es la reproducción fiel de una escena real que tiene innegable valor estético. El cuerpo de una mujer bella es la fuente más fecunda de valores estéticos que podemos imaginar.

**C**OMPAREMOS, ahora la rama ascendente de las curvas de la gestación de valores matemáticos y estéticos en la primera mitad del siglo XIX.

He elegido como uno de los pintores característicos de esta época a Gustave Courbet. Este rebelde pintor francés fué el fundador de la Escuela Realista: su actitud hacia la realidad es la que da el nombre a su doctrina. Courbet afirmaba que la realidad está pletórica de valores estéticos. No hay que buscar a la mujer bella para crear el valor pictórico estético, reproduciéndola fielmente. ¡No! En toda escena real hay valores estéticos que el artista puede exhibir. La pintura que hemos escogido como ejemplo representa a una mujer dormida. Otra mujer deshoja una rosa sobre la durmiente. Estas dos mujeres son reales, y una de ellas no es hermosa. Su pose no es de las palpablemente bellas, y sin embargo creó aquí Courbet un gran valor estético al hacer esta reproducción fiel de la realidad. En toda escena real hay valor estético y al artista toca exhibirlo. Courbet lo busca y lo señala en escenas que hasta sus días no se creía que pudieran tenerlo. Sus pinturas

causaron profundo disgusto en el público. Cuando exhibió sus pinturas en el salón de la Academia, los espectadores apedearon sus obras. La oposición del público fué tan grande que se vió obligado a salir de Francia y a refugiarse en Suiza, en donde murió. Courbet ve el valor estético en cualquier escena real. No busca mujeres hermosas para reproducirlas fielmente. Una mujer ordinaria también podrá ser fuente de valor estético con sólo que la vea un artista.

En esa época domina el panorama matemático Karl Friedrich Gauss, el gigante de Göttingen. Veamos cuál es su actitud hacia la realidad. Entre todos los fenómenos físicos existe uno del que difícilmente puede decirse que tenga estructura matemática aparente, es decir, que presente regularidades: éste es el campo magnético terrestre. Los que hayan contemplado los trazos de isógonas, isóclinas e isodínamas, concurrirán conmigo en la opinión que su estructura matemática no salta a la vista. Gauss, sin embargo, emprendió el estudio del campo magnético terrestre con la firme creencia de que la realidad física tiene siempre estructura matemática, y logró exhibir de un modo genial esta estructura. Pero otro caso, aún más espectacular que éste, es el de la estructura matemática de la distribución de los errores en conjuntos de observaciones. Esta distribución que está hecha completamente a la ventura, parece lo más alejado que pueda imaginarse de un objeto con estructura matemática; y, sin embargo, Gauss exhibió ésta aun en este caso. En su obra maestra: "Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientum" (Teoría de los Movimientos de los Cuerpos Celestes en Secciones Cónicas en Torno del Sol), exhibe la estructura matemática de la distribución de los errores en las observaciones de las posiciones de un asteroide. Es admirable que este sistema tenga estructura matemática.

Courbet ve el valor estético en toda escena real, y Gauss ve la estructura matemática en todo fenómeno real.

Quiero mencionar también al gran físico-matemático francés Fourier, quien exhibió magistralmente la estructura matemática de la distribución de la temperatura en placas metálicas puestas en contacto con fuentes térmicas. Otra vez nos encontramos frente a un fenómeno que no tiene estructura matemática visible y un gran matemático la pone en evidencia.

A lo expuesto antes se puede objetar que junto a la Escuela Realista se desarrolla vigorosa la Escuela Romántica, en la pintura de la primera mitad del XIX. Analicemos en qué consiste la actitud del romántico hacia la realidad, y veamos si encontramos parejo movimiento en la matemática. El pintor romántico huye de la realidad. Los temas de sus pinturas son escenas de países lejanos, temas exóticos lo más lejos que sea posible de la realidad que le rodea. Prefiere pintar temas de cuentos fantásticos que escenas reales. Dante y Virgilio en el infierno, por Víctor Eugène Delacroix, es un típico cuadro romántico. También les fascinaban a los románticos las escenas alegóricas: Grecia Agonizante en las Ruinas de Misolonghi, por V. E. Delacroix. En el ambiente flotaba el gesto romántico. Lord Byron, acude a luchar contra los turcos. El contacto con la realidad lo llena de amargura. Claro que no esperaba encontrar a la alegórica Grecia de Delacroix sentada en las Ruinas de Misolonghi, pero no resistió el contacto con la Grecia real, con sus generales corruptos, con su soldadesca cruel y con las diversas imperfecciones de toda nación real.

El romántico no mira en su entorno en busca de una escena real que reproducir en el lienzo. Todo lo contrario; huye de la realidad. Busca sus temas en lo fantástico y puramente imaginativo, en las alegorías, en la literatura. Elige escenas llenas de dramatismo y dinamismo.

¿Cuál es el paralelo matemático del Romanticismo? Examinemos la obra del matemático Hermann Günther Grassmann, expuesta en su obra cumbre *Lineale Ausdehnungslehre*. Se habla allí de objetos matemáticos que están formados por los complementos algebraicos de todos los determinantes de orden  $m$  que se pueden formar, tomando elementos de  $m$  renglones fijos de un determinante de orden  $n$ .  $n > m$ . Estos objetos matemáticos son el tema de profundas investigaciones. Tomados así, en su más absoluta generalidad, no existen en la realidad objetos que se porten como los entes matemáticos de Grassmann. De manera que no se trata aquí de exhibir la estructura matemática de la realidad, sino de crear objetos fantásticos con estructura matemática y de investigar sus relaciones. Hay también en esto un escape. La estructura matemática de la realidad es algunas veces extraordinariamente difícil de exhibir, entonces se refugia el matemático en el mun-

do de objetos fantásticos que él crea, e investiga su comportamiento.

LA Escuela Realista en Pintura evolucionó a través del Impresionismo, al Puntillismo y después a los Cubismos Analítico y Sintético. La Escuela Romántica reaparece en nuestros días en la forma de la Escuela Surrealista. Esta escuela se viste de un manto científico, extraído del psicoanálisis de Freud. El pintor surrealista pretende pintar el contenido de la subconsciencia. En lugar de enfocar la atención en lo que está pintando, busca fijar ésta en asuntos extraños. Ya platica, ya lee una novela, mientras pinta. Sus pinturas pretenden ser semejantes a los dibujos que el hombre contemporáneo hace en las paredes de las casetas de teléfonos, mientras charla amorosamente con una amiga. Los movimientos de la mano los gobierna la subconsciencia, mientras la consciencia enfoca su atención en otro asunto.

Independientemente de lo que se opine de esta explicación racionalizante, los pintores surrealistas han logrado pinturas de gran belleza. Recordemos dos de las pinturas ejecutadas por Pablo Picasso en la época en que pintaba como pintor surrealista, su época ósea. La primera pintura se llama: Dos mujeres en la Playa; la segunda: Figura en Silla Roja.

Pablo Picasso es sin duda el más grande de los pintores contemporáneos. El creó personalmente las primeras y fundamentales manifestaciones de casi todas las escuelas de pintura ahora en boga. En sus producciones surrealistas vemos algunos una actitud romántica, por el escape que contienen. En lugar de buscar temas para sus pinturas en la realidad que lo rodea, recurre Picasso al fantástico mundo de la subconsciencia. Huye de la realidad para buscar el valor estético en el mundo de la imaginación. Sin embargo, a muchos pintores surrealistas les indignaría horriblemente el ser llamados románticos.

Las figuras representadas por Picasso en sus pinturas, tienen cierta semejanza con mujeres reales. En la realidad existen objetos semejantes a los elementos de forma que utiliza Picasso. Con elementos de forma y de color tomados de la realidad, construye Picasso un conjunto armonioso y bello,

conjunto que le dicta su subconsciencia. No se puede decir, empero, que Picasso haya encontrado precisamente en la realidad el valor estético contenido en sus cuadros, y que simplemente haya reproducido fielmente aquélla. Todo lo contrario: Picasso combina elementos de forma y de color sugeridos por el mundo exterior, pero simplificados, hasta lograr un conjunto de gran valor estético.

Actitud semejante hacia la realidad observan los matemáticos contemporáneos. Kiratowski y Hausdorff construyen espacios topológicos a los que sólo con dificultad se les ven los elementos tomados de la realidad que contienen. Kuratowski inicia la construcción diciendo que espacio topológico es un conjunto de elementos cualesquiera en el que se ha definido una correlación que hace corresponder, a cada subconjunto, otro llamado su *cerradura*. A las *cerraduras* se les imponen condiciones llamadas axiomas de Kuratowski. Es posible encontrar en la realidad objetos que tengan estructura semejante a la de los espacios de Kuratowski, pero es difícil señalar el parecido. Lo mismo sucede en las pinturas de Picasso: es difícil señalar de qué objeto real están tomados los elementos de forma y de color; en la matemática: es difícil señalar qué fenómenos reales tienen la estructura del objeto matemático. La relación con la realidad es muy floja. Hay objetos reales remotamente semejantes a los objetos que pinta Picasso en su época ósea; hay objetos reales que tienen estructura que remotamente se parece a la de los espacios de Kuratowski. Tanto en el arte como en la ciencia, los valores culturales creados están unidos a objetos remotamente semejantes a objetos reales.

Junto a las Escuelas Surrealista y Cubista se ha desarrollado otra, llamada Expresionista. En esta escuela, el pintor altera los colores y las formas reales para producir un conjunto estético.

En la ciencia hay algo análogo. El científico tiene que alterar un tanto las cualidades de los objetos reales para poder estudiarlos matemáticamente. Un ejemplo típico es el de la hidrodinámica. El agua postulada en esta disciplina científica no es el agua real, aunque se parece bastante a ésta. De los postulados de la hidrodinámica es fácil ver que se está considerando un líquido.

Como en *Los Caballos* de Franz Marc aquí se reconoce la relación con la realidad con facilidad. Pero el líquido de la hidrodinámica matemática no es el agua real; difiere bastante de ésta. Por muchas décadas no pudo utilizarse la hidrodinámica matemática para predecir el comportamiento del agua real. No es sino hasta hace pocos años cuando se ha podido aplicar la hidrodinámica teórica al movimiento del agua real. Esto se ha logrado porque el dominio completo del líquido ideal permite agregarle la propiedad de ser viscoso, y asimilarlo más al líquido real. La hidrodinámica teórica tiene, pues, analogías profundas con la Escuela Expresionista en la Pintura. Ambas alteran y distorsionan los objetos reales al absorberlos, pero no los dejan irreconocibles.

CONSIDEREMOS ahora los más recientes desarrollos pictóricos y matemáticos. Después de establecerse en matemáticas la tendencia abstracta —es decir, un alejamiento completo de la realidad, un volver la espalda a buscar estructura matemática en la realidad—, ha habido un cambio de dirección en los últimos tiempos. La guerra obligó a muchos matemáticos que cultivaban antes los aspectos puramente abstractos, a dedicarse a estudiar ramas matemáticas de aplicación militar. Estas ramas tienen contacto íntimo con la realidad. Veamos en un ejemplo concreto cómo se acerca una vez más la matemática a la realidad. El clima es uno de los fenómenos físicos que presentan mayores irregularidades y que ocultaban con más éxito su estructura matemática. Puede hasta llegarse a sospechar que quizás no tenga esa estructura.

Durante la guerra, la aviación militar exigió de un modo cada vez más imperativo que se predijera con precisión el estado del tiempo, y con varios días de anticipación. Este problema difícilísimo fué resuelto en los EE. UU. por Norbert Wiener y en la U.R.S.S. por Kolmogoroff. Estos dos grandes matemáticos estaban dedicados a las disciplinas más abstractas cuando estalló la guerra. Ambos cooperaron con sus gobiernos para acelerar el triunfo de las naciones. Lograron predecir el estado del clima sobre un área extensa, con mucha precisión y anticipación. Sólo que en lugar de predecir, por ejemplo, la temperatura en un lugar, predicen el promedio de las tem-

peraturas en el área. Wiener y Kolmogoroff pueden predecir la temperatura media, la presión media, la humedad media en el área, etc.

Para estas aplicaciones de las matemáticas a asuntos tan refractarios, tuvieron que usar los matemáticos gran parte de las matemáticas creadas en la etapa abstracta. La guerra ha obligado a los matemáticos a buscar estructura matemática en aspectos de la realidad que parecen a primera vista carentes de toda estructura regular. Las matemáticas que ahora se aplican a esa búsqueda no se parecen nada a las que usaba Gauss y tienen mucho del sabor de las matemáticas de la etapa abstracta. Examinemos ahora la actitud de los artistas en la guerra. La Revolución Mexicana conmovió hondamente a los pintores con genio de nuestra patria. La lucha de los campesinos y obreros por sus derechos sacudió en tal forma a México que ya no les fué posible a nuestros grandes pintores seguir ignorando la realidad y continuar cultivando el arte abstracto. Cuando Diego Rivera regresó a México, al triunfo de la Revolución, abandonó el cubismo sintético para atacar de frente el problema social mexicano. Diego inició con sus frescos la nueva escuela de pintura colocando a México a la cabeza del movimiento artístico en el mundo. Su obra encontró eco dentro y fuera de nuestra patria, y a él debemos el principio del movimiento de creación artística mexicana importante.

Ninguna otra nación puede mostrar un trío de pintores de la talla de Diego Rivera, Orozco y Siqueiros. Las pinturas de estos tres mexicanos han mostrado al mundo el camino para volver a encontrar el valor estético en la realidad; en esa realidad tosca y sangrienta de la guerra y la revolución.

Cuando se inició la guerra civil española, Picasso pintaba en estilo surrealista, algunas veces, y otras, en estilo cubista sintético. Ambas formas de pintar están muy lejos de la realidad. El valor estético se gesta con combinaciones abstractas de forma y de color tomadas de la realidad, pero alteradas, combinadas y yuxtapuestas en forma enteramente abstracta. Al saber Picasso que Guernica había sido destruida por aviones enemigos, y que había sido completamente arrasada, recibió un golpe decisivo. El sufrimiento de los habitantes de Guernica le laceró el corazón. Su dolor lo empujó a pintar el Mural de Guernica. En este cuadro se exponen los sufri-

mientos de hombres y bestias durante un bombardeo aéreo. La destrucción completa del pueblo estuvo asociada con enormes dolores físicos y espirituales de sus habitantes. Fué la guerra la que hizo que Picasso volviera la vista hacia la realidad y buscara el valor estético en escenas que parece, en un examen superficial, que no lo tienen. La escena dramática de la destrucción de Guernica, llena de terror y de dolor, es el tema con el que gesta Picasso su pintura de enorme valor estético. Tanto en la pintura como en las matemáticas se vuelve la atención de los creadores hacia la realidad, y fué la guerra la que provocó el cambio de actitud. El matemático busca ahora la estructura matemática en fenómenos que no parecen tenerla, y el pintor busca el valor estético en escenas que no parecen tenerlo tampoco. Una vez más pintores y matemáticos marchan unidos en una rama ascendente de la producción cultural humana.

Vivimos en una época de búsqueda intensa del valor estético y de la estructura matemática en el Universo.



# ESCULTURA Y CIENCIA

MEDITACIONES EN TORNO A LAS  
TERRACOTAS DE ORTIZ MONASTERIO

Por el Dr. Carlos Graef Fernández

La cultura de un pueblo en una época es única, pero se manifiesta de muy distintas maneras en las diferentes artes y ciencias. Se trata del mismo espíritu buscando expresarse, por medio de superficies que limitan volúmenes en las esculturas, por medio de melodías y armonías en la música, y por medio de relaciones abstractas en las matemáticas. Las creaciones artísticas y científicas gestadas por un pueblo en una misma etapa de su historia son realizaciones diversas de una misma cultura, y todas ellas acusan una unidad de estilo. El que mire profundamente podrá ver entonces, detrás de una escultura o de un razonamiento matemático, el espíritu único que se manifestó de modos diversos porque usó medios de expresión distintos. Una misma sensibilidad espiritual se exhibe de maneras muy desemejantes cuando lo hace a través de materiales y artificios muy diferentes entre sí. En la creación artística y científica impone el medio de expresión usando su característica propia, y es ésta la que salta más a la vista, la que está más próxima a la superficie, la que oculta la unidad de estilo de las diversas manifestaciones culturales, subrayando las diferencias que existen entre ellas. No nos debe sorprender que con colores y líneas en un lienzo se obtengan resultados muy distintos que con relaciones entre objetos matemáticos.

Oswald Spengler hace de las semejanzas esenciales entre todas las creaciones culturales de una época el *leit motiv* de su *Decadencia de Occidente*. Fué este valiente filósofo de la historia quien acuñó el giro "afinidades morfológicas" para designar dichas analogías fundamentales, y esta expresión ha pasado a enriquecer el acervo de todos los idiomas cultos.

Hay un arte que utiliza las formas como medio de expresión por excelencia: la escultura. Lo que los ojos del observador contemplan al ver una escultura, es un conjunto de superficies que limitan volúmenes. El material del que está hecho la escultura sólo se exhibe por su superficie. Se ve la frontera entre el material y la atmósfera, pero no se penetra en el interior del volumen. El escultor nos habla por medio de superficies.

Hay una disciplina científica que estudia las superficies: la geometría. La geometría estudia en toda su generalidad a estos entes. El geómetra es el científico que se dedica a las superficies.

Es pertinente comparar las creaciones de los artistas que nos conmueven con superficies, que son los escultores, con las creaciones de los científicos que nos revelan conocimientos de las superficies, que son los matemáticos. Antes de efectuar la comparación quiero justificar el uso del giro "creación científica". A primera vista parece que en la ciencia hay descubrimientos y no creaciones. Ninguno que conozca las matemáticas contemporáneas podrá dudar de lo justo que es hablar de creación científica. Hay tanta libertad para el espíritu en la creación matemática como en la artística. Los espacios de más de tres dimensiones son creaciones puras de los geómetras. Las reglas de juego en esos espacios también son hijas del arbitrio casi ilimitado del pensador. Una vez que el geómetra ha postulado un espacio de 6 dimensiones tiene una libertad absoluta para imponerle a ese espacio el comportamiento que él quiera. Puede fijar arbitrariamente la fórmula para medir distancias, puede poblar a ese espacio de objetos de su imagina-

Escultura y ciencia  
C. GRAY I.

ción. En esa libertad del matemático para crear están de acuerdo científicos y filósofos de la ciencia. En la fascinante obra del filósofo norteamericano de extracción española, Santayana, llamada *Persons and Places, the Background of my life*, dice este profundo pensador: "Si mis maestros hubieran empezado por decirme que las matemáticas eran un puro juego con presuposiciones, y que estaban completamente en el aire, yo hubiese quizás sido un buen matemático, porque yo soy feliz en el reino de las esencias." Habiendo pues creación en el arte y en la ciencia, veamos cuáles son las semejanzas esenciales, las afinidades morfológicas entre la escultura y la geometría, el arte y la ciencia de las superficies. Hace más de cinco mil años ya había geometría y ya había escultura en Egipto. Fué en el delta del Nilo en donde nació la geometría, y allí también fué donde se desarrolló una escultura vigorosa. Examinemos ambas actividades culturales en busca de las afinidades morfológicas. La geometría egipcia es utilitaria. Año tras año el Nilo se desbordaba, arrojando sobre sus riberas limo fecundo. Este lodo fertilizante que hizo posible la agricultura egipcia, borraba cada vez los linderos de los terrenos. Después de que se retiraban las aguas había que deslindar nuevamente las posesiones de cada agricultor. De allí nace la necesidad imperiosa de una geometría, de una ciencia que permita reconstruir con fidelidad los límites de las parcelas. La geometría egipcia es agrimensura, medición del agro. La geometría en Egipto es la técnica de reconstruir los límites: jamás perturbó a un egipcio una consideración de geometría teórica. Nunca se cultivó en esa cultura la geometría por interés en ella misma. La geometría de los egipcios es una ciencia aplicada.

La escultura egipcia es el arte de construir refugios para el alma del faraón muerto. La estatua de un rey es un albergue para su alma después de su muerte. El centro de gravedad de la escultura está fuera de ese arte. No se hace escultura por motivos estéticos, se hace escultura a fin de crear recintos para las almas de los desaparecidos.

Para el egipcio, la geometría como ciencia carece de interés; la geometría es una técnica útil. La escultura como arte carece de interés; la escultura es para él la técnica de crear habitaciones para las almas de los difuntos. Nunca perturbó la paz espiritual de un escultor egipcio alguna consideración estética.

El hecho de que los centros de gravedad de la geometría y la escultura estuviera en Egipto fuera de esas actividades culturales, no quiere decir que los egipcios no lograron creaciones maravillosas. Los escultores egipcios arrancaron una sonrisa a un material tan ingrato como el granito de granos gruesos del

Noreste de África. En la estatua de alabastro del faraón Micerino lograron una representación maravillosa de la majestuosa tranquilidad con la que el alma del rey debe contemplar el fluir de los milenios. Los geómetras egipcios establecieron fórmulas para calcular áreas de triángulos y cuadriláteros, y supieron obtener el volumen de la pirámide truncada.

Los griegos bebieron en fuentes egipcias, pero gestaron una cultura original y grandiosa. Fueron titanes en la ciencia y en el arte. Todas sus creaciones llevan el sello de su espíritu.

Analicemos de cerca la geometría griega. ¿Cuáles son los objetos de los que se ocupa? El geómetra griego estudia principalmente a la recta y al círculo. En la realidad física no existen ni la una ni el otro. Un hilo tendido puede sugerir la existencia de una recta, pero un hilo tendido no es una recta. La recta se obtiene por idealización del objeto real: hilo tendido. El disco del sol puede sugerir un círculo, pero el disco del sol no es un círculo perfecto. El círculo de la geometría se obtiene por idealización del disco solar y del disco de la luna. El pensador griego opinaba con Platón que la recta y el círculo de la geometría eran perfectos e ideales, y que sus materializaciones, como el hilo tendido, eran imperfectas. La superficie tranquila del agua de un lago sugiere la existencia del plano de la geometría; pero el plano de la ciencia es ideal y perfecto, y la superficie de un lago tiene realidad material y es imperfecta. En la superficie del agua flotan algunas plantas acuáticas; una que otra burbuja de aire interrumpe la monotonía del plano. La brisa ondula de cuando en vez el espejo de agua.

La realidad física es para el geómetra griego una fuente de sugerencias. Los objetos de su ciencia los obtiene por idealizaciones de algunos objetos materiales. El escultor griego adopta ante el mundo de la realidad física la misma actitud que el geómetra. La Venus de Milo no es la reproducción fiel de una mujer real, es una idealización radical de la mujer. No existe mujer real alguna que tenga la belleza ideal de esa escultura. Para el griego la Venus de Milo es ideal y perfecta, la mujer real es imperfecta. ¡Quizás sean las pequeñas imperfecciones y desviaciones del ideal las que hagan tan atractivas y adorables a las mujeres imperfectas y reales! El discóbolo de Miron es un joven, idealizado, perfecto. No existió jamás hombre real del cual sea el discóbolo una copia fiel. El escultor griego idealiza. La realidad física es una fuente de sugerencias e inspiraciones, pero las esculturas son idealizaciones de esa realidad.

El mismo proceso de idealización conduce de un hilo tendido a una recta ilimitada, y de una mujer real

a la Venus de Milo; idealizando se convierte la tersa superficie de un lago en un plano perfecto e infinito, y un joven real en el discóbolo de Mirón.

Ciencia y Arte de los griegos son procesos de idealización. La realidad física es para ambos una fuente de sugerencias y de inspiración.

En la geometría, la creación fué caótica hasta la segunda mitad del siglo XIX. Los geómetras creaban sin saber el principio ordenador que da unidad y armonía a su ciencia. Fué un matemático alemán, Felix Klein, quien encontró este principio. En 1878 el entonces joven matemático de Göttingen, Klein, se propuso a sí mismo el problema: "¿Qué es la geometría?" La pequeña ciudad de Göttingen le pareció a Klein todavía demasiado bulliciosa para investigar en calma y paz el problema, y se retiró a la de Erlangen, ciudad universitaria diminuta. En Erlangen meditó un año sobre el problema. Cuando regresó de Erlangen traía una definición de geometría que arrojó luz sobre toda la creación geométrica efectuada hasta la época, y que hizo ver de inmediato nuevos horizontes en esa disciplina científica. La definición de Klein es una de las pocas definiciones fecundas que hay en la ciencia. Veamos qué afirma Klein sobre la geometría.

Una geometría parte de un acervo de objetos: las figuras geométricas. Estas figuras se someten a transformaciones, que son deformaciones más o menos fuertes. Hasta ahora se han considerado casi exclusivamente deformaciones de las figuras que no provoquen rupturas. Los matemáticos todavía no utilizan sistemáticamente transformaciones en las que se construya una nueva figura con los pedazos de la original. En la geometría se usan solamente transformaciones continuas, que son las que deforman sin romper. Por radicales que sean las transformaciones a las que se somete una figura, hay relaciones entre los elementos de ésta que no cambian, que son las mismas antes y después de la transformación. Estas relaciones son los invariantes de esa geometría.

Felix Klein definió geometría como la disciplina científica que trata de los invariantes en un grupo continuo de transformaciones.

La definición kleiniana se aclara de un modo completo cuando se examinan algunas geometrías típicas. Analicemos con las ideas de Klein a algunas de las geometrías más conocidas.

La geometría más simple de todas es la elemental métrica. Consideremos como objetos geométricos a los muebles de un salón. Las transformaciones son los movimientos. Si movemos una silla de una posición a otra cualquiera, se conservan todas las rela-

ciones entre los elementos de la misma. Lo único que cambia es la posición de la silla. El largo y ancho del asiento son invariantes en los movimientos. Del mismo modo son invariantes el alto del respaldo, el grueso del asiento, y la longitud de las patas. Una cosa semejante acontece si utilizamos como objeto geométrico a un escritorio. La transformación del escritorio consiste en moverlo de un lugar a otro. Invariantes en esta transformación son el ancho, el largo y el grueso de la plancha. También son invariantes los ángulos rectos que se forman entre muchas de las aristas del mueble. La geometría elemental métrica tiene por grupo continuo de transformaciones al grupo de los movimientos. Los objetos geométricos son figuras cualesquiera. Los invariantes importantes son longitudes. Esta geometría es métrica por esa razón. A esta disciplina científica se le llama geometría del carpintero, porque la descripción de los muebles que fabrica este artesano se hace por medio de los invariantes métricos: de las longitudes. Es posible describir totalmente la forma de un mueble indicando algunas longitudes clave. Lo único que se altera en los movimientos de las figuras son las posiciones en el espacio; toda relación intrínseca de la figura es invariante. Los movimientos son de las transformaciones más mansas que utiliza la matemática.

Otra de las geometrías muy sencillas es la de las semejanzas. Las transformaciones de esta disciplina son las que convierten una fotografía en su ampliación. Si se examinan con detalle la fotografía de una persona y su ampliación, se percibe que existen invariantes. La relación entre la longitud y el ancho de la cabeza se conserva en este tipo de transformaciones. La longitud misma de la cabeza no es la misma en la fotografía y en la ampliación, pero la relación entre esa longitud y el ancho de la cabeza sí lo es. Si en la fotografía el pulgar de la mano izquierda es en longitud una cuarta parte de la longitud de la cabeza, lo mismo acontecerá en la ampliación. Uno de los invariantes principales de la geometría de las semejanzas es la relación de dos longitudes. Otro invariante salta inmediatamente a la vista: el ángulo. En el ejemplo descrito el ángulo formado por el antebrazo y la parte superior del brazo derecho, es el mismo en la fotografía y en la ampliación. Las transformaciones que utiliza la geometría de las semejanzas respetan a los ángulos y a las relaciones de longitudes, pero alteran las dimensiones. De una fotografía se obtienen por transformación de semejanza ampliaciones y reducciones, tan grandes y tan pequeñas como se deseen.

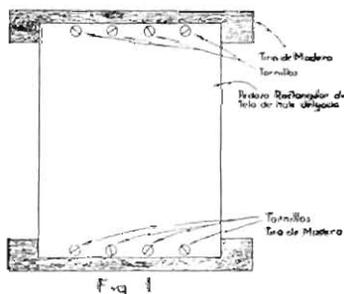
Cuando un escultor hace una reproducción fiel de un modelo real, está ejecutando una transformación

Escultura y relieve  
C. GRACIA P.

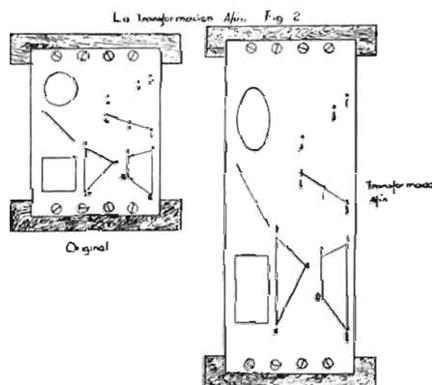
de semejanza. Una estatua ecuestre en la que el caballo y el jinete de bronce son ampliaciones de un caballo real y de un jinete de carne y hueso, no es sino el resultado de una transformación de semejanza ejecutada con la forma del modelo. La escultura académica utiliza exclusivamente a las inofensivas transformaciones de semejanza.

Un grupo de transformaciones más radical que el de las semejanzas es el de las transformaciones afines. Imaginemos un pedazo de hule delgado, altamente deformable, y de forma inicial rectangular. Consideremos que ese hule se halla aprisionado en dos de sus bordes paralelos por tiras de madera a las que está sujeto por medio de tornillos. Supongamos que el geómetra acerca o aleja a su antojo las tiras de madera y que estira y encoge a su arbitrio el pedazo de hule rectangular, procurando siempre que no deje de ser rectangular. (Fig. 1.)

Si al hule se le dibujan figuras en su estado inicial, éstas se deforman cuando se le estira. En una transformación afín un círculo se transforma en una elipse. (Fig. 2.) Tres puntos: A, B, C, que estaban alineados antes de la transformación, siguen estándolo después de la misma. Una recta sigue siendo recta después de sujetarla a una transformación afín. Si de los tres puntos alineados C, D, E, el punto D es el centro del segmento GE, entonces el transformado del punto D será el centro del segmento transformado de GE. Existen pues muchas relaciones invariantes en las transformaciones afines. Los ángulos que habían resistido las semejanzas, no aguantan a las deformaciones afines del hule. Los cuadrados se convierten en paralelogramos. Un invariante importante de la geometría afín es la relación de áreas. Si el área del triángulo MNP es igual a las tres cuartas partes del



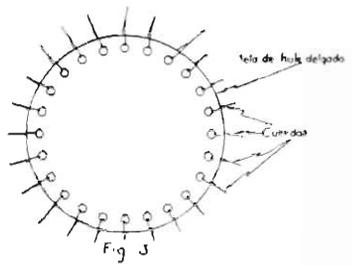
área del cuadrilátero QRST antes de la transformación, entonces el área del triángulo transformado de MNP será igual a las tres cuartas partes del área del cuadrilátero transformado de QRST. Los anónimos escultores del gótico realizaban con sus estatuas transformaciones afines. No existen en la realidad seres humanos con la forma de los santos de la Catedral de Colonia. La figura humana real ha sido sometida a un estiramiento vertical, a una transformación afín. Con esto se logra algunas veces causar la impresión de profundo dolor y tortura en el santo representado. El Greco también utiliza las transformaciones afines. No siempre se logra el mismo efecto estético al aplicar una de estas deformaciones. Artistas y científicos las han utilizado, los primeros en persecución del es-



quivo valor estético, y los segundos con objeto de encontrar relaciones más profundas entre los elementos de una figura.

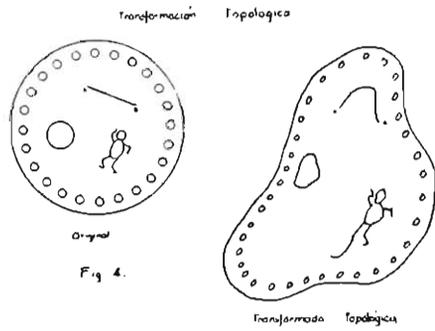
La geometría que utiliza las transformaciones más radicales es la topología combinatoria o geometría topológica. En esta disciplina se recurre a las deformaciones más fuertes que usa sistemáticamente la matemática. Se admiten en la topología transformaciones tan poderosas como se quiera, con tal de que no provoquen rupturas. Una manera sencilla de hacer visibles algunas transformaciones topológicas se logra por medio de las deformaciones arbitrarias de un pedazo de hule delgado. Considérese un pedazo de tela de hule altamente deformable al que se le han hecho

perforaciones protegidas por ovllos en los bordes. (Fig. 3.)



Por cada perforación se pasa una cuerda. El hule puede deformarse de un modo arbitrario, tirando de las cuerdas. Todas las figuras que se puedan trazar en el hule sufren una transformación topológica al deformarse éste. Como se ve fácilmente, las rectas no se transforman en rectas en una deformación topológica. Un círculo se transforma en una curva cerrada. La propiedad de una curva simple —que no se corte a sí misma— de ser cerrada, se conserva en las transformaciones topológicas. Uno de los teoremas típicos de esta geometría es: toda curva cerrada y simple divide al plano en dos regiones, una interior a la curva y otra exterior. Las transformaciones topológicas son tan radicales que a primera vista parece que no será posible encontrar invariantes de las figuras. Pero es muy grande el número de estos invariantes que se han encontrado en los desarrollos recientes de esta disciplina geométrica. La topología es una ciencia que se halla en plena gestación. A diario

aparecen artículos en las revistas científicas, conteniendo resultados nuevos relativos a esta geometría. La topología combinatoria es la geometría de nuestra era. (Fig. 4.) En el espacio de tres dimensiones en el que vivimos es también posible efectuar transformaciones topológicas. Imaginemos una esfera de hule delgado inflada de aire. Se ejecuta una transformación topológica cuando se deforma a la esfera sin romperla, y sin aplastarla tanto que se toque una parte del hule con otra. Todas las superficies que se obtienen de la esfera clásica por deformaciones del tipo descrito se llaman equivalentes topológicas de la esfera, o esferas topológicas. Como la superficie de un



cubo y la de un cilindro tapado, se pueden obtener por deformación topológica de la esfera clásica, tanto el cubo como el cilindro son esferas para la topología. La geometría de nuestra era, la topología, llama esferas al cubo, al octaedro y al cilindro. No todas las superficies cerradas son esferas topológicas. Considérese por ejemplo la cámara de una llanta de automóvil. La superficie de la cámara inflada se llama toro en geometría. De una esfera de hule nunca se puede obtener, sin romperla y volverla a pegar, un toro. No es posible deformar a una esfera hasta convertirla en un anillo como es la cámara de una llanta.

*Escultura y ciencia*  
C. GRAEF F.

Hay muchas superficies que son toros topológicos y muchas otras que son esferas topológicas.

El escultor contemporáneo realiza transformaciones topológicas. La figura sedente de Ortiz Monasterio guarda con una mujer real la misma relación que una esfera topológica con una esfera clásica. El escultor deforma para pasar del modelo a la escultura. Es un síntoma de la unidad de estilo de nuestra cultura el que escultores y matemáticos estén explorando las mismas transformaciones. Los artistas ejecutan las deformaciones en busca del valor estético y los científicos las efectúan en busca de las relaciones esenciales entre las formas. Los bailarines de Ortiz Monasterio están tan lejos de una reproducción académica como lo está el toro topológico del otro clásico. Sin comunicarse explícitamente las ideas que los mueven al crear, artistas y científicos de una misma época no pueden ser sino hijos de su cultura y de su tiempo. Ambos expresan con medios distintos el mismo *Zeitgeist*. Simultáneamente llegaron la es-

cultura y la geometría a la transformación topológica.

Hay que reconocer, sin embargo, que los artistas no se han detenido en las transformaciones continuas. Más sensibles quizás que los científicos, los pintores y escultores han adelantado a éstos y se han atrevido ya a romper. Los pintores del cubismo sintético rompieron su modelo en elementos de forma y de color y recombinan éstos para formar un diseño original. Ortiz Monasterio también procede de tal modo. Con los elementos de forma y de color de un modelo construye una nueva forma policroma. Muchas veces agrega él elementos de forma y de color que no aparecen en el modelo. Es muy probable que en la ciencia estemos en la aurora del estudio sistemático de grupos de transformaciones discontinuas, de deformaciones con ruptura.

En los hitos de la creación cultural, ya sea ésta artística o científica, hay semejanzas esenciales tan íntimas, que dejan atónito a quien por primera vez las atisba.



### ESPACIO MATEMATICO Y ESPACIO FISICO \*

El objeto de este trabajo es presentar la diferencia que hay entre el espacio físico y aquellos espacios matemáticos que se utilizan para estudiarlo. El concepto de espacio tiene en las matemáticas una amplitud muy grande. En esta ciencia se le llama "espacio" a un conjunto de objetos que satisface unas condiciones muy generales. Los espacios matemáticos que son de un interés fundamental para analizar el espacio físico, son los espacios métricos de números. Expondré a continuación la forma en que se llegó a estos conceptos, además de su definición contemporánea.

Coloquémonos frente a una línea recta y aceptemos ingenuamente la geometría de Euclides. Elijamos en esta recta un punto fijo  $O$ , que llamamos origen, y desde el cual medimos distancias. Escojamos además una unidad de longitud  $u$  para poder efectuar las mediciones anunciadas. Por último seleccionemos en la recta un sentido positivo. El origen  $O$  divide entonces a la recta en dos partes: una es el lado positivo y la otra el lado negativo.

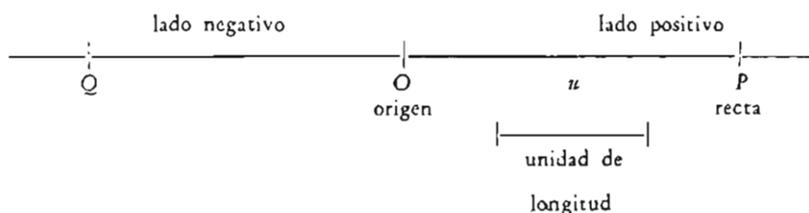
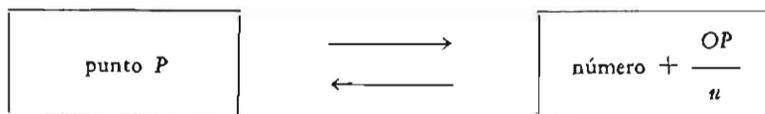


Figura 1

Fijémonos ahora en un punto  $P$  de la recta. A ese punto le hacemos corresponder un número real que es la distancia del origen al punto, afectada del signo

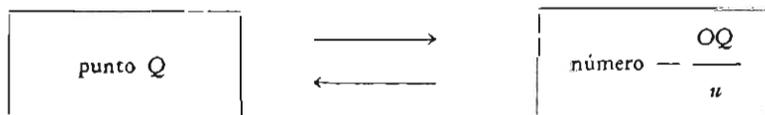
\* Exposición presentada en el Seminario, en su reunión mensual del lunes 28 de marzo de 1955, en el Auditorio de Psicología de la Facultad de Filosofía y Letras, en la Ciudad Universitaria.

“+” que indica que  $P$  está en el lado positivo de la recta. La distancia la medimos con la unidad de longitud  $u$ . La correspondencia indicada se puede simbolizar como sigue:



La fracción  $\frac{OP}{u}$  significa la distancia  $OP$  medida con la unidad de longitud  $u$ ; el signo “+” indica que  $P$  está en el lado positivo de la recta. El número correspondiente al punto  $P$  se llama “abscisa de  $P$ ”.

Consideremos ahora el punto  $Q$ . A ese punto le hacemos corresponder un número real que es la distancia del origen al punto; afectado del signo “-”, que indica que  $Q$  está en el lado negativo de la recta. Simbólicamente se escribe:



El número correspondiente al punto  $Q$  se llama “abscisa de  $Q$ ”.

Con el procedimiento descrito se puede establecer una correspondencia entre el conjunto de los puntos de una recta y el conjunto de los números reales. A cada punto de la recta le corresponde un número real. Si el punto está en el lado positivo de la recta le corresponde un número positivo; si el punto está en el lado negativo de la recta, le corresponde un número negativo. El valor absoluto del número es en ambos casos la distancia del origen al punto en cuestión, medida con la unidad de longitud que se haya elegido.

Si se da un número real cualquiera, existe siempre en la recta un punto que le corresponde. Si el número real es positivo, el punto correspondiente está del lado positivo de la recta; si el número real es negativo, el punto correspondiente está del lado negativo de la recta. El número real es la distancia del origen al punto en cuestión.

La correspondencia entre el conjunto de los puntos de una recta y el conjunto de los números reales tiene estas características:

1) A cada punto de la recta le corresponde un número real, y solamente ese número real;

2) A cada número real le corresponde un punto de la recta, y solamente ese punto de la recta.

Una correspondencia entre dos conjuntos, que tenga estas características, se llama "correspondencia biunívoca". Hemos establecido entonces una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos de una recta y el conjunto de los números reales. Se puede utilizar esa correspondencia para hablar un lenguaje geométrico al tratar de los números reales. Como a cada número real le corresponde un punto de la recta, se puede llamar "punto" al número real mismo. Cada número real es entonces un punto. Como la recta es un espacio geométrico: un espacio euclidiano de una dimensión, el conjunto de todos los números reales puede considerarse como un espacio. Este conjunto de todos los números reales se llama "espacio de números de una dimensión"; a cada número real se le llama "punto" de ese espacio.

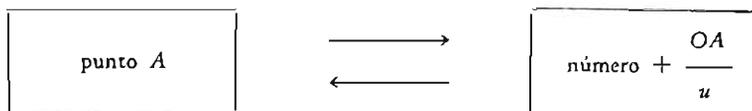
La abscisa de un punto se designa también como "coordenada del punto".

Coloquémonos ahora frente a un plano y continuemos en una actitud de aceptación ingenua de la geometría de Euclides. Tracemos en ese plano dos rectas perpendiculares entre sí, y llamemos "origen" a su punto de intersección, que designamos con  $O$ . A las rectas les llamaremos "ejes de coordenadas". A una de ellas le llamamos "eje de las abscisas", y a la otra "eje de las ordenadas".

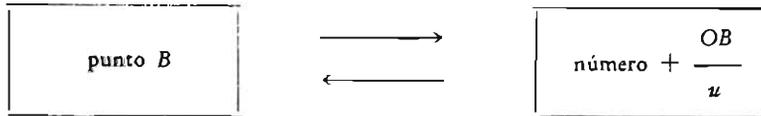
El origen divide a cada eje en dos partes. Elijamos una de esas partes en cada eje como lado positivo. Fijemos además una unidad de longitud  $u$ .

Consideremos ahora el punto  $P$ . Tracemos por él dos rectas paralelas a los ejes coordenados. Las intersecciones de esas rectas con los ejes son las proyecciones de  $P$  sobre los mismos.

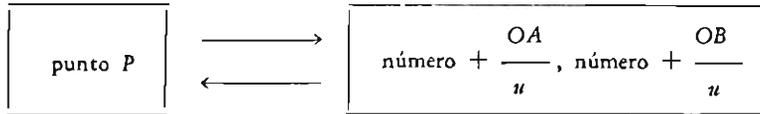
El punto  $A$  es la intersección, con el eje de las abscisas, de la paralela trazada por  $P$  al eje de las ordenadas. Ese punto  $A$  se llama "proyección de  $P$  en el eje de las abscisas". El punto  $B$  es la intersección, con el eje de las ordenadas, de la paralela trazada por  $P$  al eje de las abscisas. Al punto  $B$  se le llama "proyección de  $P$  en el eje de las ordenadas". Al punto  $A$  se le puede hacer corresponder un número real como se describió antes:



Al punto  $B$  también se le puede hacer corresponder un número real:



Al punto  $P$  se le hace corresponder la pareja de números reales siguientes:



Al punto le corresponde una pareja de números reales que se enuncia siempre en este orden: el primer número es el que corresponde a la proyección de  $P$  en el eje de las abscisas; el segundo número es el que corresponde a la proyección de  $P$  en el eje de las ordenadas. Se le llama "abscisa de  $P$ " al número que corresponde al punto  $-A$ — proyección de  $P$  en el eje de las abscisas. Se le llama "ordenada de  $P$ " al número que corresponde al punto  $-B$ — proyección de  $P$  en el eje de las ordenadas.

Con el procedimiento descrito aquí se puede hacerle corresponder a todo punto del plano una pareja de números reales: su abscisa y su ordenada. A continuación se exhibe una tabla en la que aparecen las abscisas y ordenadas de los puntos marcados en la figura 2.

TABLA 1

Punto	Abscisa	Ordenada
$P$	número + $\frac{OA}{u}$	número + $\frac{OB}{u}$
$Q$	número - $\frac{OD}{u}$	número + $\frac{OC}{u}$
$R$	número - $\frac{OE}{u}$	número - $\frac{OF}{u}$
$S$	número + $\frac{OG}{u}$	número - $\frac{OH}{u}$

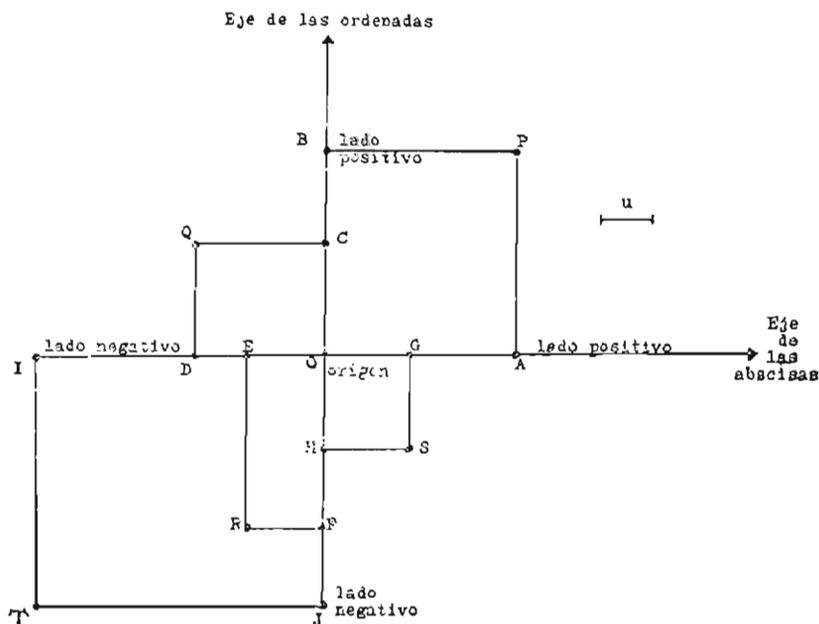
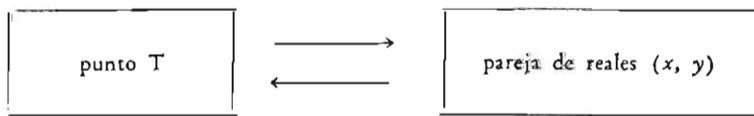


Fig. 2

A la abscisa de un punto se le designa con " $x$ "; el eje de las abscisas se llama también "eje de las  $x$ ". A la ordenada de un punto se le designa con " $y$ "; el eje de las ordenadas se llama también "eje de las  $y$ ". Dada una pareja cualquiera de números reales, ésta corresponde a un solo punto del plano. Sea  $(x, y)$  una pareja tal. La  $x$  representa un número real, y la  $y$  representa también a un número real. Al número real  $x$  le corresponde un punto, p. e. el punto  $I$  (figura 2) en el eje de las abscisas. Al número real  $y$  le corresponde un punto —p. e. el punto  $J$ — en el eje de las ordenadas. Trazando por  $I$  y por  $J$  paralelas a los ejes de coordenadas se obtiene el punto  $T$  que corresponde a la pareja de números reales  $(x, y)$ . Simbólicamente se puede escribir esta correspondencia como sigue:



Hemos establecido una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos del plano y el conjunto de las parejas de números reales: a cada punto del plano le corresponde una pareja de números reales que son su abscisa y su ordenada; a cada pareja de números reales le corresponde un punto del plano. Es necesario agregar que se trata de parejas ordenadas de números reales; es decir que importa mucho en qué orden se escriban esos números: primero debe enunciarse la abscisa y en seguida la ordenada.

El plano se considera como un espacio geométrico de dos dimensiones. Podemos trasladar el lenguaje geométrico del plano al conjunto de todas las parejas de números reales. Le llamamos "punto" a cada pareja ordenada de números reales; y le llamamos "espacio de números de dos dimensiones" al conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales. Con este lenguaje son puntos las siguientes parejas:

$(-3, -1.75)$ ;  $(2, -8.6)$ ;  $(3.17, -9.14)$ ;  $(-17.8, -15.4)$ ;  $(0.0)$ , etc.

Cada pareja es un punto particular. El conjunto de todas las parejas posibles es el espacio de números de dos dimensiones. Las parejas  $(3, 5)$  y  $(5, 3)$  son dos puntos distintos.

El filósofo y matemático francés René Descartes fué quien estableció por primera vez, la correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos de un plano y el conjunto de las parejas ordenadas de números reales. Al llamarle punto a una pareja ordenada de números reales, se está andando el camino iniciado por Descartes hasta sus últimas consecuencias. Los espacios de números son un fruto del fecundo pensamiento cartesiano. En honor de Descartes se llaman la abscisa y la ordenada de un punto: coordenadas cartesianas. Los ejes de coordenadas son los ejes cartesianos.

Presentaré ahora a ustedes la forma de cómo se introduce una métrica en el espacio de números de dos dimensiones. Para que se vea con claridad este proceso quiero recurrir a un modelo material del plano. Imagínense ustedes una tela de hule muy delgada, que representa aproximadamente una porción del plano. Tracemos en esa tela los ejes cartesianos. A cada punto de la tela de hule le corresponde una pareja de números reales. Para facilitar la exposición, imaginemos que a cada punto de la tela de hule le hemos fijado una etiqueta que tiene escritos dos números: la abscisa y la ordenada del punto. Sometamos ahora a la tela de hule a una deformación. Estiremosla en algunos lugares; dejemos que se contraiga en otros. Cada punto de la tela conserva su etiqueta en esta deformación. De manera que después de efectuada ésta, puede seguirse afirmando que a cada punto de la tela le corresponde una pareja de números reales, y a cada pareja de números

reales le corresponde un punto de la tela. La correspondencia biunívoca no predica nada sobre las distancias entre los puntos. ¿Qué distancia hay entre el punto  $(-3.15, 6.845)$  y el punto  $(2.178, 3.4)$ ? En la tela de hule hay dos puntos que tienen esas etiquetas. En la deformación podemos alejar a esos puntos, o acercarlos, a nuestro arbitrio. Para tener un modelo aritmético del plano euclidiano, no basta con llamarle punto a una pareja ordenada de números reales, y con identificar al plano con el conjunto de todas esas parejas; es necesario agregar la fórmula para medir las distancias.

Consideremos dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  (figura 3) en el plano geométrico. Sea  $x_1$  la abscisa de  $P_1$  y  $y_1$  su ordenada. Sea  $x_2$  la abscisa de  $P_2$ , y  $y_2$  su ordenada. Los datos enunciados aquí se escriben en forma breve como sigue:

$$P_1(x_1, y_1); P_2(x_2, y_2)$$

El símbolo " $P_1$ " es el nombre de un punto del plano. La pareja  $(x_1, y_1)$  es una pareja de números reales correspondiente a ese punto. El símbolo  $P_2$  es el nombre de otro punto del plano. La pareja  $(x_2, y_2)$  es una pareja de números reales correspondiente a ese punto. Nuestro propósito es calcular la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  a partir de los cuatro números:  $x_1, y_1, x_2, y_2$ .

Trazando por  $P_1$  una paralela al eje de las  $x$ , y por  $P_2$  una paralela al eje de las  $y$ , se genera un triángulo rectángulo  $P_1 Q P_2$ . La longitud de la hipotenusa de

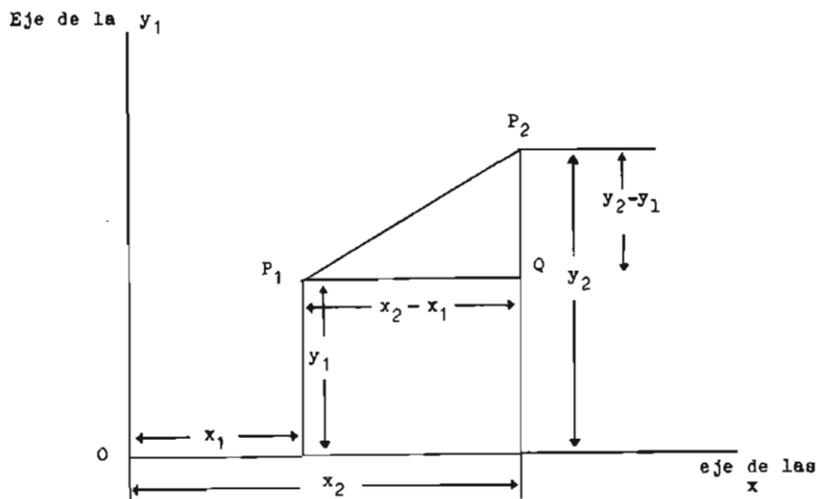


Fig. 3

ese triángulo es la distancia que separa a  $P_1$  de  $P_2$ , y es la magnitud que deseamos calcular. La longitud del cateto  $P_1 Q$  es igual a la diferencia  $x_2 - x_1$  de las abscisas de los dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ . La longitud del cateto  $P_2 Q$  es igual a la diferencia  $y_2 - y_1$  de las ordenadas de los dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ . El teorema de Pitágoras que forma parte de la geometría de Euclides permite calcular la longitud de la hipotenusa en términos de las longitudes de los catetos:

$$P_1 P_2 = \left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right|.$$

Esta fórmula nos da la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  en función de las coordenadas de los mismos.

En el espacio de números de dos dimensiones podemos *postular* que la distancia entre los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  es:

$$\left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right|.$$

Habiendo introducido en el espacio de números de dos dimensiones una fórmula para medir distancias, hemos convertido a ese objeto en un *espacio métrico*. La fórmula que se postula está tomada de la geometría euclidiana del plano, que es el espacio geométrico de dos dimensiones. Con esa "métrica" nuestro espacio de números de dos dimensiones se convierte en un espacio métrico euclidiano de dos dimensiones. Quiero insistir en que un espacio métrico de números, euclidiano y de dos dimensiones, puede construirse como sigue:

- 1) Punto de ese espacio es una pareja ordenada de números reales; el primer número es la abscisa  $x$  del punto; el segundo número es la ordenada  $y$  del punto;
- 2) El espacio mismo es el conjunto de todas las parejas ordenadas posibles de números reales;
- 3) La distancia entre la pareja ordenada de números reales  $(x_1, y_1)$  y la pareja ordenada de números reales  $(x_2, y_2)$  es igual a

$$\left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right|.$$

Regresemos a nuestro modelo de la tela de hule. Cada punto de la tela tiene su etiqueta  $(x, y)$  en que está escrita la pareja de números que corresponden a ese punto. Al fijar además la fórmula para medir distancias, quedan fijas las distancias que separan a un punto de todos los otros. A la tela de hule se le da una rigidez absoluta. Ya no hay deformación alguna posible. Toda deformación altera algunas distancias. Al fijar éstas, el hule se hace absolutamente rígido. Se dice que el espacio de números de dos dimensiones es un "espacio medusa" antes de fijarle una métrica. La métrica convierte al espacio medusa en un espacio métrico. El giro "espacio medusa" se utiliza para dar una idea de la completa libertad de deformación que se tiene en un espacio tal.

Los espacios de números le dan al matemático una libertad muy grande. Se cae fácilmente en la tentación de elegir libremente la métrica. Dado un punto  $P_1$  en un espacio de números de dos dimensiones —lo que equivale a dar una pareja ordenada de números reales  $(x_1, y_1)$ —, y dado otro punto  $P_2$  que también es una pareja de números reales  $(x_2, y_2)$ , se ocurre llamarle distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  a un nuevo número que se calcule a partir de los cuatro números dados  $x_1, y_1, x_2, y_2$  de acuerdo con una fórmula cualquiera. Por ejemplo se puede ocurrir llamarle distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  al producto:  $x_1 \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot y_2$ . Tendríamos entonces:

$$P_1 P_2 = x_1 \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot y_2$$

Esta fórmula nos permite calcular la "distancia" entre dos puntos cualesquiera del espacio de números de dos dimensiones. Por ejemplo: se obtiene con esa fórmula para la "distancia" entre  $P_1(3, 5)$  y  $P_2(2, 4)$ :

$$P_1 P_2 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = 120.$$

Una objeción seria a la conveniencia de llamarle "distancia" al producto  $x_1 \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot y_2$ , es que, de acuerdo con esa fórmula, la distancia de un punto a sí mismo no resulta nula. Calculemos la distancia entre  $P_1(3, 5)$  y  $P_2(3, 5)$ . En este caso  $P_1$  y  $P_2$  son un mismo punto. De acuerdo con la fórmula, la distancia entre esos puntos es igual a:

$$P_1 P_2 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 225.$$

Los matemáticos han encontrado conveniente poner unas restricciones a la libertad de elegir una métrica. Se conviene en que la "distancia" entre los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , sea un número que se calcule por medio de una fórmula a partir de los cuatro números  $x_1, y_1, x_2, y_2$ . Técnicamente, se dice que "la dis-

tancia es una función de las coordenadas de los puntos". Simbólicamente esto se escribe como sigue:

$$P_1 P_2 = f(x_1, y_1; x_2, y_2) .$$

Se exige de la distancia que satisfaga ciertas condiciones. En primer lugar se impone que la distancia de un punto a sí mismo sea nula, y que la distancia entre dos puntos desiguales sea siempre positiva. En segundo lugar se exige que la distancia del punto  $P_1$  al punto  $P_2$ , sea igual a la distancia del punto  $P_2$  al  $P_1$ . Y en tercer lugar se exige que la distancia que hay entre  $P_1$  y  $P_2$  sea menor —o cuando mucho igual—, a la suma de las distancias que hay de  $P_1$  a un tercer punto  $P_3$ , y de  $P_3$  a  $P_2$ . Este último requisito se puede expresar diciendo que la distancia que hay de  $P_1$  a  $P_2$  pasando a fuerza por  $P_3$  es mayor —o cuando menos igual— a la distancia simple entre  $P_1$  y  $P_2$ .

A pesar de las restricciones que se imponen al concepto de distancia, tiene el matemático una libertad muy grande para elegir la fórmula que define la distancia entre dos puntos.

A primera vista parece que sería muy fecundo admitir una libertad absoluta para la elección de la métrica. Se vió, empero, que era necesario imponer las tres restricciones mencionadas antes, para que el concepto de distancia condujera a resultados interesantes. A continuación se exponen varios ejemplos de funciones de las coordenadas de dos puntos, algunas de las cuales son "distancias" y otras que no lo son. En todos los casos se les llama  $(x_1, y_1)$  a las coordenadas del punto  $P_1$ , y  $(x_2, y_2)$  a las coordenadas de  $P_2$ .

A la función de esos cuatro números que se analiza se le llama  $f(x_1, y_1; x_2, y_2)$ .

*Primer ejemplo:* Sea

$$f(x_1, y_1; x_2, y_2) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2.$$

Con esta fórmula se obtiene para los puntos  $P_1(2, 5)$  y  $P_2(2, 5)$ :

$$f(2, 5; 2, 5) = 2^2 + 5^2 + 2^2 + 5^2 = 4 + 25 + 4 + 25 = 58.$$

Nuestra fórmula no define una métrica —no se puede utilizar para medir distancias—, porque con ella se obtendría 58 para la "distancia" del punto  $(2, 5)$  a sí mismo, en vez de cero como exigen las restricciones.

*Segundo ejemplo: Sea*

$$f(x_1, y_1; x_2, y_2) = (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2.$$

Consideremos los puntos  $P_1(3, 2)$  y  $P_2(3, 5)$ . Se trata de dos puntos desiguales. De la fórmula se obtiene:

$$f(3, 2; 3, 5) = (3 - 3)^2 (5 - 2)^2 = 0^2 \cdot 3^2 = 0 \cdot 9 = 0.$$

Esta fórmula no se puede utilizar para definir una métrica, porque con ella resultaría la distancia entre los dos puntos desiguales  $(3, 2)$  y  $(3, 5)$  igual a cero, y no sería positiva como lo exige el primer requisito.

*Tercer ejemplo: Sea*

$$f(x_1, y_1; x_2, y_2) = \left| \sqrt[4]{(x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4} \right|.$$

Esta fórmula sí define una métrica, sí se puede utilizar para medir distancias. La distancia del punto  $P_1(x_1, y_1)$  a sí mismo resulta:

$$f(x_1, y_1; x_1, y_1) = \left| \sqrt[4]{(x_1 - x_1)^4 + (y_1 - y_1)^4} \right|,$$

$$f(x_1, y_1; x_1, y_1) = \left| \sqrt[4]{0^4 + 0^4} \right| = \left| \sqrt[4]{0 + 0} \right| = \left| \sqrt[4]{0} \right| = 0.$$

Si se trata de dos puntos desiguales, por lo menos una de las dos diferencias  $x_2 - x_1$ ,  $y_2 - y_1$  es distinta a cero. La suma  $(x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4$  es siempre positiva. La cuarta raíz de esa suma existe, y su valor absoluto es positivo. Nuestra fórmula satisface el requisito de que la distancia entre dos puntos desiguales sea positiva, y de que la distancia de un punto a sí mismo sea nula.

Calculemos con esa fórmula la distancia del punto  $(2, 1)$  al punto  $(5, 4)$ , y compáremosla con la distancia del punto  $(5, 4)$  al punto  $(2, 1)$ .

$$\begin{aligned} f(2, 1; 5, 4) &= \left| \sqrt[4]{(5 - 2)^4 + (4 - 1)^4} \right| = \left| \sqrt[4]{3^4 + 3^4} \right| = \\ &= \left| \sqrt[4]{81 + 81} \right| = \left| \sqrt[4]{162} \right| = + 3.568 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5, 4; 2, 1) &= \left| \sqrt[4]{(2-5)^4 + (1-4)^4} \right| = \left| \sqrt[4]{(-3)^4 + (-3)^4} \right| = \\ &= \left| \sqrt[4]{81 + 81} \right| = \left| \sqrt[4]{162} \right| = + 3.568 . \end{aligned}$$

Se ve fácilmente que nuestra fórmula satisface el requisito de que la distancia de  $P_1$  a  $P_2$  resulte siempre igual a la distancia de  $P_2$  a  $P_1$ .

Calculemos ahora la distancia de  $P_1(2, 1)$  a  $P_2(5, 4)$  pasando a fuerza por  $P_3(4, 3)$ :

$$\begin{aligned} \text{distancia } P_1 P_3 &= \left| \sqrt[4]{(4-2)^4 + (3-1)^4} \right| = \left| \sqrt[4]{2^4 + 2^4} \right| = \\ &= \left| \sqrt[4]{16 + 16} \right| = \left| \sqrt[4]{32} \right| = 2.398 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{distancia } P_3 P_2 &= \left| \sqrt[4]{(5-4)^4 + (4-3)^4} \right| = \left| \sqrt[4]{1^4 + 1^4} \right| = \\ &= \left| \sqrt[4]{1 + 1} \right| = \left| \sqrt[4]{2} \right| = 1.189 . \end{aligned}$$

La distancia de  $P_1$  a  $P_2$  pasando forzosamente por  $P_3$  es igual a: distancia  $P_1 P_3$  + distancia  $P_3 P_2 = 2.398 + 1.189 = 3.587$ . La distancia directa entre  $P_1$  y  $P_2$  es igual a 3.568 como se había calculado antes.

Se puede demostrar, en general, que la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  pasando a fuerza por  $P_3$  es mayor, o cuando menos igual, a la distancia directa entre  $P_1$  y  $P_2$ .

Esta fórmula sí satisface todos los requisitos que se exigen al concepto de distancia.

El espacio de números de dos dimensiones que consiste en el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales, se convierte en un espacio métrico de dos dimensiones si se conviene en medir las distancias entre los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  con la fórmula:

$$f(x_1, y_1; x_2, y_2) = \left| \sqrt[4]{(x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4} \right| .$$

En general, se dice que un espacio de números se convierte en un espacio métrico si se introduce una fórmula para medir distancias. A la distancia se le exigen las condiciones que se mencionaron antes detalladamente. Para expresar simbólicamente estas condiciones convengamos en designar con  $d(P_1, P_2)$  a la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . Los requisitos que debe satisfacer la distancia, se pueden escribir entonces como sigue:

- 1a)  $d(P, P) = 0$  ;
- 1b)  $d(P_1, P_2) > 0$  cuando  $P_1 \neq P_2$  ;
- 2)  $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$  ;
- 3)  $d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2)$  .

El requisito 1a) dice en palabras: la distancia de un punto a sí mismo es nula. El requisito 1b) significa: la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  es positiva si los dos puntos son desiguales. La condición 2) significa que la distancia de  $P_1$  a  $P_2$  es igual a la distancia  $P_2$  a  $P_1$ . El último requisito —el 3)— significa que la distancia directa entre  $P_1$  y  $P_2$  es menor, o cuando mucho igual, a la distancia entre esos puntos pasando a fuerza por  $P_3$ .

El enorme alcance de la generalización que hicieron los matemáticos del concepto de distancia se percibe en el ejemplo de la superficie de una esfera. Consideremos la esfera terrestre. En esa superficie se localiza un punto por medio de dos números: su latitud y su longitud. Llamemos  $x$  a la latitud e  $y$  a la longitud. Esos dos números son ángulos. Sea  $R$  el radio de la esfera terrestre. Consideremos la distancia entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ ; el primero de latitud  $x_1$  y de longitud  $y_1$ ; el segundo de latitud  $x_2$  y de longitud  $y_2$ . La distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  es igual a:

$$d(P_1 P_2) = R \operatorname{ang} \cos [\operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 + \cos x_1 \cos x_2 \cos (y_2 - y_1)] .$$

Con esta fórmula se calculan distancias entre los puntos de la esfera terrestre. En este caso tenemos también un espacio de números de dos dimensiones. Cada punto de este espacio es la pareja ordenada de latitud y longitud del punto. Este espacio de números se convierte en un espacio métrico agregándole la fórmula para medir distancias. Es posible comprobar que la fórmula para medir distancias en la esfera satisface las condiciones que los matemáticos imponen al concepto de distancia.

El espacio de números se convierte en un espacio métrico agregándole la fórmula de medir distancias. Si usamos la última fórmula anotada aquí obtendremos la métrica de la esfera; si usamos la fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right|$$

obtendremos la métrica del plano. Como el plano es el espacio euclidiano de dos dimensiones, podemos decir que el espacio de números de dos dimensiones se convierte en el espacio euclidiano de dos dimensiones, si se define la métrica con la fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right|$$

Como la esfera es un espacio no-euclidiano de dos dimensiones, podemos decir que el espacio de números de dos dimensiones se convierte en un espacio no-euclidiano de dos dimensiones, si se define la métrica con la fórmula:

$$d(P_1, P_2) = R \operatorname{ang} \cos [\operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 + \cos x_1 \cos x_2 \cos (y_2 - y_1)].$$

El espacio de números en sí es amorfo. La métrica —la fórmula de medir distancias— le da una geometría definida. El matemático se considera en libertad de asignarle al espacio de números la métrica que él quiera; sólo se limita por las condiciones que él mismo impuso al concepto de distancia.

Consideremos ahora el espacio físico en que vivimos. Elijamos en ese espacio un punto  $O$  que llamamos "origen". Tracemos por  $O$  tres rectas —los ejes coordenados—, cada una de las cuales debe ser perpendicular a las otras dos. A una de esas rectas le llamamos "eje de las abscisas" o "eje de las  $x$ ". A otra de ellas le llamamos "eje de las ordenadas" o "eje de las  $y$ ". A la tercera le llamamos "eje de las cotas" o "eje de las  $z$ ". Al plano definido por el eje de las  $x$  y por el eje de las  $y$  se le llama "plano coordenado  $xy$ ", o "plano  $xy$ ". Al plano definido por el eje de las  $x$  y el eje de las  $z$  se le llama "plano coordenado  $xz$ " o "plano  $xz$ ". Al plano definido por el eje de las  $y$  y el eje de las  $z$  se le llama "plano coordenado  $yz$ ", o simplemente "plano  $yz$ ". Los tres ejes coordenados definen tres planos coordenados que también son perpendiculares entre sí.

Elijamos por último una unidad de longitud  $u$ . Decidamos además cuál debe ser el sentido positivo en cada uno de los ejes. Con este sistema de tres ejes coordenados, podemos hacerle corresponder a cada punto  $P$  del espacio físico una terna ordenada de números reales. Tracemos por  $P$  tres planos; cada uno de ellos perpendicular a uno de los planos coordenados. (Véase la figura 4.)

El plano trazado por  $P$  y perpendicular al eje de las  $x$ , corta a este eje en el punto  $A$ . El plano trazado por  $P$  y perpendicular al eje de las  $y$  corta a este eje

en  $B$ . El plano trazado por  $P$  y perpendicular al eje de las  $z$  corta a este eje en  $C$ . En el eje de las  $x$  le corresponde un número real al punto  $A$ ; a este número se le llama la abscisa, o la  $x$ , del punto  $P$ . En el eje de las  $y$  le corresponde un número real al punto  $B$ ; a este número se le llama la ordenada, o la  $y$ , del punto  $P$ . En el eje de las  $z$  le corresponde un número real al punto  $C$ ; a este número se le llama la cota, o la  $z$ , del punto  $P$ . Al punto  $P$  le corresponde así una terna de números reales: su abscisa  $x$ , su ordenada  $y$ , y su cota  $z$ . Esta correspondencia entre el punto  $P$  y la terna formada por sus coordenadas se exhibe simbólicamente como sigue:

$$P(x, y, z).$$

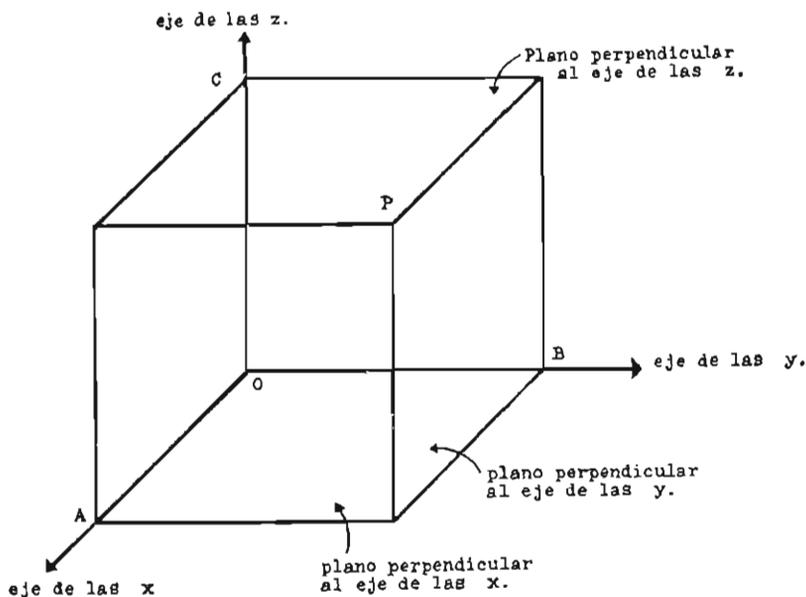


Fig. 4

A todo punto del espacio físico le corresponde una terna ordenada de números reales. Por otra parte: a cada terna ordenada de números reales le corresponde un punto del espacio físico. Dados los tres números  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en ese orden, existe en el eje de las  $x$  un solo punto  $A$  que tiene la abscisa  $x$  dada; existe en el eje de las  $y$  un solo punto  $B$  que tiene la coordenada  $y$  dada; existe en el eje de las  $z$  un solo punto  $C$  que tiene la coordenada  $z$  dada. El punto  $P$  correspondiente a la terna

ordenada  $(x, y, z)$  se obtiene trazando por  $A$  un plano perpendicular al eje de las  $x$ ; trazando por  $B$  un plano perpendicular al eje de las  $y$ ; trazando por  $C$  un plano perpendicular al eje de las  $z$ ; los tres planos se encuentran en el punto  $P$ . (Véase la figura 4.) Se ha establecido, pues, una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos del espacio físico y el conjunto de las ternas ordenadas de números reales. Al conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales se les llama "espacio de números de 3 dimensiones". El espacio de números de 3 dimensiones es amorfo, es espacio medusa, mientras no se postule una fórmula para medir distancias, mientras no se fije una métrica. Cada una de las ternas ordenadas de números reales es un punto del espacio de números. Si se postula para medir distancias la fórmula clásica de la geometría analítica de tres dimensiones, se obtiene un espacio euclidiano de tres dimensiones con coordenadas cartesianas ordinarias. Esta fórmula expresa la distancia entre los puntos  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ .

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

La fórmula satisface los requisitos que se le imponen a la función de distancia y que se mencionaron detalladamente antes.

Si se postula otra fórmula para medir la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , puede obtenerse un espacio no-euclidiano de tres dimensiones. Usando por ejemplo la fórmula:

$$d(P_1, P_2) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2],$$

se convierte el espacio de números de tres dimensiones en un espacio métrico no-euclidiano de tres dimensiones.

La aritmetización de los espacios geométricos de una, dos y tres dimensiones nos señala claramente una posible generalización del concepto de espacio a mayor número de dimensiones. Se llama espacio de números de cuatro dimensiones al conjunto de todas las colecciones ordenadas de cuatro números reales. Cada colección ordenada de cuatro números reales es un punto del espacio de cuatro dimensiones. Los cuatro números reales mismos son las coordenadas del punto. Así podemos decir que el punto  $P$  es  $(3.24, 5.28, 16.323, -4)$ .

Para convertir ese espacio de números en un espacio métrico hay que postular una fórmula para medir la distancia entre dos puntos. Sean  $P_1$  el punto  $(x_1, y_1, z_1, u_1)$ , y  $P_2$  el punto  $(x_2, y_2, z_2, u_2)$ . Sea  $d(P_1, P_2)$  la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . Una fórmula para  $d(P_1, P_2)$ , que es una generalización inmediata de la

fórmula correspondiente a un espacio euclidiano de tres dimensiones cuando se usan coordenadas cartesianas ortogonales es la siguiente:

$$d(P_1, P_2) = \left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (u_2 - u_1)^2} \right|.$$

Con esta fórmula se convierte el espacio de números de cuatro dimensiones en un espacio euclidiano de cuatro dimensiones. Es fácil comprobar que la distancia definida de este modo, satisface los requisitos que los matemáticos imponen a este concepto. En efecto, se obtiene  $d(P, P) = 0$  que significa que la distancia de un punto a sí mismo es nula; se obtiene también  $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ , que significa que la distancia de  $P_2$  a  $P_1$  es igual a la distancia de  $P_1$  a  $P_2$ . Por último se obtiene:

$$d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2);$$

que significa que la distancia directa de  $P_2$  a  $P_1$  es menor, o cuando mucho igual, a la distancia de  $P_1$  a  $P_2$  pasando por  $P_3$ .

Una vez definido el espacio métrico de cuatro dimensiones, se le puede poblar de objetos geométricos. Fijemos nuestra atención en el punto  $C(5, -2, 3, 1)$ . De todos los puntos que forman el espacio de cuatro dimensiones separemos aquellos que tienen de  $C$  una distancia 10. El conjunto de todos esos puntos forman un objeto geométrico, que en este caso es una esfera  $S_3$  con centro en  $c(5, -2, 3, 1)$  y con radio 10.

Si ahora separamos aquellos puntos  $P(x, y, z, u)$  del espacio de cuatro dimensiones cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$x^3 + y^3 - z^2 + 10u = 1000$$

tendremos otro objeto geométrico. En este caso se trata de un subespacio de tres dimensiones, inmerso en el espacio de cuatro dimensiones.

El matemático puede poblar el espacio de objetos geométricos definidos, por restricciones que se imponen a las coordenadas de los puntos. Todo subconjunto del conjunto total de puntos del espacio es un objeto geométrico.

Se vislumbra una perspectiva de espacios de cualquier número de dimensiones; euclidianos algunos, no-euclidianos otros; poblados todos de objetos creados por los matemáticos. Inspirados por los resultados de extraordinario interés y de singular belleza que se obtienen en esos espacios matemáticos, los geómetras han creado espacios hasta de un número infinito de dimensiones. El matemático alemán David Hilbert, que es contemporáneo nuestro —murió en 1943—, utilizó en forma genial esos espacios de un número infinito de dimensiones para representar en ellos a las

funciones por medio de puntos. Su brillante concepción ha sido de una increíble fecundidad para la ciencia.

Después de contemplar el panorama de los espacios matemáticos, volvamos nuestra mirada al espacio físico en que vivimos. Para que este espacio adquiriera una estructura geométrica es necesario definir la distancia entre dos puntos. En la vida diaria usamos las varillas rígidas para medir las distancias. Supongamos que deseamos saber la distancia que hay entre los dos puntos  $A$  y  $B$  del espacio físico: sea  $A$  la esquina de la azotea de un edificio, y sea  $B$  un punto del suelo.

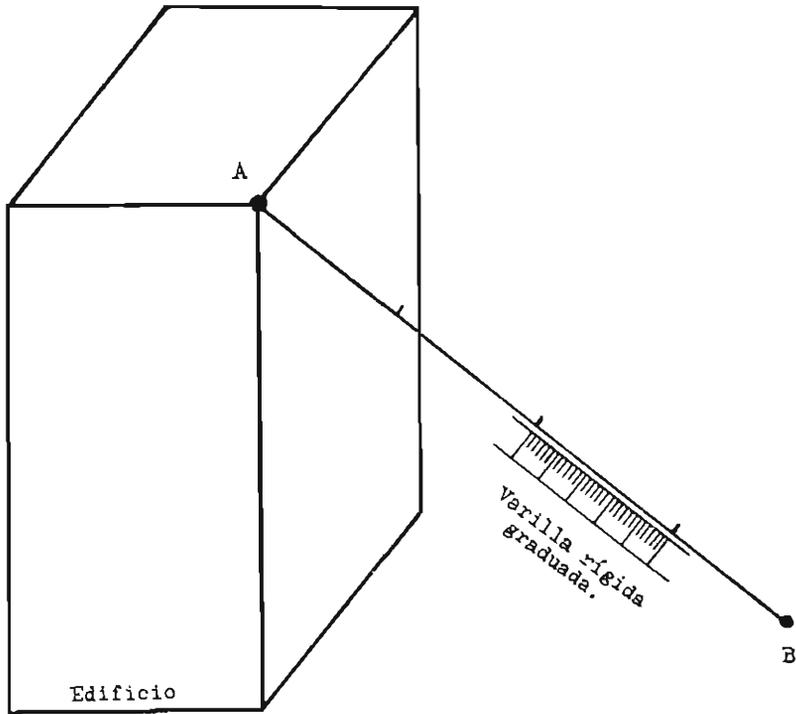


Fig. 5

Si tendemos un alambre entre  $A$  y  $B$  y lo estiramos, podemos medir la distancia entre esos dos puntos aplicando una varilla rígida graduada al alambre. La distancia entre  $A$  y  $B$  es el resultado de un experimento físico. El método descrito es muy primitivo. La longitud del alambre tendido entre  $A$  y  $B$  depende de la tensión que se le aplique, y también de la temperatura ambiente. El resultado

de la medición de la distancia entre  $A$  y  $B$  es un número variable, función de la temperatura y de la tensión. El método de la varilla rígida es suficiente para la vida diaria y para la ingeniería. Los físicos han ideado un método que no requiere de varillas, ni de alambres tendidos entre los puntos. El método que usa la física contemporánea para definir distancias recurre a las señales luminosas y a los relojes. Imagínese a un observador colocado en el punto  $A$ , equipado con una fuente de señales luminosas y con un reloj; considérese que el punto  $B$  está marcado en un cuerpo. El observador colocado en  $A$  hace una señal luminosa —produce una ráfaga de luz—, anota además la lectura de su reloj en el momento de producirse la ráfaga. Supongamos que su reloj marca los  $t_1$  segundos, a partir de un origen arbitrario del tiempo. El observador espera hasta que ve iluminarse al punto  $B$  con la luz de la ráfaga que él produjo; en ese instante hace una segunda lectura de su reloj. Supongamos que este instrumento marca los  $t_2$  segundos. La ráfaga producida por el observador salió de  $A$  a los  $t_1$  segundos; viajó, iluminó a  $B$ , y regresó a  $A$  a los  $t_2$  segundos. La luz tardó  $t_2 - t_1$  segundos en ir de  $A$  a  $B$  y volver de  $B$  a  $A$ . Ese tiempo es fundamental para la definición física de distancia entre  $A$  y  $B$ . Se postula una velocidad constante  $c$  para la luz. Se define la distancia entre  $A$  y  $B$  como sigue:

$$d(A, B) = c \frac{t_2 - t_1}{2} .$$

La definición de distancia en el espacio físico es experimental. La distancia es un número que se obtiene como resultado de un experimento. Se presupone que el físico tiene un reloj, que es un dispositivo para medir el tiempo. Se supone, además, que el físico puede producir ráfagas luminosas, y que puede reconocer cuando un punto de un cuerpo ha sido iluminado por una de esas ráfagas. La noción de distancia física presupone la noción de tiempo.

Una vez que se ha definido la distancia entre cualquier pareja de puntos en el espacio físico, éste adquiere una estructura geométrica. De las distancias se pasa fácilmente a las coordenadas. En el espacio físico se obtiene como resultado de experimentos que a cada punto se le pueden hacer corresponder tres coordenadas cartesianas perpendiculares. Al espacio físico le corresponde un espacio matemático métrico de tres dimensiones. Se pueden forzar las cosas de manera que a cada punto del espacio físico le corresponda una sola coordenada. Si se hace esto, se está retratando el espacio físico en una recta matemática. Se obtienen resultados tan inaceptables como este: puntos del espacio físico que están dentro de una caja material, quedan fuera de la imagen de esa caja en la recta. Si queremos introducir

un sistema de coordenadas en el espacio físico, que respete nuestras nociones elementales de "adentro" y "afuera" con respecto a cajas materiales, necesitamos usar tres coordenadas. El hecho de que el espacio tenga tres dimensiones es un resultado experimental.

A la fórmula para definir distancias en un espacio matemático corresponde en el espacio físico un procedimiento experimental para medirlas. La estructura geométrica del espacio es una consecuencia de la fórmula para calcular distancias en los espacios métricos de las matemáticas. La estructura geométrica del espacio físico es también una consecuencia del procedimiento experimental para medir las distancias. En todos los experimentos realizados en la tierra se encuentra que el espacio físico es euclidiano. Pero este hecho no nos permite afirmar que el espacio físico es euclidiano en grande escala. El plano es un espacio euclidiano de dos dimensiones. La superficie de la esfera es un espacio no-euclidiano de dos dimensiones. Un observador situado en un punto de una esfera gigante, que se haya dedicado a explorar una región muy pequeña de la esfera, no puede distinguir entre la esfera y el plano. Por muchos siglos creyó la humanidad habitar un plano, o sea un espacio euclidiano de dos dimensiones. Sólo después de muchas discusiones y experimentos se encontró que la superficie de la tierra no es aproximadamente plana; más bien es aproximadamente esférica. En todo espacio no-euclidiano regular, se pueden marcar regiones suficientemente pequeñas para que con los instrumentos disponibles no se pueda distinguir en ellas si el espacio es euclidiano o no es euclidiano. Muy bien puede suceder que el espacio físico no sea euclidiano, y que la región que el hombre ha explorado sea demasiado pequeña para poderla distinguir experimentalmente de una región euclidiana.

En la primera mitad del siglo XIX señaló Karl Friedrich Gauss, eminente matemático y físico alemán, un experimento que conduciría a determinar el carácter euclidiano o no-euclidiano del espacio físico. Consiste éste en medir los tres ángulos de un triángulo formado por tres estrellas. La suma de  $180^\circ$  es característica de los espacios euclidianos. La sugestión de Gauss no es realizable prácticamente. No se pueden colocar observadores en las estrellas. Si se hacen las mediciones desde la tierra, y si se obtienen los ángulos realizados con esas medidas, tiene que utilizarse una "geometría" para calcular los ángulos. De manera que de antemano se vician los resultados con una estructura geométrica del espacio físico supuesta por el calculador. Aun en el caso de que se pudieran colocar tres observadores en tres estrellas, cada uno en una de ellas, sería necesario que esas tres personas midieran los ángulos simultáneamente. El concepto de simultaneidad es temporal. El tiempo se introduce una vez más en la determinación de la estructura geométrica del espacio físico. La primera aparición la hizo el tiempo, al definirse la distancia por medio de la luz y dos lecturas de un reloj.

El físico israelita alemán Alberto Einstein fué quien señaló el profundo alcance de esa interdependencia de las nociones de espacio y de tiempo. Siguiendo el camino señalado por él, amalgamó el matemático alemán Herrmann Minkowski los conceptos de espacio y de tiempo en un solo concepto de espacio-tiempo. El espacio-tiempo de Minkowski es un espacio de cuatro dimensiones. El punto del espacio-tiempo es una colección ordenada de cuatro números reales. Esos cuatro números representan a un acontecimiento puntual e instantáneo que es un fenómeno físico simple: un fenómeno que se realiza en un punto y que ocurre en un instante. Todo fenómeno físico es un conjunto de tales acontecimientos puntuales e instantáneos. Los tres primeros números de la colección que representa a un acontecimiento son las coordenadas  $(x, y, z)$  del punto en que éste ocurre. El cuarto número  $t$  es el tiempo en el que se realiza el acontecimiento. De hecho se les llama "acontecimientos" a los puntos del espacio-tiempo. Un acontecimiento es la colección ordenada de cuatro números reales:  $(x, y, z, t)$ . Minkowski determinó que en la teoría de la Relatividad Especial de Einstein la "distancia" entre los dos acontecimientos:

$A_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ;  $A_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ , es igual a:

$$d(A_1, A_2) = \left| \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \right|.$$

Aquí  $c$  es igual a la velocidad de la luz. La distancia definida por Minkowski para dos acontecimientos del espacio-tiempo es un invariante para todos los observadores inerciales. La distancia entre dos puntos del espacio físico no tiene esta importante característica. A fines del siglo XIX señaló el físico y filósofo austriaco Ernst Mach que la distancia entre dos puntos del espacio físico no es absoluta, sino que depende del observador. Supongamos que un físico observa en su laboratorio dos acontecimientos que ocurren en el mismo lugar y en distintos tiempos. Un ejemplo muy sencillo es el de un foco que se enciende instantáneamente y produce una ráfaga luminosa. Supóngase que esto ocurre a las 18<sup>h</sup>25<sup>m</sup>. Después de 10 minutos se enciende otra vez el mismo foco. El segundo acontecimiento ocurre en el mismo lugar a las 18<sup>h</sup>35<sup>m</sup>. El físico que observa los dos acontecimientos en su laboratorio, afirma que ocurren en el mismo lugar. Ahora analicemos lo que puede decir sobre esos dos mismos acontecimientos un observador colocado en el Sol. Para este segundo observador la tierra se mueve entre el primero y el segundo acontecimiento, durante diez minutos con una velocidad de 30 kilómetros por segundo. En ese lapso se mueve la tierra 18 000 kilómetros. Según el observador colocado en el Sol los dos acontecimientos ocurren en lugares distintos que distan 18 000 km. uno del otro.

Durante muchas décadas se creyó que había un medio sutil que llenaba el espacio: el éter. Se suponía que en el éter se propagaban las ondas electromagnéticas, como la luz. En un experimento revolucionario, que realizaron los físicos estadounidenses Michelson y Morley en 1887, se demostró que no era posible la existencia del éter. Mientras se creyó en el éter, se podía hablar de reposo y de tiempo absoluto. Estaba en reposo absoluto quien estaba en reposo con respecto al éter. Estaba en movimiento absoluto quien estaba en movimiento con respecto al éter. Al abandonar los científicos el éter tuvieron que abandonar los conceptos de reposo absoluto y de movimiento absoluto. Una de las consecuencias de la liquidación del éter fué la liquidación del concepto de espacio absoluto que Newton había postulado. Fué Albert Einstein quien tuvo la audacia de pensamiento necesaria para obtener las últimas consecuencias de la muerte del éter. En 1905 publicó su teoría de la Relatividad Especial que es en realidad una nueva teoría del espacio y del tiempo. En ella quedaron para siempre fundidos estos dos conceptos en el espacio-tiempo de Minkowski.

La física contemporánea ataca simultáneamente el problema del espacio y del tiempo. El espacio-tiempo de cuatro dimensiones es ahora el escenario del devenir físico. Si imaginamos una partícula en movimiento en el espacio físico, ésta pasará en cada instante  $t$  por un punto  $(x, y, z)$ . El paso de la partícula por el punto  $(x, y, z)$  en el instante  $t$  es el acontecimiento  $(x, y, z, t)$ . Al moverse la partícula varían  $x, y, z$  y  $t$ . El continuo de acontecimientos que se refieren al paso de la partícula por los distintos puntos de su trayectoria se le llama "línea de universo de la partícula". Toda partícula tiene su línea de universo. El devenir físico consiste en una maraña de líneas de universo. Se puede imaginar el espacio-tiempo con el pasado, presente y porvenir cristalizados frente al observador. Todos los puntos del espacio-tiempo que corresponden a un mismo valor de  $t$  son acontecimientos simultáneos para el observador que estableció el sistema de coordenadas y que fijó el reloj. Ese conjunto de acontecimientos es un corte  $t = \text{constante}$  en el espacio-tiempo. El espacio físico mismo es en cada instante, un corte de esa índole.

En la teoría de la Relatividad Especial de Einstein se demuestra que los cortes  $t = \text{constante}$  en el espacio-tiempo dependen del observador. Dos observadores que se estén moviendo uno con respecto al otro obtienen distintos cortes  $t = \text{constante}$ .

La estructura geométrica del espacio físico puede forzarse al capricho del físico hasta cierto grado. Se pueden introducir "correcciones" a las medidas observadas para obligar al espacio físico a ser euclidiano. Pero esta posibilidad de corregir tiene su límite. Imaginemos a un observador que habite sobre la superficie de una esfera gigante. Supongamos que construimos un plano tangente a la esfera en el punto  $O$  en donde habita el observador. Sea  $A$  el punto de la esfera antípoda de  $O$ . Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de la esfera. Tracemos los rayos  $AP$  y  $AQ$ , y encontremos

sus intersecciones  $P^1$  y  $Q^1$  con el plano tangente. Véase la figura 6. Supongamos que el observador mide la distancia entre  $P$  y  $Q$  en la superficie de la esfera. En seguida "corrige" esa distancia. La "corrección" consiste en decir que la distancia entre los puntos  $P^1$  y  $Q^1$  en el plano es la "verdadera distancia" entre los puntos  $P$  y  $Q$  de la superficie de la esfera. Con este artificio se puede jugar a la geometría euclidiana en la esfera que es no-euclidiana. El observador que habita en la superficie de la esfera puede encapricharse en hacer geometría euclidiana "corrigiendo" sus distancias. Lo que está haciendo es proyectar cada punto de la superficie esférica

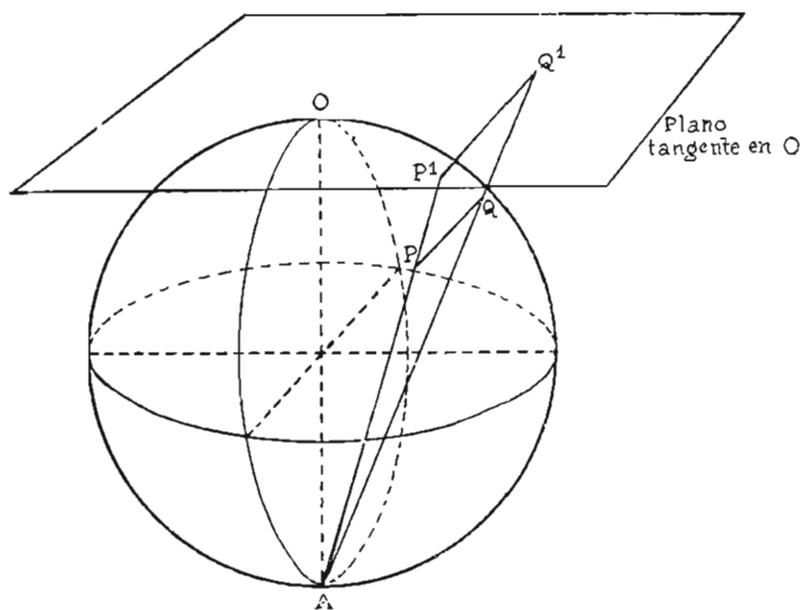


Fig. 6

desde  $A$  sobre el plano tangente en  $O$ . Después opera con las proyecciones de los puntos en el plano en vez de con los puntos mismos. Habla del punto  $P$  y piensa en el punto  $P^1$ . Dice: "distancia entre  $P$  y  $Q$ ", y piensa en la distancia entre  $P^1$  y  $Q^1$ . Logra hacer geometría euclidiana en la superficie de la esfera. Un buen día sale el observador a explorar su universo. Sale de  $O$  en una dirección y la conserva durante su viaje. Cuando regresa con sorpresa a  $O$  sin haber cambiado jamás de dirección, se le acaba el capricho euclidiano. No es posible seguir insistiendo en que habita en un plano infinito. La estructura geométrica en grande del

espacio físico nos la impone el Cosmos. No podemos "corregir" razonablemente nuestra manera de medir distancias para forzar la estructura geométrica en grande del universo.

Actualmente creen los cosmólogos que la naturaleza nos da una pista para encontrar la estructura geométrica del espacio físico. Se funda esta pista en lo que se puede llamar la hipótesis *antropocéntrica*, que consiste en suponer que el hombre *no* ocupa el centro del Cosmos. En una época se creyó que la tierra era el centro del Universo. Primero los griegos, y luego Copérnico, demostraron que la tierra no es ni siquiera el centro del sistema solar. Después se pensó que el Sol, la estrella a la que estamos ligados, era el centro del sistema estelar al que pertenece. Ahora se sabe que el Sol está colocado excéntricamente en nuestra galaxia. Siempre que se ha postulado la hipótesis antropocéntrica, se ha tenido que abandonar después. Ahora reina en la ciencia el prejuicio contrario. Si se obtiene como resultado de una teoría una posición central para el hombre en el Cosmos, se supone que esa teoría es errónea. Impera ahora el prejuicio *antropocéntrico*.

Los astrónomos tienen procedimientos para medir el número de galaxias contenidas en una esfera con centro en nuestra galaxia y con radio de millones de años luz. Si las galaxias están uniformemente espaciadas en el Cosmos el número de galaxias contenidas en una esfera tal es proporcional al cubo de su radio. Usando una "geometría" postulada *a priori* se mide como crece el número de galaxias con el radio de la esfera. Si se encuentra que la región cercana al centro de la misma —que corresponde a nuestra galaxia— contiene más o menos galaxias que las regiones alejadas del centro, se concluye que la "geometría" postulada *a priori* era errónea. La "geometría" correcta será la que nos dé como resultado una distribución uniforme de galaxias. Si una geometría nos conduce a la conclusión que en nuestra vecindad hay más galaxias que en otras regiones del mismo tamaño en el Cosmos, la geometría es errónea. Tampoco aceptamos que en nuestra vecindad haya menos galaxias que en otras regiones del mismo tamaño.

Con los datos de la observación astronómica existentes actualmente todavía no se puede discriminar entre un espacio euclidiano y espacios no-euclidianos. En cuanto se empiecen a acumular datos de observación recopilados con el telescopio de doscientas pulgadas del Monte Palomar se podrá decir con qué geometría se obtiene una distribución uniforme de galaxias.

El punto de vista de la física contemporánea con relación al problema de la estructura geométrica del espacio físico se puede resumir en los siguientes puntos:

- 1) La estructura geométrica del espacio físico *no* está dada por la naturaleza.
- 2) La estructura geométrica del espacio físico es una consecuencia de las convenciones que se hagan para medir distancias.

- 3) Con cualesquiera convenciones "razonables" de medir distancias, se obtiene una estructura geométrica euclidiana en la vecindad del observador. Esa vecindad puede tener las dimensiones del sistema solar.
- 4) Es siempre posible "corregir" las distancias de manera que el espacio físico tenga una estructura geométrica euclidiana.
- 5) Si el espacio físico nos fuera accesible en su totalidad, entonces podríamos inferir algo sobre su estructura geométrica por sus cualidades en grande.
- 6) Fundándonos en el prejuicio "antropocéntrico", podemos exigir que se use aquella estructura geométrica, que tiene por consecuencias una distribución uniforme de las galaxias en el espacio físico.

CARLOS GRAFI FERNÁNDEZ.

## MY TILT WITH ALBERT EINSTEIN

As related by Prof. Carlos Graef Fernandez, Director of the Institute of Physics in the National University of Mexico, and formerly Professor of Relativity at Harvard, to Samuel Kaplan

"Einstein is dead. How that profoundly sad event carries the memory back to my unforgettable meeting with the supreme scientist of our time!

"My heart beat fast as I stood before 112 Mercer Street in Princeton, N. J. I was going to defend the ideas of my dead friend Prof. George D. Birkhoff against those of Prof. Albert Einstein. But perhaps you do not know who Birkhoff was. Know then that Birkhoff, chairman of the Department of Mathematics, Harvard University, was one of the ten greatest mathematicians of all time!

"And permit me to say that Birkhoff did not minimize the importance of his extraordinary powers, as you may judge from this exchange between him and Prof. Luis Enrique Erro, Director of the National Astrophysics Observatory of Mexico.

"'Prof. Birkhoff,' said Erro, 'I hope that in the future the United States government will continue to send us savants of your stature.'

"'Prof. Erro,' was Birkhoff's surprising answer, 'in the States I am the only one of my stature.'

"To which I might add the words of Dr. Norbert Wiener, the present greatest American mathematician who, when making his obituary address before Birkhoff's body in Harvard University's chapel, said: 'He was the first among us and he accepted the fact. He was not modest.'

"I first met Birkhoff when he came to Mexico in 1942 and made an impromptu talk in Spanish that gave a flashing hint of his intellectual prowess. Imagine! after teaching himself Spanish in Cambridge, and practicing it for just three weeks in Mexico, he delivered this improvised talk that held us Mexican scientists spellbound by its eloquence. An amazing performance!

"I was standing on Einsteins's doorstep that December day in 1944 to lock horns with him about Birkhoff's New Theory of Relativity; the Theory which comes in head-on collision with Einstein's gravitational theory in his famous General Theory of Relativity.

"What's so important about a gravitational theory? Let me tell you. It's a rational explanation of the motions of stars, planets, comets—of all celestial bodies. Such a theory is decidedly important when it enables us to *predict the future course of the universe*. Surely you will agree it is enormously important when you stop to think that it permits us to account for the future positions of *all* heavenly bodies and their states of motion.

"Now then, bear in mind that three gravitational theories—Newton's,

Einstein's, and Birkhoff's—are in use today in actual computations of physical phenomena. . . . For almost three centuries Newton's Theory had been holding the fort, when something tremendously significant happened. Einstein, the great iconoclast, arrived to punch a terrific hole in it.

"How? In 1905, in his majestic Special Theory of Relativity, he furnished the key that unlocks the door to a complete explanation of all phenomena bearing on light, electricity, and magnetism! It started the greatest upheaval in the realm of science. It forced the stupefied scientists to throw overboard a mass of Newtonian notions concerning space and time: the way bodies fall, the way the planets—including the one on which lives that constructive and destructive creature MAN—move around the sun, and the way comets move.

"Let me give you an example of what this means.

"We will assume that an astronomer on the Earth is sweeping the skies with his telescope in 1957 and witnesses the stupendous spectacle of an exploding star. He makes computations, finds that the celestial catastrophe really took place way back in 1945 on August 6, at 8:15 A.M. This, he reminds himself, was the exact moment the atomic bomb obliterated Hiroshima.

"On another planet, say Venus, another astronomer observes both star-explosion and Hiroshima bombing. According to Newton, he finds they happened simultaneously. But according to Einstein, his calculations prove one disaster happened before the other—*because on Venus he is moving with respect to the Earth* on which the first astronomer is located.

"All very fine. But when in 1916 Einstein set up his General Theory of Relativity he laid himself wide open, and I mean wide open, to an avalanche of criticism. Why? Because it is not the logical continuation of his Theory of Special Relativity. They clash most inharmoniously.

"In Special Relativity, Einstein assumes that space is undistorted. But observe that in General Relativity, to account for the curved motions of the planets, he assumes the contrary, a curved space. For years Einstein and his collaborators, working on the unified field theory, have tried to marry these rebellious theories, but haven't yet succeeded in getting them to sleep in the same bed.

"And then in 1942, with the crash of a tidal wave, came the New Gravitational Theory of my revered friend Birkhoff.

"Heavens, how it rocked the scientific ship from end to end. Its brilliant logic makes understandable every single phenomenon that Newton's and Einstein's *cannot*; such as for instance, the motion of one star around another, a phenomenon incapable of correct explanation in either of the other theories.

"You will appreciate its grandeur if you keep in mind that Birkhoff takes Einstein's Theory of Special Relativity, builds it up so that the new system explains *all* phenomena concerned with light, electricity, magnetism, falling bodies, moving planets and comets. In a word, it gives a *single unified* explanation of extremely diversified phenomena.

"Birkhoff's Theory assumes that the pull the sun exerts on the Earth and all other planets travels with the velocity of light through space; that the Earth's pull on the moon has the same speed. Furthermore that the gravitational pull a body exercises on another body depends upon the velocities with which both are moving. These two are the characteristic features of Birkhoff's Theory.

"What are its advantages over Einstein's? Its mathematics are far simpler. It is more consistent with common sense—it does not introduce such peculiar properties as curved space and a closed and finite universe.

"At the time Birkhoff started working with Mexican scientists (he came to the National University of Mexico in 1943 as a visiting lecturer, sent by the United States State Department), his Theory still lacked a rigorous mathematical basis. My colleague, Barajas Celis, who is now Director of the School of Science, National University of Mexico, addressed himself to this task.

"I will ask you to imagine yourself marooned with a scientist in space between the stars, far above the stratosphere, in a closed spaceship, without propulsion. You will notice it is pulled by the star nearest it, and moves with an accelerated motion. This it does in accordance with Einstein's Principle of Equivalence—that the stars pull each other!

"With enormous satisfaction Barajas Celis proved that this Principle is equally valid in Birkhoff's Theory; thus he nailed down a sound mathematical flooring for the new scientific system.

"In the meantime I was doing a bit of mathematical carpentering myself, working on another application of Birkhoff's Theory to astronomical phenomena.

"On a bright summer night, when you look at our celestial neighbors with the naked eye, you may think you are seeing individual stars. You will be in error. Actually about a third of these apparently single bodies turn out to be systems of two, three, or more stars revolving around each other.

"I found that in the case of a two-star system, the line joining the two bright bodies, when they are closest to each other, rotates slowly in a plane. This fascinating phenomenon is in astronomical parlance called 'rotation of the apsidal line.' So now with the mathematical tools supplied by Birkhoff's Theory I had the honor of solving 'the two-body problem' of calculating completely the motions of two-star systems.

"In Einstein's Theory, I may add, it is impossible to solve the two-body problem except by making very far-fetched assumptions.

"Again, using Birkhoff's Theory as a compass, I studied the motions of the galaxies of the universe.

"You are an amateur star gazer, not so? To you then, those heavenly points of light may seem scattered haphazardly, as if shaken out of a cosmic tablecloth. On the contrary, they are clustered into systems of galaxies. These are by no means insignificant affairs. The galaxy to which our sun is honored to belong—with its train of planets—contains approximately two hundred thousand million stars!

"As seen from our galaxy all others are running away from us.

"Light, which travels at the rate of 186,324 miles per second, takes 500,000,000 years to span the inconceivable gulf from the farthest galaxy that has been photographed, to our Earth. This galaxy, which doesn't seem to want to be in the vicinity of a planet that enjoys a world war, and some minor ones, every few years, is streaking away from us at the respectable speed of 20,000 miles per second.

"I wish to point out to you that Einstein's Theory cannot say without the help of observations if the galaxies are moving away from, or toward, us. But not so with Birkhoff's Theory. It flatly predicts their motion away from each other, and excludes any motion of approach.

"I found the laws of motion of the galaxies and of the 'photons.' The latter are the carriers of light-energy. You realize, do you not, that the space requirements of atoms and electrons are extremely modest. Those of photons are even more so! The photons are 'corpuscles' which traverse the gigantic distances separating us from other galaxies, and enable astronomers and physicists to pick up and interpret vital bits of 'news' constantly streaming from the distant star systems.

"So you can understand it was with the greatest of pleasure that I laid my findings before my friend Erro. This distinguished astronomer checked my conclusions against observational material gathered over many years by astronomers throughout the world. To his astonishment he found a complete accord between my theoretical judgments and the observational data.

"Alas, Birkhoff dying in November 1944 was denied the thrill of witnessing the confirmation of this phase of his epochal theory by Erro and myself. The repercussions of that dramatic event, which took place at the meeting of the American Astronomical Society in 1946, still reverberate around the scientific world.

"A guest of the Department of Mathematics, Princeton University, in December 1944, I was tremendously pleased when Einstein invited me to come and discuss Birkhoff's Theory.

"All the way to Einstein's home I kept thinking of Birkhoff. What an irreparable loss to the world, to die at sixty-two, at the zenith of his creative powers! We Mexican scientists were eternally in debt to him. He had stimulated our abilities, and won our admiration and love by freely sharing with us his vast store of original knowledge.

"A maid ushered me to the library. Einstein greeted me with a smile and a piercing but friendly stare. After exchange of courtesies, Einstein genially remarked:

"I think the principal difference between Birkhoff's point of view and mine lies in what we consider to be the scientific explanation of a physical system. Now what is your opinion in this matter, Graef?"

"Well, let us consider a concrete example, say the solar system," I answered. "I think a person who has a set of formulae which enables him to predict accurately the future of the solar system has completely explained that system."

"By this, if you are so good as to follow me, I meant that one who fully understands the solar system can unerringly predict the positions of the Moon, Mars, Venus, Jupiter, Saturn and the other planets, at any given hour of any future date.

"Einstein could not conceal his impatience. 'Do you really think that what you claim is all there is to an explanation?'"

"Yes. An explanation for us is nothing but an order of formulae which empowers one to predict the future."

"Einstein vehemently disagreed. 'The set of formulae, which for you is all there is to an explanation, has to be consistent with the philosophy of nature in order to be a true explanation. Otherwise it is only a convenient device for predicting the future of a system, but does not give a real insight into its nature.'

"This pronouncement made me smile. It reminded me that for over two thousand years one thinker after another had tried to fashion a system of ideas that would embody in a single harmonious doctrine all explanations of nature. Each in turn had fallen in ruins when a later scientific discovery became the midwife that delivered a brand new system.

"And every one of them had been considered 'the philosophy of nature' in the days of its acceptance.

"At this point I almost burst out laughing at thought of 'the philosophy of nature' which existed at the time of publication of Einstein's 'Theory of Special Relativity. It had to undergo a major surgical operation in order to conform to the new, revolutionary ideas about time and space Einstein introduced. Truly it's astonishing, I told myself, that the scientist who precipitated the greatest overhauling of 'the philosophy of nature' should himself take the position that his system of ideas is something immutable, changeless, to which physical theories *must* conform.

"Therefore it was with lively curiosity that I asked: 'Prof. Einstein, how exactly does this philosophy of nature rule out, in your opinion, Birkhoff's Theory of Gravitation as an explanation of the solar system?'

"Said Einstein: 'For Newton, the fundamental cause for the curved motions of the planets was the sun itself. The great mass of the sun, in the center of the system, attracts celestial bodies in the vicinity toward itself. Thus the presence of a mass in space is the cause of the force that urges the planets on their courses.'

" 'But contemporary physics,' he went on, 'has abandoned this point of view. Today we consider the force as primary, as more fundamental. The physicist can measure this force directly, as he does on earth. Contemporary science prefers to consider those physical entities, the planets, as *fundamental*; as causes which can be observed and measured directly. And it prefers to think of entities which cannot be measured or observed directly, like the sun, as derived or secondary.'

"Einstein paused to let his words sink in, then: 'Thus you see, Graef, a theory built to explain the solar system has to start with *the field of forces, the planets*. The mass of the sun itself is a derived quantity because, as I have already remarked, it cannot be observed or measured directly. The primary quantities, the planets, are the *forces* which all point toward a center. We consider that at that point, the center, there is a singular something which we call 'mass of the sun.'

" 'This mass, you understand, Graef, is obtained by calculating it from the planets—the measured forces.'

" 'But in Birkhoff's Theory,' Einstein shook his head, 'the fundamental cause for gravitation is a liquid. His point of view is a step backward. He goes back to an unobservable and unmeasurable quantity for the cause of gravitation.' Again he shook his leonine head in disapproval, then, with a smile, added: 'Whereas in my theory the mass of the sun is derived and calculated from the observed and measurable motion of the planets.'

"I should tell you that he was referring to Birkhoff's assumption that all matter is built from an elementary fluid called 'Birkhoff's perfect fluid.'

"I looked at Einstein and thought indignantly, what! Birkhoff's setup a step backward? Controlling my emotion, I answered:

" 'Prof. Einstein, I do not think one can always dismiss the going back to old ideas by stating—that is a step backward. Consider the theory of light. For Newton, a bright body sends out particles which are the carriers of light energy, and which cause the sensation of light when impinging on the human eye.'

"I was alluding, you understand, to Newton's theory that light consists of tremendously fast moving little bodies—the corpuscles already mentioned—which are emitted by the light-source.

"I continued: 'This theory was followed by Huyghens' wave theory: that a bright body sends out waves which cause the sensation of light when they strike the human eye. The wave-theory, I need not tell you, Prof. Einstein, completely defeated the corpuscular theory during Newton's lifetime and held its own up to our century.'

"With rising emotion I pressed on: 'Now I bring up a question of the first importance. Who is chiefly responsible for our going back to corpuscles as carriers of light-energy?' I paused, looked Einstein straight in the eye. Raising my forefinger I pointed it accusingly. 'You, Prof. Einstein, are the man! Yet nobody can object now to the use of the photon in physics.'

"The photon, permit me to repeat, is a corpuscle. Einstein discovered the effect caused by photons when they impinge on metals. This, called 'the photo electric effect' is the principal reason for accepting the existence of photons in modern science.

"Eagerly I followed up with: 'The step backward which you made has in reality been a great step forward in physics. But, Prof. Einstein, if you had applied the argument of 'the philosophy of nature,' then current, which you now use against Birkhoff's Theory, you would never have made it.'

"'Ah, Graef,' he said, 'the photon, though a corpuscle, is not like a pebble which you can throw out of the window. There is a big difference between my photons and Newton's particles.'

"Instantly I retorted: 'Prof. Einstein, Birkhoff's fluid, though a liquid, cannot be drunk like a Coca-Cola. There is an enormous difference between Birkhoff's perfect fluid and actual liquid.' . . . At this moment I realized that our points of view were irreconcilable.

"Einstein rose and good-naturedly patted me on the shoulder. 'Graef,' he said amiably, 'you are a born rebel. I wish you great luck. Good-bye.' And we shook hands heartily.

"And now that incomparable mind is hushed for eternity. . . Ah, my friend, when will the world witness its equal again?"

*Editor's Note:* We have ascertained that only a minority of physicists uphold Birkhoff's views as opposed to Einstein's. However, we thought that many readers would be interested in this human story of the late Professor Einstein as it illustrates among other things his urbanity in dealing with scientific controversy. The following remarks by Professor Peter G. Bergmann, Department of Physics, Syracuse University, should serve to place the subject matter of this article in the proper scientific perspective.

"Professor Graef Fernandez relates in this charming account one of the innumerable discussions that Professor Albert Einstein has had with scientists and laymen alike concerning the ultimate aims and the most fundamental notions of scientific research. He has never taken Birkhoff's theory very seriously, because it fails to provide what he would have considered a logically and esthetically satisfactory unified theory of gravitation and electrodynamics. He formed this opinion in personal conversations with Birkhoff and, as we see, with defenders of Birkhoff's ideas.

"As for the story itself, I believe that non-physicist readers should know that Einstein himself never considered his own theories as immutable or final. It is quite true that the general theory of relativity is not consistent with the special theory any more than the special theory is with Newton's mechanics—each of these theories discards, in a sense, the conceptual framework of its predecessor. But each new theory also contains its predecessor as a limiting, simplified version; after all, it must be capable of yielding the correct results of the earlier theory as well as extend the range of our understanding. During the last thirty-five years of his life Einstein himself was searching for an improvement of physical theory, beyond the general theory of relativity. Probably he has proposed (and discarded after examination) a greater number of so-called unified field theories than any other worker in the field.

"We are all aware of the preliminary character of the general theory of relativity, as in fact of any physical theory; but let us not lose sight of its real accomplishments. General relativity does give a completely satisfactory account of the motion of double stars, including the perihelion precession. True, the rigorous treatment of the double-star system is a relatively late flower of general relativity; it was accomplished by H. P. Robertson (then at Princeton University) in 1938. In general relativity too, there are forces that are velocity-dependent. As the theory is based on the assumed equivalence of gravitational and inertial forces, it must give rise to gravitational forces that are similar to the so-called Coriolis force, an inertial effect in rotating coordinate systems.

"Birkhoff's theory and the general theory of relativity are also alike in that both lead to the propagation of gravitational disturbances with the speed of light. Because of the relatively low speeds of all large gravitating masses, the non-static effects of gravitation are hard to observe; where the general theory of relativity leads to minute observable effects, astronomers have been able to confirm these. The principal macroscopic field still wide open is the structure of the universe.

"It is to be expected that in the next five or ten years our observational material on extragalactic objects will be greatly enriched, by observations with the Palomar mirror, by radio astronomy, and possibly by observations from extraterrestrial sites. By then it will be possible to put Birkhoff's theory as well as the many other theories with cosmological implications\* to a much more fruitful test than has been feasible in the past. We may well withhold final judgment till then."

---

\* Cf. H. P. Robertson and W. Baade talks at the conference "Jubilee of Relativity Theory," Berne, July, 1955. Proceedings will appear as a special issue of *Helvetica Physica Acta*, Spring, 1956.



# ALEJANDRO DE HUMBOLDT

## I. HUMBOLDT Y EL COSMOS

EL HOMBRE empezó a pensar en serio en el siglo VI antes de Jesucristo y en el mundo griego. El primer problema que le apasionó fue el de la estructura y la composición del mundo material que lo rodea. Los primeros pensadores, los filósofos presocráticos, fueron cosmólogos. Su preocupación principal fue la de encontrar orden, armonía y unidad en el universo.

Pitágoras forjó el concepto de cosmos en contraposición con el de caos. Cosmos es el mundo de la materia gobernado por leyes, en orden armónico. Caos es el hacinamiento informe de la materia, sin leyes y sin estructura.

Alejandro de Humboldt tituló a su obra cumbre: *Cosmos*. Humboldt es de la estirpe de Pitágoras. Él realiza en el siglo XIX una síntesis genial de las ciencias de la naturaleza dando a la humanidad una visión integral del cosmos.

Entender el cosmos significa para Humboldt mucho más que un simple acumular los conocimientos sobre el Universo que se tenían en su época. Para él, el placer máximo que han deparado los dioses al hombre es permitirle contemplar el cosmos, sintiendo su armonía, comprendiendo las fuerzas que lo animan y cambian, viendo orden y leyes en donde parece haber caos, viendo estructura y diseño en donde parece haber un simple hacinamiento, viendo unidad en donde parece haber diversidad.

Humboldt es un espíritu afín a Anaxágoras. Cuando alguien preguntó a este filósofo griego por qué prefiere el hombre el ser al no ser, contestó: por la contemplación del orden esparcido por todo el cosmos.

Para Humboldt no hay placer comparable al de ver el cosmos con los ojos de la ciencia. En su obra máxima presenta como una escala ascendente, a la descripción pictórica, en seguida a la descripción poética para culminar con la comprensión científica del cosmos.

El libro *Cosmos* de Humboldt está dividido en dos partes. La parte uranológica, llamada así por Urania, la musa de la astronomía, trata de los fenómenos celestes. La parte telúrica trata de la tierra y sus fenómenos. Para Alejandro de Humboldt el cosmos es una gigantesca orquesta sinfónica que toca una música en la que se mezclan armónicamente los acordes uránicos y telúricos. La música cósmica la producen las nebulosas al girar y alejarse; la producen las estrellas al danzar unas en torno de otras, la entonan los planetas al girar en torno del sol, y la canta este astro al girar en torno de su eje y al huir por el espacio. Los cometas, los asteroides y los meteoritos participan todos en esta sinfonía. También colaboran la atmósfera y el mar con sus huracanes, sus rayos y sus tempestades. Toca su parte en esta música la tierra con sus volcanes y sus erupciones, con sus tormentas magnéticas y sus auroras boreales, con sus sismos y sus montañas, con sus ríos y sus lagos, con sus plantas y animales. Tañe un instrumento el hombre con sus preocupaciones, sus penas y sus alegrías. Todos los entes del universo participan en la música cósmica gobernados por las leyes de la naturaleza. Esta música sólo la aquilata quien entiende la ciencia. El iniciado deriva el placer estético máximo de la contemplación integral y comprensión del cosmos.

El valor que tiene la ciencia dentro de la cultura contemporánea se deriva precisamente del papel que Humboldt le asigna. La ciencia da al hombre una imagen cada día más precisa del cosmos y también le indica al hombre qué lugar ocupa él mismo en ese cosmos. Por esas dos razones tiene la ciencia tan destacado valor cultural.

Humboldt previó también con claridad que la ciencia sería cada vez más importante en el porvenir porque es el fundamento de la técnica, y porque a través de ésta le da al hombre un dominio cada día mayor sobre la naturaleza.

La actitud de Humboldt ante el cosmos lo hace un científico de intereses múltiples. Lo apasionan la astronomía y la antropología; la geología, la mineralogía y la geografía; la botánica y la fisiología. Fascinado por la interacción de las fuerzas que gobiernan el universo se dedica con pasión a las disciplinas que son la fusión de dos ramas de la ciencia. Humboldt es el fundador de la geografía botánica y de la ecología vegetal. Estudia con profundidad el geomagnetismo y su relación con las auroras boreales. Sus exploraciones por América son un verdadero programa de investigación geofísica y sugieren las que se realizan actualmente en el programa del año geofísico internacional. Sólo que Humboldt agregaba a las mediciones geofísicas. sus estudios de fauna y flora. Observa el tránsito de Mercurio por el disco del Sol en Perú, estudia el efecto de la corriente eléctrica sobre sus propios nervios, determina latitud y longitud de numerosas localidades en México, traza líneas de igual intensidad magnética, forja el concepto y determina las isotermas en los países que visita. Estudia las corrientes marinas y señala su importancia para la distribución del hombre sobre la Tierra, sugiriendo experiencias como las del Kon Tiki que se realizan hasta nuestro siglo. Comprendiendo la necesidad de la colaboración internacional para los estudios geofísicos funda la Unión Internacional para el Magnetismo Terrestre y da así el primer paso en los programas científicos internacionales de cooperación.

¡Humboldt es un científico en escala cósmica!

---

## II. HUMBOLDT, EL HOMBRE

Humboldt era un hombre de grandes entusiasmos. Le apasionaba ver las relaciones e interacciones de las múltiples fuerzas que mueven al cosmos, le fascinaba entender las leyes de la naturaleza y percibir el orden en el universo, pero también se interesaba con entusiasmo desbordante por las personas.

Tuvo la fortuna de encontrar amigos que se contagiaron del entusiasmo de Humboldt por sus proyectos. En su viaje por México y América del Sur tuvo por inseparable compañero, colaborador y amigo al eminente botánico francés Aimé Bonpland. Humboldt y Bonpland llevaron a Europa 60,000 especímenes botánicos entre los cuales había 3,500 especies nuevas. En una obra botánica magna, en siete volúmenes, publicaron Bonpland, Humboldt y Kunth las descripciones de las especies descubiertas. La obra se titula: *Nova genera et species plantarum* (Nuevos géneros y especies de plantas). Con Aimé Bonpland compartió Humboldt los peligros y las alegrías, los triunfos y los esfuerzos de sus exploraciones en la América Latina.

El entusiasmo desbordante con el que brindaba Humboldt su amistad se manifestó cuando aprendió hebreo para poderse dirigir en este idioma a Henriette Hertz, una amiga israelita de Berlín, a quien admiró y a quien quiso mucho.

Humboldt fue un admirador entusiasta y un gran amigo de Carlos Federico Gauss, el más eminente matemático de la época. Humboldt usó la enorme influencia que tenía sobre las autoridades para ayudar a Gauss, y contribuyó a diseminar la fama de este hombre de ciencia por todos los ámbitos y en todos los círculos.

Alejandro de Humboldt fue un conversador fascinante. Goethe decía que una hora de conversación con él equivalía al estudio de muchos libros.

Los fenómenos económicos y sociales apasionaron a Humboldt tanto como las leyes de la naturaleza.

Durante su residencia en Londres estudió con gran entusiasmo el constitucionalismo inglés; en París se apasionó por la revolución francesa. Humboldt fue un admirador entusiasta de la cultura francesa. Vivió largos años en París y tuvo muchos amigos franceses, siendo algunos de ellos de los más grandes hombres del siglo XIX en el mundo de la cultura. Fue amigo del físico Gay Lussac y del físico matemático Arago. Nombró al árbol de la nuez del Brasil *Bertholettia excelsa*, en honor de su amigo el químico francés Claudio Luis Berthollet. Su maravillosa obra sobre México: *Ensayo Político sobre el Reino de la Nueva España*, la escribió en francés.

El apasionado interés de Humboldt por los fenómenos económico sociales no fue exclusivamente académico y contemplativo. En una época fue Humboldt asesor, y después director de la Administración de Minas del Gobierno de Prusia. Durante su gestión estableció, de su propio peculio, una escuela para los obreros de las minas, ubicada en Streben. Por insistencia de él se estableció el sistema de pensiones para los mineros. Le causó una profunda satisfacción el granjearse la confianza y la admiración de los obreros de las minas.

Humboldt combatió con energía en sus escritos la discriminación racial. Al referirse a la actitud de Cuauhtémoc al caer prisionero de Cortés, dice Humboldt: "Este rasgo es digno de los mejores tiempos de Grecia y de Roma. Bajo todas las zonas, sea cual fuere el color de los hombres, el idioma de las almas es el mismo cuando luchan contra la desgracia."

Humboldt fue un entusiasta admirador de las culturas indígenas. Fue un enemigo del colonialismo y de la esclavitud. Escribió con vehe-

mencia en pro de la libertad de pensamiento como un requisito indispensable para que se desarrolle una cultura.

Al estudiar la vida de Humboldt se descubren facetas de su personalidad que nos llenan de admiración y que él no hace resaltar en sus escritos. En su ascensión al Chimborazo con su amigo Carlos Montúfar llegó a una altura de 5,878 metros sobre el nivel del mar, superando todas las alturas que se habían podido escalar en esa época por los alpinistas. Esta hazaña deportiva se halla oculta detrás de lecturas barométricas e hiposométricas en la montaña, detrás de mediciones de temperatura, de observaciones geológicas, geográficas y botánicas y de la descripción del paisaje majestuoso de los Andes.

## III. HUMBOLDT Y MÉXICO

A Alejandro de Humboldt, hombre de los grandes entusiasmos, sabio que se quedaba extasiado al contemplar la interacción de las fuerzas de la naturaleza, es natural que le fascinara México. Encontró aquí todos los climas y una riqueza fabulosa de floras. Vio la zona de la costa veracruzana, húmeda, con su riquísima vegetación tropical. Coleccionó cactáceas en las regiones semidesérticas del altiplano. Conoció los bosques de coníferas del Nevado de Toluca y los bosques follajosos de encinos de las inmediaciones de Taxco. Vio nuestros pedregales en que contrastan el verde jugoso de la rica vegetación con el negro de la roca volcánica. Admiró nuestros lagos y nuestras montañas. Conoció nuestros volcanes. ¡Y se enamoró de México!

El profundo impacto que le causaron a Humboldt nuestras montañas se manifiesta en unas declaraciones que hizo, ya anciano, al periodista estadounidense Bayard Taylor en el verano de 1856. En estas declaraciones que se publicaron en el diario *New York Tribune*, dijo el sabio varón alemán: “¿Usted ha viajado por México, señor Taylor? ¡Qué hermoso país! ¡Cuántos recuerdos me ligan a México! ¡Qué hermosas montañas las de México! Aquellos conos cubiertos por nieves perpetuas son los más hermosos del mundo; aquellas cumbres de nieves majestuosas que se elevan en medio de la brillante vegetación de los trópicos, ¿puede darse algo más bello? El Himalaya será más alto, pero no podrá impresionar tanto el espíritu como la cresta del Pico de Orizaba, atalaya avanzado de aquella prodigiosa geología, que parece sacudir su penacho de nieve para dulcificar los ardores tropicales del Golfo de México.”

No fue sólo nuestra naturaleza tan rica y tan variada la que fascinó a Humboldt. La ciudad de México, la más hermosa de América, era entonces también la más grande del continente. A Humboldt le causó una profunda emoción. La compara con París, con Londres y con las mayores ciudades de Alemania.

Humboldt vio a México con los ojos de un enamorado. Pero un enamorado ve más y no menos que el que no lo está. Dice José Ortega y Gasset que el enamorado no es ciego, sino un excelente aquilatador de encantos. El enamorado no finge ver excelencias y perfecciones en donde no las hay, sino lo que sucede es que ve con más claridad, porque fija su atención con una intensidad apasionada. El enamorado ve excelencias y perfecciones que no ve el hombre indiferente, porque el enamorado concentra todo su poder de observación, toda su atención, en el ser amado.

Humboldt, enamorado de México, vio nuestras excelencias y perfecciones, pero también vio nuestros defectos y nuestras flaquezas. Vio nuestras cualidades y también nuestros grandes problemas. Escribió sobre México una obra maravillosa, su *Ensayo Político sobre el Reino de la Nueva España*. Este libro que es una síntesis económica, social y cultural del México de principios del siglo XIX, desempeñó un papel importante para afirmar nuestra nacionalidad al realizarse la independencia. La fe de Humboldt en México se contagia a los pensadores que prepararon la liberación de nuestro país y a los que empezaron a forjar a la patria naciente.

México manifestó su agradecimiento al sabio varón alemán. El 29 de junio de 1859, en la ciudad de Veracruz, declaró Benito Juárez a Alejandro de Humboldt, benemérito de la patria.

Humboldt conoció y admiró nuestras instituciones científicas de principios del siglo XIX y las consideró las mejores del continente, incluyendo los Estados Unidos. Fue huésped del Colegio de Minas y amigo de su director, don Fausto Elhuyar. Desde la Escuela de Minería de

Freiberg en Alemania había hecho amistad con don Andrés Manuel del Río, profesor de geología y mineralogía en México. Conoció nuestra Universidad. Admiró al geómetra don Joaquín Velázquez Cárdenas, al astrónomo don Antonio León y Gama y al sabio don José Antonio Alzate. Estudió con ahinco las colecciones del Jardín Botánico.

El 22 de octubre de 1822 se encontraba Alejandro de Humboldt en Verona acompañando al rey Federico Guillermo III de Prusia; ese día escribió a su hermano Guillermo: “Tengo un gran proyecto de un gran establecimiento de Ciencias en México, para toda la América libre . . . Tengo la idea de acabar mis días de un modo más agradable y más útil para la ciencia, en una parte del mundo en donde soy extraordinariamente querido. . .”

Tenía razón Alejandro de Humboldt: ¡En México se le quiere mucho!

## NIELS BOHR

Dr. Carlos Graef Fernández.

Niels Bohr estableció una ley muy general de la física que se llama "**Principio de Complementaridad**". Este resultado expresa en la forma más concisa un rasgo esencial de la nueva física. Entusiasmado por el alcance que tiene su principio, lo generalizó Bohr más tarde a varias otras ciencias.

Para poner de manifiesto el significado del principio de complementaridad de Bohr quiero contrastar ciertos rasgos en el tratamiento de un sistema de partículas por los métodos de la física clásica, en la que no rige este principio, con rasgos diferentes que tiene el tratamiento de ese mismo sistema por los métodos de la física cuántica en donde se aplica la complementaridad.

Imaginen Uds. un sistema de partículas en un campo de fuerza. Ese campo puede ser en parte externo y en parte debido a interacción de las partículas. En la física clásica se llama "estado del sistema" al conjunto de datos que describen a las posiciones y a los vectores cantidades de movimiento de las partículas en un instante  $T$ .

De cada partícula debe indicarse su posición por medio de tres coordenadas, por ejemplo: las cartesianas y su vector cantidad de movimiento por medio de sus tres componentes, que para facilitar la exposición, llamaremos brevemente "cantidades de movimiento". Conocido el estado del sistema de partículas en el instante  $T$  y el campo de fuerzas, se puede predecir todo estado futuro del sistema.

Con el formalismo de Hamilton, todavía dentro de la física clásica, son las coordenadas de una partícula del sistema y las componentes correspondientes del vector cantidad de movimiento, variables canónicas conjugadas. La descripción del estado inicial del sistema en el instante  $T$ , se hace entonces, en la física clásica, por medio de las coordenadas de las partículas y de sus variables canónicas conjugadas: las cantidades de movimiento. ¡Hasta aquí la física clásica!

Si en la física cuántica quisiéramos describir el estado de un sistema

como se hace en la física clásica nos tropezaríamos con un escollo infranqueable. Según un principio establecido por Werner Heisenberg en 1927 no es posible atribuir valores numéricos precisos y simultáneos a dos variables canónicas conjugadas. Este principio de Heisenberg es el principio de incertidumbre y afirma que el producto de la incertidumbre en una coordenada multiplicada por la incertidumbre en la cantidad de movimiento conjugada es, en el caso más favorable, del orden de magnitud de la constante de Plank  $h$ . En la física cuántica no existe una descripción del estado inicial del sistema de partículas en la que se especifiquen valores simultáneos de las coordenadas de todas ellas y sus cantidades de movimiento. Nada nos impide describir con precisión absoluta las posiciones de las partículas del sistema en el instante  $T$ , pero entonces tenemos que prescindir de especificar las cantidades de movimiento en ese mismo instante. Podemos optar por describir con precisión las cantidades de movimiento en ese instante, pero entonces tenemos que renunciar a especificar las posiciones de las partículas. El punto de vista de Niels Bohr es que esas dos descripciones del sistema son "complementarias". El físico se decide por una descripción y utiliza un dispositivo para determinarla. Si resuelve, por ejemplo, describir las posiciones de las partículas con precisión, usa para este objeto un aparato especial. Si opta por describir con precisión las cantidades de movimiento de las partículas, usa otro aparato que es complementario del primero, y renuncia a especificar las posiciones. Según Niels Bohr las dos descripciones se complementan. Las partículas de un sistema no tienen posiciones y cantidades de movimiento precisas que el físico se ve incapacitado para medir simultáneamente. Bohr afirma que cuando se determinan posiciones precisas de las partículas las cantidades de movimiento son imprecisas; y cuando se determinan con exactitud las cantidades de movimiento son enteramente inciertas las posiciones. Las partículas no poseen propiedades que el físico no pueda medir en principio. Sólo aquellas propiedades que el físico puede medir son las propiedades físicas de la partícula. Según este punto de vista, las propiedades de una partícula dependen en parte de ella y en parte del aparato de medición. Es imposible evitar la interacción del aparato de medición y de la partícula. Lo que nos causa la dificultad para aceptar el punto de vista del principio de complementariedad es el hecho de que la palabra "partícula" está grávida de sugerencias de las que es difícil deshacerse. Una partícula sugiera un pequeño cuerpo y éste nos recuerda los cuerpos que tratamos en la vida diaria que tienen una velocidad y una posición bien determinadas en cada instante. Lo que acontece es que en el caso de un cuerpo macroscópico se puede despreciar la interacción entre el aparato de medición y el cuerpo mismo. Las partículas elementales no tienen posición y cantidad de movimiento independientemente del observador. La posición y la cantidad de movimiento son descripciones complementarias; depende del observador y de sus aparatos cuál de las dos descripciones se prefiere. Puede

elegirse una doble descripción imprecisa tanto en posición en cantidad de movimiento.

Para poner de manifiesto la complementariedad sin complicar la situación con rasgos no esenciales imaginemos un experimento ideal. Un haz monocromático de electrones, es decir electrones que tienen todos el mismo vector cantidad de movimiento, se mueve en la dirección del eje de las  $x$ . En el plan  $Y OZ$ , obstruyendo el paso de los electrones, se encuentra una lámina con un diafragma circular de diámetro  $d$  muy pequeño, precisamente en el lugar en que el eje  $OX$  perfora a la lámina. Esta está rigidamente unida a una estructura muy pesada que es el soporte del aparato. Un electrón que pase por el diafragma está siendo forzado a tener una posición determinada con gran precisión en el instante en que lo atraviesa. Pero al salir del orificio aparece con una componente  $\Delta p$  en su vector cantidad de movimiento que no tenía antes. Al vector cantidad de movimiento del electrón se le ha agregado una componente paralela a la lámina del diafragma. Según el principio de incertidumbre de Heisenberg se tiene.

$$d. \Delta p = h.$$

Si se coloca una placa fotográfica del otro lado de la lámina con relación al haz de electrones, y a cierta distancia de la misma, se observarán anillos de difracción. Se obtendrá una imagen central intensa del diafragma en la dirección indicada por el haz y varios anillos concéntricos rodeando a la imagen principal. Tanto imagen central como anillos de difracción son producidos por los impactos en la placa fotográfica de los electrones que pasan por el diafragma. En este experimento se ve claramente que la trayectoria de un electrón después de pasar por el diafragma está indeterminada. No es posible predecir lo que va a ocurrir con un electrón al pasar por el orificio circular.

Como hay conservación de la cantidad de movimiento total, el incremento  $\Delta p$  que adquiere el electrón al pasar por el diafragma está acompañada de una cantidad de movimiento igual, colineal y de sentido contrario que absorbe la lámina y que transmite al soporte del aparato. Con el dispositivo descrito se obliga a los electrones a tener una posición determinada con precisión al pasar el diafragma. La cantidad de movimiento queda en cambio indeterminada.

Dice Heisenberg que todo experimento destruye algún dato obtenido por un experimento previo. En este caso suponemos que el experimento previo es el que nos informó con precisión sobre la cantidad de movimiento de los electrones del haz. Al realizar el experimento de forzarlos a pasar por un pequeño diafragma circular destruimos el conocimiento de la cantidad de movimiento que ya teníamos introduciendo una  $\Delta p$  impredecible. También dice Heisenberg que si el haz es poco abundante en electrones y que si utilizamos un obturador que abra y cierre el diafragma un pequenísimos intervalo de tiempo  $\Delta t$ , podemos lograr que un

solo electrón pase por el orificio y podemos recibirlo después en la placa fotográfica u otro detector más adecuado.

De este electrón no podemos predecir en que lugar de la placa fotográfica irá a dejar retratado su impacto, pero si esto nos satisface, podemos decir su historia pasada. Conocemos su velocidad en el haz y conocemos, con un error  $\Delta t$ , su paso por el diafragma. Heisenberg dice que carece de sentido físico atribuirle posiciones a ese electrón en el pasado. No hay experimento que pueda comprobar lo que ocurrió con él antes de pasar por el diafragma. Si tratamos de investigar en donde está ese electrón antes de pasar por el diafragma ya no estaremos seguros de que pasa por él. Lo que no es físicamente observable no tiene sentido para el físico. Si bien la  $\Delta p$  le aparece al electrón después de pasar por el diafragma, no tiene sentido preguntarse en dónde se encuentra para tiempos anteriores al instante en que pasa por el orificio. Las posiciones en el pasado del electrón se pueden calcular tratándolo como corpúsculo de la física clásica, pero estas posiciones no nos sirven para nada para predecir el futuro de ese electrón después de pasar por el diafragma. En el paso es en donde se introduce la indeterminación  $\Delta p$  en la cantidad de movimiento del mismo. Surge ahora la objeción a este análisis del experimento ideal que proviene del principio de la conservación de la cantidad de movimiento. Supóngase que se construye un dispositivo para medir la cantidad de movimiento,  $\Delta p$  que un electrón comunica a la lámina del diafragma al pasar por éste. El electrón adquiere un incremento  $\Delta p$  en su paso por el diafragma y transmite a la lámina una cantidad de movimiento  $\Delta p$ . Parece sencillo medir, en principio, esta magnitud física. Se suspende la lámina de finísimos resortes de manera que se mueva con gran facilidad. Al pasar el electrón por el diafragma se mueve la lámina y se puede determinar el  $\Delta p$  que el diafragma comunicó al electrón. Se ha visto sin embargo que al realizarse esta medición precisa de  $\Delta p$  el movimiento del diafragma causa una indeterminación en la posición del mismo que hace que no se pueda predecir el porvenir del electrón. Al medir la  $\Delta p$  se hace incierta la posición del electrón al pasar el diafragma. No hay escape posible al principio de incertidumbre de Heisenberg. La contradicción aparente en la que se incurre al aceptarlo se disuelve con el principio de complementariedad de Bohr.

Einstein se resistió siempre a aceptar como definitivos al principio de complementariedad de Bohr y al principio de incertidumbre de Heisenberg sobre el cual se funda el primero. En el Congreso Solvay de Física de 1930 celebrado en Bruselas, presentó Einstein un experimento ideal que aparentemente contradice al principio de incertidumbre y por lo tanto al principio de complementariedad.

El experimento ideal ideado por Einstein es muy ingenioso y causó grave desconcierto a Niels Bohr. Einstein seleccionó dos variables canónicas conjugadas: la energía y el tiempo. Su dispositivo consiste en una

caja rectangular hecha de espejos perfectos que ven hacia el interior de la misma. La caja tiene un diafragma cerrado por un obturador al que puede abrir y cerrar un mecanismo de relojería rigidamente ligado a la caja. Una caja tal puede encerrar radiaciones luminosas. Einstein imagina su caja suspendida de un dinamómetro en un campo gravitacional. Se supone que el dinamómetro indica con precisión absoluta el peso de la caja. En la situación inicial está cerrado el obturador y dentro de la caja hay radiaciones luminosas. En un instante  $T$  determinado con precisión por el reloj se abre el obturador un intervalo  $\Delta t$ . Este lapso puede hacerse tan pequeño como se quiera. Si durante el tiempo  $\Delta t$ , en que está abierto el diafragma se escapa un fotón el dinamómetro indicará la disminución de peso debida a la salida de energía de la caja. Einstein concluyó diciendo que en su experimento ideal se conocen con la precisión que se quiera la energía del fotón que se escapa y el instante en que esto ocurre. Su experimento ideal permitía, en principio, medir con toda precisión a dos variables canónicas conjugadas: la energía y el tiempo. Niels Bohr pasó una noche en vela preocupado por esta objeción a su principio de complementariedad. Al otro día había encontrado la solución. El fotón al salir produce una retropropulsión en la caja que la cambia de lugar arrastrando en su movimiento al reloj rigidamente unido a ella. Este cambio de posición se realiza en un campo gravitacional que es necesario para poder determinar por medio de pesadas la energía que sale de la caja. Al cambiar un reloj de posición en un campo gravitacional cambia la escala con la que éste mide el tiempo según la Teoría de la Relatividad General de Einstein. El cambio de lugar del reloj ocurre en forma impredecible; es una de esas reacciones entre el aparato de medición y la partícula observada, que en este caso es el fotón cuyo análisis condujo a los principios de incertidumbre y de complementariedad.

Al explicarle Bohr a Einstein que al moverse el reloj en el campo gravitacional quedaba indeterminado el tiempo en que el fotón salía de la caja quedó éste último derrotado pero no convencido. Cinco años después publicó Einstein con B. Podolsky y N. Rosen otro experimento ideal para objetar los principios de incertidumbre y de complementariedad. Este segundo experimento ideal de Einstein provocó una contestación escrita de Bohr que es una fuente excelente para documentarse sobre el principio de complementariedad (*Physical Review* 48, 696-702,) (1935).

El principio de complementariedad surge en la física en forma dramática al tratar de asignarles valores precisos y simultáneos a parejas de variables canónicas conjugadas. El aparato que es adecuado para atribuirle un valor preciso a una de esas variables no es el adecuado para asignarle un valor preciso a la variable conjugada y viceversa. El físico tiene que conformarse con asignarle un valor preciso a una sola de las dos variables de la pareja. Los aparatos con los que se miden los valores de dos variables canónicas conjugadas son "complementarios", como "comple-

mentarias" son las descripciones que se hacen por medio de ellos, del estado del sistema físico que se está investigando.

Esta situación se presenta dramáticamente al analizar los movimientos de las partículas elementales de la física. En el fondo proviene la imposibilidad de asignarles valores numéricos precisos y simultáneos a dos variables canónicamente conjugadas, de la reacción incontrolable entre la partícula observada y el aparato de observación. A un objeto macroscópico se le puede hacer visible con luz intensa y se le puede observar visualmente sin influir en forma apreciable en su movimiento. A una partícula elemental no se le puede iluminar sin afectarla considerablemente. Toda observación de una partícula elemental influirá radicalmente en el movimiento de ésta. De la interacción de la partícula observada con el aparato de observación surgen las características de la descripción del movimiento de la partícula que están expresadas en el principio de complementariedad de Bohr. Este es una manifestación de la influencia del dispositivo de observación en el fenómeno observado.

El gran alcance que tiene en la física el principio de complementariedad indujo a Bohr a generalizarlo a otras ciencias. No sólo en la física influye el hecho de observar a un sistema en forma decisiva en el comportamiento del mismo. Hay otras ciencias en las que ocurre esto, y en las que un mismo sistema se puede observar por medio de dispositivos "complementarios". Si se decide el hombre de ciencia a usar un dispositivo no puede utilizar simultáneamente el otro y viceversa.

Un ejemplo importante de esto es la observación de los organismos en la biología. Todo organismo está formado por átomos y puede considerarse como un sistema de partículas de la física. Si queremos estudiar a un organismo vivo como un sistema físico lo podemos hacer. Solamente que para especificar los valores de las variables que describen al estado de este sistema físico tenemos que intervenir tan radicalmente en él, que deja de ser un organismo vivo. Aquí también la intervención del aparato de observación incluye decisivamente en el comportamiento del sistema. Por otra parte, podemos renunciar a la descripción del organismo vivo como sistema físico y lo podemos observar con los aparatos y métodos de la biología. Esta descripción es "complementaria" de la anterior. El lenguaje que se utiliza en la descripción biológica es diferente del lenguaje de la descripción física. En la descripción biológica se habla de reflejos, de hábitos, de tropismos, de instintos, de placer, de dolor. En la descripción física se habla de posiciones de partículas, o de cantidades de movimiento, de masas, de cargas eléctricas, etc. Los aparatos que son necesarios para la observación biológica de un organismo no arrojan luz sobre ese organismo como sistema físico y los aparatos que conducen a la descripción del organismo como sistema físico no nos dicen nada sobre su comportamiento biológico. Se trata de dos descripciones que no pueden hacerse simultáneamente, que son complementarias y no contradictorias.

Otra ciencia a la que generalizó Niels Bohr el principio de complementaridad es la psicología. Si se quiere describir un estado psíquico se pueden seguir dos métodos complementarios. Se puede usar por una parte el método de la introspección o auto-observación y por otra parte se pueden usar aparatos para estudiar los cambios fisiológicos ocasionados por la presencia de ese estado psíquico. Para estudiar el estado de ánimo de una persona enojada puede ella misma someterse a un examen introspectivo. Pero este examen influye decisivamente en el estado de ánimo que se está investigando. Se trata de un caso típico en que el hecho de observar un estado afecta radicalmente al futuro del sistema. Una persona iracunda cambia de estado psíquico desde el momento en que fija su atención sobre ese estado para analizarlo. El método complementario de análisis consiste en observar las variables fisiológicas de la persona enojada. En este segundo método se tomará el pulso y la temperatura del sujeto iracundo; se medirá la cantidad de adrenalina en la sangre; se medirá la cantidad de bilis derramada, etc: Los dos métodos se realizan con dispositivos diferentes y producen descripciones complementarias.

La física ha llegado a un grado de desarrollo tal que sus resultados más importantes tienen consecuencia inmediata en la filosofía y en las otras ciencias. El principio de complementaridad de Bohr es una de esas conquistas que preocupa a muchos pensadores de otras ramas de la cultura. Ya se esté de acuerdo o en desacuerdo con el principio de complementaridad en su forma más general, el solo hecho de plantear la posibilidad de su validez fuera de la física es fecundo, por las discusiones que esto desencadena y por las teorías y experimentos que sugiere.

Niels Bohr deja una profunda huella en la ciencia que trasciende los límites de la física y se extiende a la filosofía y a las otras disciplinas científicas.

A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen. Can Quantum Mechanical Description Of Physical Reality be Considered Complete. *Phys. Rev.* 47, 477 (1935).

Werner Heisenberg. *The Physical Principles of the Quantum Theory* Dover Publications, Inc. 1930. página 20.

Oxford Lectures 1958. *Turning Points in Physics*. North-Holland Publishing Co. Amsterdam 1959. Pág. 137, 138, 139.

## 27. The Texcoco Project

Carlos Graef Fernandez, Director, The Nuclear Center of Mexico

This paper deals with the water problems of Mexico City and with the possibility of solving them with the help of a nuclear reactor.

1. Mexico City has so much water in the rainy season, that the principal preoccupation of the city authorities is to drain all possible water into the sea.
2. Mexico City has such a tremendous scarcity of water in the dry season that this situation has stopped the city from growing and has also stopped industrial development.
3. Mexico City is 7,000 feet above sea level; a fact which at once limits the water supply to the few sources which lie above this tremendous height, or which imposes heavy costs for pumping on water which comes from lower altitudes.
4. Mexico City is drinking its own foundation, with the terrible consequence that it is sinking at a rate of one foot a year. This sinking causes breaking of the water supply lines, and of the sewage pipes; and also causes cracking of the buildings.

How can a nuclear reactor help to solve these problems?

### THE PROBLEM

In the beginning of the sixteenth century the Spaniards conquered Mexico. In 1519 they climbed from the Gulf coast to the Valley of Mexico where they had a most magnificent view from the high mountains. They saw a lake covering 400 square miles, in a high plateau surrounded by mountains; two of which were covered with snow. In the middle of this lake was Mexico City. The city was built on artificial islands in the very shallow lake. Broad canals crossed the town which was one of the most populous in the world; certainly larger than Madrid. Two high stone pyramids rose at the center of the city. At their tops were two fabulous temples: one devoted to the rain god and the other to the war god. On the shores of the lake were several large cities and villages. On the northeast shore was the city of Texcoco.

## 384 Carlos G. Fernandez

The lake was drained in later centuries. It had existed for millions of years--since the formation of the volcanoes which enclose the Valley of Mexico. During these millions of years, the volcanoes threw an incredible mass of volcanic ash and lava into the lake.

A deep well drilled in the Valley of Mexico to a depth of 3,937 feet passes through lake deposits of volcanic ash converted into clay, through lake deposits of gravel and sand carried by rivers into the lake; it also passes through two lava flows of basalt. This well, which is the deepest drilled in the Valley until now, does not reach the limestone which underlies certainly most of the lake deposits.

In the geological past the lake was divided into several independent basins by small mountain chains rising in its midst. At the dawn of history, the lake deposits had erased these divisions. When the Spaniards first saw the lake, the only division which existed was artificial. The lake was divided in two by a dam designed by Netzahualcoyotl, the Emperor of Texcoco, in the middle of the fifteenth century.

The Valley of Mexico is a high plateau surrounded on all sides by mountains of volcanic origin. The high plateau is formed by the filled-up basins of the old lake. Geologists have identified seven separate basins. The total area of this high plateau is 3,143 square miles.

Modern Mexico City is a town of six-million inhabitants built on the same place as the ancient Indian city. It lies on the top of one of the marginal basins of the old lake. The Mexico City basin is the southwest corner of the high plateau. Its area is 280 square miles, which is 9 per cent of the total area of the Valley.

The water supply for Mexico City comes from five sources. Note that more than one-third of the water comes from 2,000 wells which extract water from underneath the city itself (Figure 1).

The clay which lies under Mexico City is very peculiar. It was formed by the decomposition of volcanic ash deposited in the old lake. The void ratio of this clay is  $c=7:1$ , which means that this material contains one part of solids and seven parts of water by volume. This clay is, in fact, "reinforced water." It is a very rich source of water, which in the Mexico City basin happens to be fresh water. This clay is a wet sponge from which water can be pumped out easily. In 1936 the intense pumping of this clay started. Figure 2 shows the proportion of water extracted from below the city compared with the amount of water supplied by other sources. The explosive growth of the population of the city, also shown in Figure 2, is the reason why the intense pumping had to be so intense.

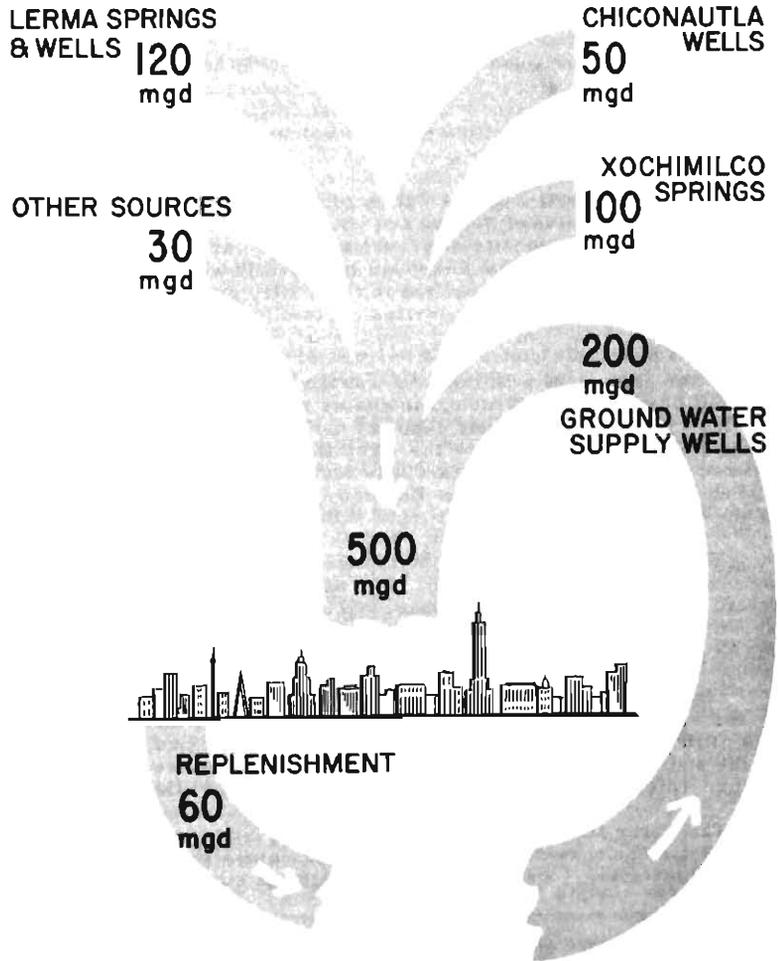


Figure 1. Mexico City Water Supply

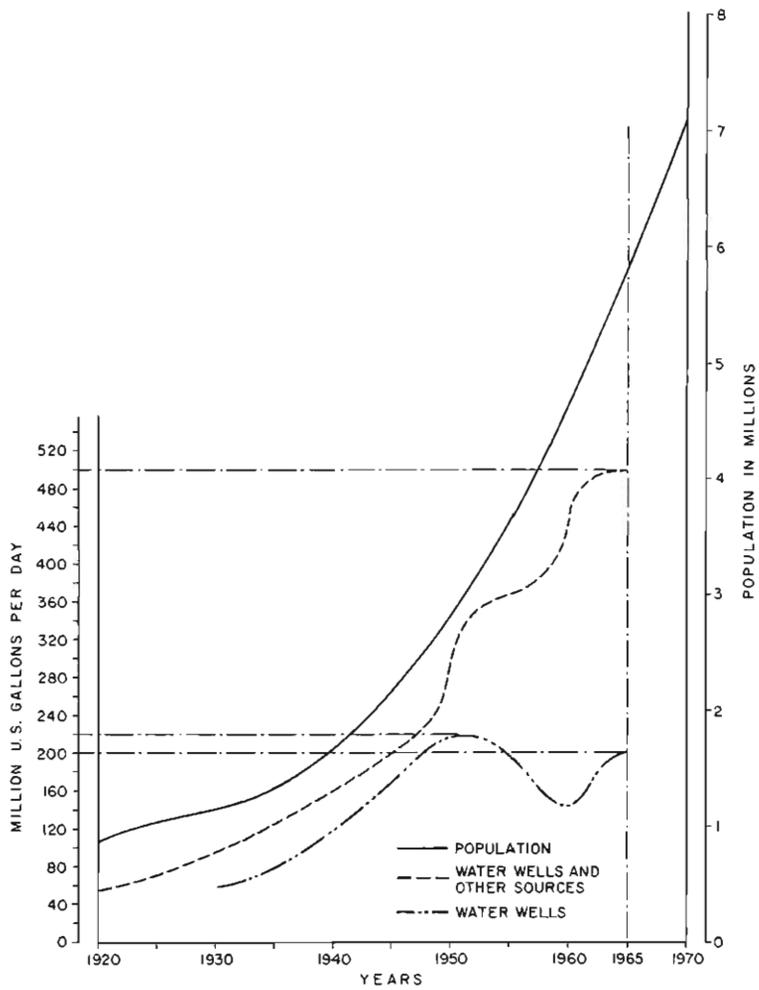


Figure 2. Mexico City - Population and Water Supply Growth

Because the City of Mexico is 7,000 feet above sea level it is very difficult to find adequate water sources. In the year 1953 a tunnel was finished. This tunnel brings water to the city across the mountains from the high plateau of Toluca, which is even higher than the high plateau of Mexico. All important water sources which lie higher than Mexico City have now been exhausted.

The consequences of squeezing water out of the clay sponge have been fatal to Mexico City. The clay contracts as it loses its water content and causes the sinking of the city, which in some areas has reached the enormous figure of one foot per year. Because the sinking is not uniform, it causes breaking of the water supply lines and the sewage pipes. Some parts of the city are built on the hills bordering the basin and do not participate in the sinking. The sinking is slower in the parts of the basin nearest to the hills.

Mexico City's very fast rate of subsidence poses a very difficult problem for designing foundations for tall buildings. Several solutions have been tried. One of them consists of floating the building. A block of soil is removed which has the same weight as the building which is being placed on that site. The building is set on a concrete box which floats in the mud. This extremely expensive method sounds very nice in theory, but one would have to be able to remove in one instant a huge block of clay, and in the next instant one would have to substitute it by the concrete box. But the excavation takes time and irreversible changes take place in the clay.

Another cheaper method has been used extensively, and this is setting the buildings on piles. At a depth of about 130 feet a layer of sand interrupts the clay deposits. This sand layer exists everywhere beneath the flat part of the city. To build the foundation of a building, piles are driven down to this layer. Such piles can support buildings as tall as one wants. The piles do not prevent the contraction of the clay. Buildings on piles come out of the soil and increase in height. The same happens to well casings. The piles have to be calculated to stand the combined weight of both building and soil.

The Department of Hydrology of Mexico City (Gobierno del Distrito Federal) has calculated the cost of the sinking of the city at approximately 50-million dollars a year to repair the fresh-water and sewage systems, and the public buildings. This figure does not include the damage caused to private buildings by the sinking.

The cost of the water which we extract from the subsoil of Mexico City is the most expensive in the world. To the normal cost of pumping and of distributing one has to add 75 cents (U. S. ) per thousand gallons.

388 Carlos G. Fernandez

Since before Spanish colonial times Mexico City has had the problem of flooding. To protect the city from floods there are now two tunnels and one cut which drain the Valley of Mexico into the Tula River, and from thence into the Panuco River--and finally into the Gulf of Mexico. During the months from May to September, the rainy season, the amount of water which falls on the Valley is considerable. In the southern part of the Valley the average rainfall is of 28 inches a year; in the northern part, 20 inches a year. The amount of rainwater pouring on the Valley during the showers of the rainy season is quite large. The two tunnels and the cut are taxed to the limit of their capacities to carry this excess water to the ocean.

The possibility of floods has increased very much with the sinking of the city. The city is now 30 feet below the level of the bottom of the Texcoco Lake. The sewage canal which carries the sewage from Mexico City to the tunnels and then into the Tula River, is built on the bottom of the old Texcoco Lake. The sinking of Mexico City has lowered the sewage-level pipe so that sewage no longer flows by gravity into the sewage canal: it must be pumped up into it.

In the conditions which prevail today there is no possible place for safe water storage in the Valley of Mexico. Mexico City occupies now the lowest levels in the high plateau. Storing water in the Valley at any level higher than the City would seriously increase the danger of floods in the city.

#### THE SOLUTION

The basin on which Mexico City is built is bordered by mountains on the south and west. On the north and on the east it is bordered by the basin of the old lake of Texcoco. This Texcoco basin has an area of 450 (442.5) square miles or 14 per cent of the total area of the Valley. The Texcoco Lake was a salt lake long before the Spaniards conquered Mexico. In 1465 the Emperor of Texcoco, Netzahualcoyotl, and the Emperor of Mexico, Montezuma the first, ordered a dam built to separate the salt water of Lake Texcoco from the fresh water of the Lake of Mexico City. The purpose of this dam was to protect Mexico City from the floods. This problem is thus 500 years old.

During Spanish colonial times a solution of the problem of floods was attempted by draining the Valley of Mexico into the ocean. In 1608 a tunnel was finished in Huehuetoca in the north of the Valley; this tunnel drained the high plateau into the Tula River and from there into the Panuco River and finally into the Gulf of Mexico. The tunnel lasted only 20 years.

In 1709 the cut of Nochistongo, which is still working, was finished. Since that time the Texcoco Lake became a series of

very shallow ponds.

The area of the basin of the old Texcoco Lake, being 442.5 square miles in size, is far larger than the area of the basin of Mexico City which has an extension of 280 square miles. The Texcoco basin is thus larger in area by 60 per cent. The distance of the geographical centers of the two basins is 20 miles. These two basins are probably hydrologically disconnected. In the Texcoco basin there is a water layer at the depth of approximately 100 feet which has a content of dissolved solids of 140,000 parts per million, or four times the salinity of ocean water. The salts of Lake Texcoco are Sodium Carbonate and Sodium Chloride in equal amounts with traces of Lithium and Boron salts. Almost no Calcium is present. A company called "Sosa Texcoco" which is partially state-owned, exploits this water layer to produce soda ash and caustic soda. Underneath Mexico City there is no water layer which is salty or even brackish. (Figure 3.)

The surface water in the Texcoco Lake and the water permeating the clay at depths up to 250 feet have the same composition as that of the water layer of 100 feet. At greater depths the salinity diminishes rapidly. At 300 feet the water is brackish with 2,000 parts of dissolved solids per million. At about 600 feet the salinity is 500 parts per million.

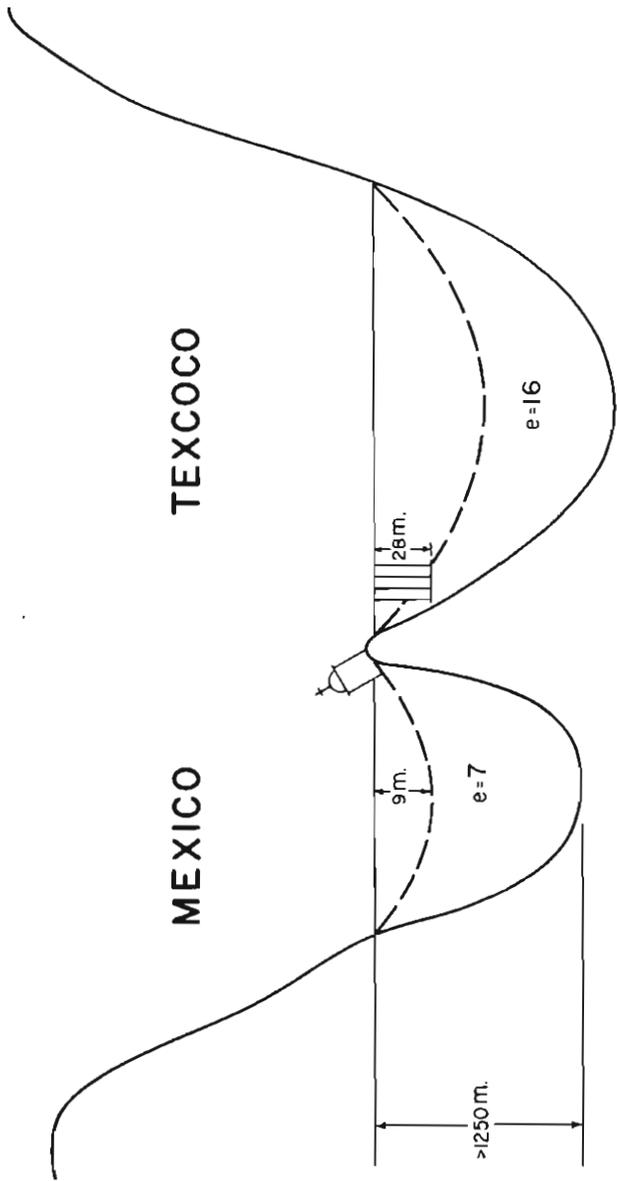
The structure of the clay of the Texcoco basin is even more astonishing than that of the Mexico City basin. In Texcoco the clay has a void ratio of 16:1, an incredibly high water content.

The company "Sosa Texcoco" has about 200 wells scattered over an area of 6,000 extracting water from the water layer of 100 feet depth at a rate of 7.6-million gallons a day. In the last six years the area has sunk at a rate of 1 foot 8 inches per year.

In the Texcoco Basin we have thus a clay with a much higher water content than in Mexico's basin and with a far greater total volume. Why not extract water from the clay of the Texcoco basin and pump it to Mexico City?

The reason why nobody had thought of doing this is the very large salinity of the uppermost water layers in Texcoco. Dr. Nabor Carrillo, First Commissioner of the Mexican National Nuclear Energy Commission, was the first who seriously considered this problem. It may be that his double training, as an expert in both soil mechanics and nuclear energy, was responsible for inspiring such ideas. He was able to envisage the following solution:

1. Extract water from the subsoil of Texcoco in larger quantities than are now being extracted from the subsoil of Mexico City. Thus, more than 180 MGD must be pumped out of the clay of Texcoco.



7% "SALTS" (Na Cl; Na H Co<sub>3</sub>, etc.)

**MEXICO CITY WATER BALANCE**

-8.0m<sup>3</sup>/sec = -182.6 x 10<sup>6</sup> US gal / day  
+2.5m<sup>3</sup>/sec = +57.0 x 10<sup>6</sup> US gal / day

Figure 3. Hydrology of Mexico-Texcoco Basins

2. Desalinate this water with the help of a nuclear reactor linked with a multiple-stage flash-evaporator plant.
3. Send this distilled water to Mexico City.
4. Stop extracting water from the subsoil of the City.

The consequences of this would be:

1. Mexico City would stop sinking.
2. Mexico City could continue its natural growth and its industrial development with the availability of larger amounts of water.
3. The bottom of the old Texcoco Lake would sink at a faster rate than that at which Mexico City is sinking now.

As soon as the bottom of the old Texcoco Lake reaches an altitude lower than that of Mexico City, it can be used as a water reservoir for storing the excess water which occurs in the Valley during the rainy season. Instead of draining all the excess water in the rainy season into the ocean, this water could be stored in the Valley for use in the dry season.

If this could be carried out there would be several added advantages. Today the Texcoco Lake dries out almost completely during the dry season. Its surface is the source of dust storms which affect Mexico City every year. The dry bottom surface of the old Lake behaves like a desert, becoming enormously hot.

Whirlwinds originate which raise great quantities of dust into the atmosphere. When the wind blows west or southwest, this dust is blown into the City as a dust storm. Unfortunately these occur several times a year. Sometimes these dust storms are so bad that they completely stop the traffic in downtown Mexico. They are the cause of many diseases of the respiratory system of the inhabitants of our capital.

Rebuilding Lake Texcoco would make these dust storms disappear. Besides that, the area would gain by being enormously beautified by a large lake.

Dr. Nabor Carrillo has explored the possibility of hastening the formation of a lake. With the collaboration of Professors Arthur and Leo Casagrande from Harvard University, he has considered starting the construction of a reservoir immediately.

The void ratio of 16:1 of the clay adds greatly to the feasibility of this project. Explosions can liquify the clay which could be pumped away as liquid. Besides explosives, ultrasonics or electro-osmosis can also be used.

392 Carlos G. Fernandez

The role of the nuclear reactor in this project is as a source of power for desalination. The nuclear reactor can thus help to give water to a thirsty city and help to stop the sinking of a city otherwise doomed to collapse. It can help to stop the dust storms and it will contribute so to the better health of the six-million inhabitants of Mexico City. It will also help to beautify the surroundings of this city and to humidify its atmosphere. One can hardly imagine how one can use a reactor to serve more noble purposes.

#### THE REALIZATION

The Mexican Government has seen the beauty of the nuclear solution to the water problems of Mexico City. It has approved a budget to make a feasibility study.

A very capable and experienced civil engineer, Roberto Graue, has been appointed head of the Texcoco Project. Graue has ordered several wells drilled to find out if the Texcoco basin is really hydrologically independent of the basin of Mexico City. Other wells are being drilled to explore the water layers, to analyze their composition, and to determine the depth of the lake deposits. Graue is performing tests to find out if the upper layers of clay can be liquified by explosions or by other methods.

In the near future we hope to see the recreation of beautiful Lake Texcoco in its old location.

*Reimpreso de Excerpta Medica International Congress Series No. 185*  
 IV SIMPOSIO PANAMERICANO DE FARMACOLOGIA Y TERAPEUTICA  
 Academia Nacional de Medicina, Mexico, D.F.  
 24-26 Agosto 1967

## RADIOISÓTOPOS COMO INSTRUMENTOS DE PROGRESO

CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ

Centro Nuclear de México de la Comisión Nacional de Energía Nuclear, México, D.F.

Dice Samuel Glasstone en su *Source Book of Atomic Energy*, que se ha predicho que cuando en el futuro se haga un balance, a la luz de la historia, de lo que significó el desarrollo de la energía nuclear, se encontrará que el mayor beneficio para la humanidad fué la aplicación de radioisótopos e isótopos estables.

El progreso en las aplicaciones de los radioisótopos ha sido explosivo, desde la primera aplicación legendaria de un radioisótopo por Jorge De Hevesy en 1911. De Hevesy nació en Budapest, Hungría, en 1885. En 1911 estaba en Inglaterra trabajando en el laboratorio de Ernest Rutherford. En la casa de huéspedes en que vivía servían con frecuencia platillos de carne molida. De Hevesy sospechaba que esos guisos estaban confectionados con los restos de carne que dejaban en los platos los huéspedes. En una ocasión, contaminó los trozos de carne que dejó en su plato con un radioisótopo natural. Al otro día detectó la presencia de este radioisótopo en el platillo de carne molida que sirvió la señora de la casa de huéspedes.

Al mismo científico húngaro, Jorge De Hevesy, se debe la primera aplicación seria de un radioisótopo como trazador. En 1923 utilizó el Plomo-212, radioisótopo natural, para estudiar la absorción de plomo por frijoles durante la germinación.

En 1935 utilizó De Hevesy, con la colaboración de Chiewitz, por primera vez, un radioisótopo artificial de fósforo para estudiar la absorción de abonos químicos por plantas. En 1943 De Hevesy fué laureado con el Premio Nobel de Química.

Los radioisótopos son el instrumento más versátil con el que cuentan la ciencia y la técnica. Hacen el papel de relojes o sea cronómetros, de termómetros, de trazadores, de indicadores de nivel, de calibradores, de velocímetros y de vigilantes. Las radiaciones que emiten los radioisótopos permiten detectar huecos y grietas en piezas metálicas; esas mismas radiaciones alteran las cualidades de materiales, esterilizan objetos, hacen el papel de bactericidas e insecticidas, y provocan cambios genéticos en plantas y animales y hacen de catalíticos en reacciones químicas.

Es imposible en el breve tiempo de una conferencia presentar ni siquiera un ejemplo de cada aplicación de los radioisótopos. Presentaré a Uds. una selección de aplicaciones que muestren la extraordinaria versatilidad de los radioisótopos y su valor como *instrumentos de progreso* en varias ramas de la ciencia, la técnica y la industria.

Los radioisótopos Carbono-14, Potasio-40, Rubidio-87 y Uranio-238 son cronómetros - relojes - que permiten medir intervalos de tiempo desde mil años, hasta la edad del universo. El Carbono-14 es el cronómetro de los residuos orgánicos. Todo el carbono de los tejidos orgánicos proviene del bióxido de carbono de la atmósfera. En la atmósfera, neutrones producidos por la radiación cósmica generan Carbono-14 por la reacción Nitrógeno-14 (n, p) Carbono-14. Hay razones para suponer que la abundancia relativa del Carbono-14 en el bióxido de carbono de la atmósfera ha sido constante por miles de años. Determinando la abundancia relativa del Carbono-14 en una muestra de materia orgánica muerta, se puede calcular el tiempo que ha transcurrido desde que dejó dicha muestra de estar recibiendo Carbono del exterior, es decir, el tiempo que tiene de haber muerto. El período de semi-desintegración del Carbono-14, que es 5,568 años (  $\pm$  30) permite medir la edad de muestras orgánicas desde mil años hasta 50,000 años. El método de fechar muestras orgánicas por medio del Carbono-14 lo desarrolló el científico estadounidense Willard F. Libby en la Universidad de Chicago al final de la década de 1940-1950.

De los otros radioisótopos relojes quiero presentar al Uranio-238, que tiene un período

## C. GRAEF FERNÁNDEZ

de semidesintegración de  $4.498 \times 10^9$  años, comparable a la edad del Universo. Este elemento se ha utilizado para determinar la edad de los meteoritos y de las rocas más antiguas de la tierra. En la serie radiactiva del Uranio-238 el producto final es Plomo-206, que es estable. En el transcurso de la desintegración se pasa por Torio-234, Protactinio-234, Uranio-234, etc., por Radio-226, Radón-222 y por fin se termina en el Plomo-206. En varias de las desintegraciones hay emisión de rayos alfa. Determinando en una muestra de un meteorito la relación de Uranio con cualquiera de los productos filiales de su serie, se puede determinar la edad del meteorito. También se utiliza la determinación de la cantidad de Helio presente que se supone proviene de los rayos alfa emitidos. Las determinaciones de la edad de los meteoritos arrojan cifras como  $4.5 \cdot 10^9$  años confirmando la escala corta para la edad del Universo. Hay que hacer notar que se llama "edad de un meteorito" al tiempo que tiene de haberse solidificado. "Edad" es equivalente al tiempo que llevan los átomos de Uranio en el meteorito de estar aprisionados en el hierro meteorico.

En este mes de agosto, un grupo de geólogos estadounidenses y brasileños, encabezados por Patrick M. Hurley del Instituto Tecnológico de Massachusetts, utilizó la determinación de la edad de las rocas por medio del Potasio-40 y del Rubidio-87, para fortalecer la evidencia en favor de la teoría de la deriva gradual de los continentes. En 1912 Alfred Wegener, geólogo alemán, propuso esta teoría. Según Wegener, el continente americano embona perfectamente, en su contorno oriental, con el contorno occidental de Europa y Africa. Teniendo en cuenta a Groenlandia y a las otras islas del Atlántico, es posible establecer una correspondencia muy detallada entre las dos costas. Según la teoría de Wegener, hace 200 millones de años los continentes formaban una sola masa terrestre, y fué entonces cuando empezó la deriva gradual. En 1964, el geofísico británico Sir Edward Bullard, aplicó una computadora electrónica al análisis de los accidentes de las costas de Africa, Europa y América del Sur, a una profundidad de 1 kilómetro, para establecer una correspondencia más precisa. Encontró muchos puntos en que los accidentes de las costas del Nuevo Mundo embonan con los accidentes de la costa del Viejo Mundo. Patrick M. Hurley trató de demostrar lo erróneo de la teoría de la deriva de los Continentes, por medio de la edad de las rocas. Hay en Africa una línea, que partiendo aproximadamente de Accra en Ghana, en dirección Noroeste, divide a ese continente, en una región de rocas de la edad eúrnea hacia el Oeste, y otra región de rocas de edad panafricana hacia el Oriente de esa línea. Las rocas de edad eúrnea tienen dos mil millones de años y las de la edad panamericana 550 millones de años. Patrick M. Hurley trató de demostrar que la línea divisoria de las dos regiones de rocas, de edades tan diferentes, no se extendía a Sudamérica. Según el cuidadoso análisis de Sir Edward Bullard, el punto correspondiente a Accra en Africa, es São Luis, en la costa oriental de Brasil, tres mil cien kilómetros al Norte de Río de Janeiro. El equipo estadounidense brasileño de geólogos, encontró que en Sudamérica había una línea correspondiente a la línea africana, que también separaba dos regiones de rocas de edades de dos mil millones de años y 550 millones de años. El Rubidio-87 y el Potasio-40 le daban la razón a Alfred Wegener y a Sir Edward Bullard. Aquí los radioisótopos le permitieron al hombre lanzar una mirada hacia el pasado de la Tierra.

El científico estadounidense H. C. Urey utilizó en forma muy ingeniosa a dos isótopos de Oxígeno, el Oxígeno-16 y Oxígeno-18, para medir la temperatura de los mares del pasado geológico. Urey es el descubridor del hidrógeno pesado. La propiedad de los dos isótopos del oxígeno que permite medir la temperatura del mar, en su abundancia relativa con el carbonato de calcio de las conchas de cefalópodos y pelecípodos. La abundancia relativa de Oxígeno-18 a Oxígeno-16 en las conchas de animales marinos, es 2.6% mayor que la natural, en mares en que la temperatura es de 0°C. Esa abundancia relativa es 2.2% mayor que la natural cuando la temperatura es de 25°C. A pesar de la pequeña diferencia, de 2.2% a 2.6% para una variación de temperaturas de 0°C a 25°C, el espectrógrafo de masas permite medir una magnitud con mucha precisión. Urey midió la abundancia relativa de los oxígenos en conchas de cefalópodos Belemnites en estratos del sistema cretácico de Hampshire en Inglaterra, y pudo detectar una variación en la temperatura del mar de 26.5°C a 18.8°C en un lapso de 10 millones de años. Los isótopos del oxígeno permitieron que se midiera la temperatura que tuvo el mar hace 100 millones de años.

Los radioisótopos son una fuente de energía. Un aprovechamiento directo de la energía de un radioisótopo se utiliza en fuentes de energía eléctrica para las boyas. Dentro de una esfera de hierro de 25 cm de diámetro hay una pequeña esfera de Plutonio-238 que tiene un

#### RADIOISÓTOPOS COMO INSTRUMENTOS DE PROGRESO

período de semidesintegración de 92 años. La energía térmica desarrollada por las desintegraciones del Pu-238 se convierten en energía eléctrica por medio de un conjunto de pares térmicos que tienen un extremo en el Plutonio y el otro apuntando radialmente hacia afuera. La energía producida es suficiente para mantener encendida una lámpara eléctrica por 50 años. Antes de que se extinga la fuente, se funden los alambres de la lámpara.

Una aplicación muy interesante de los radioisótopos la realizó el Ing. Armando López, Jefe del Programa de Química de las Radiaciones, de la Comisión Nacional de Energía Nuclear (CNEN). Petróleos Mexicanos (PEMEX) solicitó de la CNEN que se gamagrafiaran tanques esféricos de hierro, que estaban destinados a contener amoníaco. Uno de los tanques tenía 20 metros de diámetro y estaba constituido de placas de hierro de aproximadamente 4 m<sup>2</sup> cada placa. En un solo tanque, había más de 300 metros de soldadura que debían gamagrafiarse. Armando López pegó película de rayos X cubierta con papel negro a lo largo de los 300 metros de soldadura por el exterior del tanque. En el centro de la esfera colocó una fuente de Cobalto-60 de intensidad de 1 curie. Expuso de una sola vez 300 metros de película. La colocación central de la fuente dió una definición perfecta. En este tipo de aplicación, los radioisótopos permiten localizar fallas en piezas metálicas ahorrándole muchos fracasos a la industria. Se ha estimado que la aplicación de radioisótopos en la industria de los Estados Unidos ahorra a ésta centenares de millones de dólares al año.

Una aplicación muy importante e ingeniosa de los radioisótopos es el aparato de alarma para la presencia de bióxido de azufre en el "smog". En español podremos traducir quizás "smog" por "neblumo". El neblumo es una mezcla de neblina, o sean gotas de agua suspendidas en la atmósfera, con humo, o sean partículas sólidas suspendidas en el mismo medio. Muchas de las grandes ciudades industriales sufren el azote del neblumo. Algunas industrias arrojan a la atmósfera bióxido de azufre entre los gases de desperdicio que salen por las chimeneas. En general el bióxido de azufre se dispersa a suficiente altura sobre el suelo y se diluye en la atmósfera sin causar perjuicios serios a los seres humanos. Pero cuando hay un banco bajo de neblumo que llega hasta el suelo, el bióxido de azufre se combina con el agua de la neblina formando ácido sulfuroso que es sumamente tóxico para los pulmones. Es muy importante notar la presencia del ácido sulfuroso en la atmósfera, y dar la señal de alarma para que los habitantes de la ciudad se refugien en sus casas y cierren puertas y ventanas para evitar que respiren el ácido sulfuroso. El aparato de alarma tiene Kriptón-85 encerrado en cristales muy rápidamente solubles en ácido sulfuroso. Cuando el neblumo cargado de ácido sulfuroso entra en contacto con los cristales, el ácido los disuelve, y libera al Kriptón-85 que da la señal de alarma en un detector. Este radioisótopo es un vigilante incansable de la salud de los habitantes que padecen el neblumo.

#### RESUMEN

Los radioisótopos son un arma poderosa para el científico, pues le permiten averiguar las edades de meteoritos, rocas y muestras arqueológicas. Le permiten investigar como era la Tierra en el pasado y qué temperatura tenían sus mares. Le permiten sugerirle la pista a los elementos a través de plantas, animales y el hombre mismo. Le permiten sugerirle la pista a los depósitos marinos y fluviales.

Lo que los radioisótopos significan para la medicina no lo menciono, pues ustedes lo saben mucho mejor que yo.

En la industria y en la agricultura los radioisótopos significan una economía enorme que se expresa en miles de millones de dólares para todo el mundo, además de que arrojan luz sobre procesos que el hombre no entendía antes.

Todavía no es posible concebir totalmente lo que en el futuro significarán los radioisótopos que se producen como desperdicios radioactivos en los reactores nucleares. Sus radiaciones extremadamente baratas permitirán la conservación de alimentos y la esterilización radiológica de materiales a muy bajo costo.

Lo que se logra ya actualmente con los radioisótopos justifica con creces lo que sospechaban algunos científicos, al decir que eran la contribución más importante de la era atómica a la humanidad.

#### SUMMARY

Radioisotopes are a powerful weapon for the scientist, since they allow him to determine the ages of

## C. GRAEF FERNÁNDEZ

meteorites, rocks, and archaeological samples. They enable him to investigate what the earth used to be like, and what the temperature of its oceans was. They permit him to follow the course of the elements through plants, animals, and man himself. They make it possible for him to follow the course of ocean and river deposits.

I shall not mention the value of radioisotopes to medicine, as you are much more aware of this than I.

In industry and agriculture, radioisotopes mean an enormous saving for everyone, amounting to billions of dollars, in addition to the fact that they throw light on processes not previously understood by man.

It is still not possible to fully conceive what radioisotopes produced as radioactive waste by nuclear reactors will mean in the future. Their extremely inexpensive radiations will permit the preservation of foodstuffs, and radiological sterilization of materials, at a very low cost.

What can already be achieved with radioisotopes more than justifies what some scientists suspected when they said that they were the atomic age's most important contribution to humanity.

## PROLOGO

*LO QUE caracteriza a la Física entre las otras ciencias es su afán de penetrar hasta las últimas causas de los fenómenos naturales. El físico no descansará hasta no lograr deducir todas las propiedades de las substancias a partir de su estructura molecular; y hasta no explicar ésta fundándose en la distribución de los átomos en la molécula, y hasta no reducir el comportamiento de los átomos a consecuencias de sus estructuras internas, que consisten en la distribución de los electrones en sus niveles de energía y las estructuras de sus núcleos. Todos los fenómenos naturales son fenómenos que acontecen entre las partículas fundamentales de la Física: protones, neutrones, electrones, positrones, mesotrones, neutrinos y fotones. El físico aspira a explicar cualquier fenómeno natural como un proceso entre las partículas fundamentales, las acciones que entre ellas se ejercen, y las fuerzas que las urgen. Está muy lejos la Ciencia de esa meta, que quizás no sea ni alcanzable, pero la Física ha logrado recorrer un camino considerable en esa dirección. Al hacer ese recorrido la Física ha fecundado a otras actividades humanas, algunas veces conscientemente y otras veces de un modo inconsciente.*

\* \* \*

*La Física es de fundamental importancia para el desarrollo de la industria. En primer lugar porque es una fuente inagotable de instrumentos y aparatos que adquieren importancia industrial uno a uno. Los carretes de inducción con los que experimentaba el insigne físico inglés FARADAY, son los precursores inmediatos de las dinamos y de los motores eléctricos tan esenciales para la industria. La válvula en la que descubrió el genial americano EDISON su efecto, y con la que ejecutó en el ocaso del siglo XIX, el eminente físico inglés J. J. THOMSON sus experimentos demostrando que el filamento caliente emite electrones, se encuentra ahora perfeccionada y transformada en todos los aparatos de radio. Los aparatos con los que el físico alemán HEINRICH HERTZ producía a fines del siglo pasado ondas electromagnéticas evolucionan en manos de los técnicos hasta convertirse en las poderosas estaciones transmisoras de nuestros días.*

*Nos encontramos ahora en el umbral de las aplicaciones industriales del ciclotrón inventado por el físico americano ORLANDO LAWRENCE, y usado hasta hace muy poco tiempo exclusivamente en investigaciones de la física pura.*

Además de proporcionarle la Física a la industria los embriones de aparatos y de instrumentos que desarrollados y cultivados por los técnicos son de las notas dominantes en la vida contemporánea, esta ciencia equipa al técnico con el cuerpo de doctrina necesario para poder entender y dominar el funcionamiento de los intrincados mecanismos que éste tiene necesidad de crear. Para entender a fondo las máquinas eléctricas y los dispositivos electromagnéticos de la industria contemporánea, el ingeniero electricista necesita conocer profundamente la teoría electrónica, rama de la Física de nuestros días. Solamente los técnicos que entienden completamente los fundamentos físicos de sus especialidades, son capaces de crear nuevos mecanismos y aparatos.

El proyecto y diseño de las grandes obras de ingeniería civil —como las grandes presas, los gigantescos edificios y los túneles—, requieren conocimientos profundos de las disciplinas físicas de la elasticidad y la plasticidad. En las investigaciones en este campo colaboran ahora ingenieros y físicos.

\* \* \*

Estamos viviendo estos días las repercusiones de la más espectacular aplicación de la Física, la bomba atómica. El efecto de esta arma se debe a una transformación súbita de materia en energía. Por consideraciones de física teórica pura había predicho el más grande de los físicos contemporáneos ALBERT EINSTEIN en 1905 la posibilidad de una conversión de ese tipo, y había formulado la ley mediante la cual es posible valuar la cantidad de energía en la que se transforma una cantidad de masa. La primera comprobación experimental de la ley de EINSTEIN se debe al físico inglés RUTHERFORD quien en 1919 logró convertir nitrógeno en uno de los isótopos del oxígeno al bombardearlo con partículas  $\alpha$ . En este proceso se parte de cierta cantidad de materia en forma de nitrógeno y de partículas  $\alpha$ , y de cierta cantidad cinética de las partículas proyectiles, y se termina con un isótopo del oxígeno e hidrógeno; la cantidad total de materia resultante es menor que la inicial y la materia desaparecida se transforma en energía.

La materia que en la bomba atómica se transforma en energía es uno de los isótopos del uranio, el de peso atómico 235. Los proyectiles que desencadenan el proceso son los neutrones. El primero que bombardeó uranio con neutrones fue el genial físico italiano ENRICO FERMI, laureado del Premio Nobel; FERMI fue uno de los físicos que crearon la bomba atómica. La interpretación rigurosa de los experimentos de FERMI, y la presentación de la primera desintegración del uranio, la dieron la física austriaca LISE MEITNER y el físico alemán HAHN quien fue distinguido el año de 1946, con el Premio Nobel.

La investigación completa de lo que acontece a los isótopos del uranio al ser bombardeados por neutrones se debe a uno de los más grandes físicos contemporáneos, el danés NIELS BOHR, y a su colaborador J. A. WHEELER. La aportación esencial norteamericana a la creación de la bomba atómica consiste en la invención de los métodos de separación de los isótopos del uranio que se debe principalmente a ALFRED O. NIER, físico de la Universidad de Minnesota, y a los físicos K. H. KINGDON y H. C. POLLOCK de los Laboratorios de la General Electric. Los trabajos de todos estos físicos hicieron posible al

hombre convertir súbitamente materia en energía. El uranio 235 que desaparece parcialmente en la bomba se transforma en energía que al calentar repentinamente el aire atmosférico produce una ráfaga enormemente destructora de aire candente.

La física nuclear que hasta 1945 era una disciplina física pura —exceptuando las aplicaciones médicas de la radiactividad—, asombra al mundo con una aplicación militar de incalculables consecuencias. Todavía no se inicia la aplicación industrial de esa enorme fuente de energía de la que hasta ahora sólo se ha extraído potencia destructora, pero ya se otea la proximidad de la era atómica, en la que en todas las fábricas se destruirán átomos —materia—, y la masa destruida moverá las máquinas.

\* \* \*

Nosotros, los habitantes de este maravilloso mundo que la industria y la técnica están moldeando, inspiradas por la Física, no podemos volver la espalda a esta ciencia. Si una nación lo hace, está condenada a depender totalmente de las otras para sus productos industriales y para sus técnicos. Si un individuo ignora la Física, será incapaz de entender los procesos técnicos e industriales contemporáneos y desconocerá totalmente esta gigantesca componente del mundo actual; el ignorante de la Física no será nunca un hombre de nuestra época, y a sus ideas les faltará en todos los campos el sello que imprime el conocimiento de la totalidad de los procesos que caracterizan a una era.

\* \* \*

Otro aspecto fundamental de la Física en la cultura es la explicación de los fenómenos cosmológicos. Nuestra cultura occidental heredó de los helenos la preocupación de entender el Cosmos científicamente. Dos Cosmologías rivales pretenden explicar los movimientos de los más lejanos objetos celestes, las gigantescas acumulaciones estelares llamadas galaxias. Una de estas Cosmologías es la Teoría de la Relatividad General de ALBERT EINSTEIN, quien postula un universo finito y curvo, en expansión. La otra Cosmología es la que se desarrolló en nuestro México fundada en la Teoría de la Gravitación del más grande de los matemáticos de nuestro continente GEORGE DAVID BIRKHOFF. Esta última postula un universo infinito y llano. Ambas Cosmologías explican la conducta dinámica de toda la materia visible con los más poderosos telescopios. Pronto penetrarán las profundidades del espacio instrumentos ópticos más poderosos de los que actualmente usan los astrónomos, y entonces se impondrá una de las dos Cosmologías contendientes. La ciencia de nuestro país participa activamente en la lucha, en el campo Birkhoffiano.

\* \* \*

Es fácil de percibir la enorme importancia que tiene para el estudiante mexicano el aprender profundamente la Física. Se inicia la industrialización de nuestro país. Nos faltan ingenieros y técnicos. Además, todo mexicano culto debe comprender a fondo los problemas de nuestra industria y de su

técnica. Los fascinantes problemas de la Física cosmológica contemporánea son necesariamente parte del acervo cultural de un hombre del siglo xx.

Surge entonces el problema de ¿en qué libros adquirirá el estudiante mexicano esos conocimientos? Lo más conveniente es que en los estudios que se hacen en la Escuela Preparatoria y los primeros años de las Facultades se utilicen textos en nuestro idioma. De otro modo se agrega, a la complejidad natural de una materia tan vasta y tan desarrollada como es la Física, la dificultad de traducir de un idioma extranjero. Es por eso de aplaudirse que se publiquen libros de texto en español, especialmente en ese nivel de enseñanza.

DR. CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ  
Comisión de Energía Nuclear de México.  
Ex-Director de la Facultad de Ciencias de la  
Universidad Nacional Autónoma de México.  
Ex-Presidente de la Sociedad Mexicana de Física.

## **La serendipidad**

POR

CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ

La palabra "serendipidad" es un neologismo que me atrevo a proponer para traducir al español el vocablo inglés "serendipity". En artículos científicos de autores británicos y estadounidenses escritos en las últimas décadas, aparece con mucha frecuencia este giro para designar la facultad que tienen algunos hombres de realizar valiosos hallazgos cuando están en busca de algo totalmente distinto. Dice Theodore G. Remer, distinguido abogado de Chicago y autor de un libro titulado *Serendipity*,<sup>1</sup> que esta palabra tiene un encanto y un ritmo muy de ella, y que fascina al curioso. Además de estas cualidades intrínsecas tiene el vocablo una historia muy pintoresca. El creador de *Serendipity* es un notable personaje inglés del siglo XVIII: Sir Horace Walpole. El padre de Sir Horace fue el ministro más poderoso en los regímenes de dos de los reyes hanoverianos de Inglaterra, Jorge I y Jorge II; este último le otorgó el título de nobleza de "Primer Conde de Orford". Horace, su quinto hijo, nació el 24 de septiembre de 1717. Al final de su vida heredó el título y fue el "cuarto Conde de Orford". Hizo sus primeros estudios en Eton, la escuela de la alta aristocracia inglesa. Siguiendo el ejemplo de su padre inició una carrera política. Resultó electo miembro del Parlamento en 1741, a la edad de veinticinco años. Abandonó muy pronto esta actividad parlamentaria, pero durante todo el resto de su vida llevó una crónica detallada de los acontecimientos en las Cámaras inglesas. La política le fascinó como contemplador mas no como participante activo. Cuando heredó el título de Conde de Orford en 1791, adquirió con él el derecho de ser miembro de la Cámara de los Lores. Nunca ejerció esta prerrogativa. Murió cinco años después, el 2 de marzo de 1797, a la edad de setenta y nueve años.

Sir Horace Walpole fue un escritor incansable. También le interesó el aspecto material de la producción literaria. Fundó una

<sup>1</sup> Theodore G. Remer. *Serendipity and the Three Princes*. University of Oklahoma Press. Norman, 1965, pág. 7.

imprensa que llamó: "Officina Arbuteana" en la que vieron la luz pública sus numerosas obras. Fue novelista, dramaturgo e historiador. Su más famosa novela es *El castillo de Otranto*; su drama más conocido es *Madre misteriosa*. A principios del siglo XIX, pocos años después de su muerte, se publicaron sus diarios que narran con todo detalle los acontecimientos más relevantes de su época. Los estudiosos de la historia de Inglaterra encuentran datos muy interesantes en sus *Memorias de los últimos diez años del reino de Jorge III*. Horace Walpole es un autor muy prolífico pero su fama no se la debe ni a sus novelas, ni a sus dramas, ni a sus obras históricas. Se le considera el mejor autor de cartas de habla inglesa. Es su actividad epistolar la que le conquistó un lugar eminente en la literatura. Sus *Cartas* se han editado numerosas veces. Las ediciones más recientes son las que publicó la señora Paget Toynbee en 1918<sup>2</sup> y la de W. S. Lewis en 1937.<sup>3</sup> Estas epístolas son modelos para los estudiantes de literatura inglesa. Las *Cartas* son la obra viva de Walpole.

La palabra "serendipity" nació en una carta de Sir Horace Walpole a Sir Horace Mann, que además de ser homónimo del famoso educador estadounidense era el representante diplomático inglés en Florencia. La carta tiene la fecha del 28 de enero de 1754. De "serendipity" dice su creador que es una palabra muy expresiva. Narra que en una ocasión leyó un cuento de hadas titulado *Los tres príncipes de Serendip*; al viajar sus altezas solían descubrir, por accidente o sagacidad, objetos que no buscaban. Esto le sugirió el vocablo "serendipity" para designar a la sagacidad fortuita. "Serendipity" nació hace poco más de dos siglos, pero no es sino hasta las últimas décadas cuando ha conquistado más y más adeptos. Además de ocurrir en la literatura científica, hay tiendas, restaurantes y bares que se llaman "Serendipity" en Londres, Edimburgo y Nueva York.

<sup>2</sup> Paget Toynbee. *The Letters of Horace Walpole*. Oxford, The Clarendon Press, 1918.

<sup>3</sup> Wilmarth Sheldon Lewis. *Horace Walpole's Correspondence*. New Haven, Yale University Press, 1937.

En la obra reciente *Standard Dictionary of the English Language; International Edition*, de Funk & Wagnalls (New York, 1967), se lee bajo serendipity: *The faculty of happening upon or making fortunate discoveries when not in search of them. {Coined by Horace Walpole (1754) in the Three Princes of Serendip (Ceylon), the heroes of which make such discoveries.}*

Traducida al español esta definición reza: serendipidad es "la facultad de encontrarse con, o de realizar descubrimientos afortunados cuando no se está en busca de ellos. [Palabra forjada por Horace Walpole (1754) en *Los tres príncipes de Serendip (Ceilán)*; los héroes de esta obra realizan tales descubrimientos.]

Otros diccionarios de habla inglesa contienen definiciones semejantes. Es un hecho que Sir Horace Walpole se inspiró en *Los tres príncipes de Serendip* para crear la palabra *serendipity*, pero él no es el autor de esa obra.

Todos los autores que definen *serendipity* están de acuerdo en que "Serendip" significa Ceilán; algunos dicen que es una forma arcaica de "Ceilán". El eminente experto inglés en lenguas orientales, Robert Caesar Childers, sostiene que la palabra *serendip* es híbrida, que proviene de *simhala* que significa "pueblo cingalés" en sánscrito y de *dipa*, que significa "isla" en idioma pali. En esta última lengua Ceilán se llama "Serumdipa". En varias lenguas orientales Ceilán tiene nombres parecidos a la palabra *serendip*.

El neologismo que se propone: "serendipidad" tiene entonces una raíz sánscrita *simhala* que significa "pueblo cingalés"; otra raíz pali *dipa*, que significa "isla", y una terminación española "dad".

La historia de la obra *Los tres príncipes de Serendip* es muy notable.

El año de 1557 se publicó en la ciudad de Venecia, en la imprenta de Michele Tramezzino, una obra que lleva en la portada la siguiente leyenda: *Peregrinaggio di tree giovani figliuoli del re di Serendippo* per opra di Christoforo Armeno dalla Persiana nell'Italiana lingua trapportato. (*Peregrinación de tres jóvenes*

*bijos del rey de Serendipo*; traducida de la lengua persa a la italiana por Christoforo Armeno). Después de muy cuidadosas investigaciones, han llegado los eruditos a la conclusión de que no existió Christoforo Armeno y que tampoco existen en lengua persa las narraciones de los viajes de los tres hijos del rey de Serendipo. Estos cuentos son de diversos orígenes. Michele Tramezzino los recopiló y los editó, atribuyendo las aventuras y hazañas a los tres príncipes, hijos del rey de Ceilán. Para hacer más atractiva su obra le atribuyó un origen oriental. Finge que el libro es una traducción del persa al italiano realizada por Christoforo Armeno, un hombre de letras ficticio.

De la lectura del *Peregrinaggio* le quedó a Sir Horace Walpole el recuerdo de que los príncipes de Serendipo encontraban continuamente, por su sagacidad, cosas valiosas al estar en busca de otras. Así nació *serendipity*, de la inspiración de un intelectual inglés al leer los cuentos recopilados y editados por el veneciano Michele Tramezzino.

El ejemplo más grandioso de serendipidad es el descubrimiento de América. Cristóbal Colón zarpó el 3 de agosto de 1492 del puerto de Palos en busca de la India y de Catay. No llegó por el camino marítimo rumbo a occidente a esos países orientales, pero en su búsqueda descubrió un nuevo continente, América.

En la ciencia hay numerosos casos de serendipidad. Uno de los más notables es el descubrimiento de la radiactividad.

El científico francés Henri-Antoine Becquerel fundó esta rama de la física a principios de 1896 y con ello inició nuestro conocimiento de las propiedades de los núcleos de los átomos. La historia de este descubrimiento tiene sus orígenes en las postrimerías del año de 1895. El físico alemán Wilhelm Konrad Röntgen de Würzburg descubrió en esa época los rayos X al estar experimentando con rayos catódicos. Los rayos catódicos se generaban dentro de recipientes de vidrio. Al chocar éstos contra la pared del recipiente provocaban una luminosidad en el vidrio. Röntgen descubrió que esa porción luminosa del recipiente era

además la fuente de otros rayos muy penetrantes que hacían fluorescentes a ciertos compuestos, como al cianuro doble de bario y platino, y que además velaban a las placas fotográficas aunque éstas estuvieran protegidas por su envoltura de papel opaco y se encontraran en sus cajas de cartón cuidadosamente cerradas. A estos rayos se les conoce con el nombre de rayos Röntgen. Su descubridor los designó: "Rayos X".

El descubrimiento de Röntgen causó una gran sensación en los círculos científicos del mundo.

Pocos días después de la publicación del hallazgo de los rayos X sustentó el eminente matemático y físico francés, Henri Poincaré, una conferencia sobre este tema en la Academia de Ciencias de París. Entre los asistentes se encontraba Henri-Antoine Becquerel. Una persona del público preguntó a Poincaré el sitio exacto del aparato que usaba Röntgen, del que provenían esos rayos X. Poincaré contestó que la fuente de estos rayos era la porción del recipiente de vidrio que se ponía luminosa bajo el impacto de los rayos catódicos. Esto impresionó mucho a Henri Becquerel. Su padre, el físico Edmond Becquerel, había investigado con ahinco sustancias que se tornan fluorescentes al exponerlas a la luz del sol. Henri Becquerel pensó que si el vidrio fluorescente del aparato de Röntgen era una fuente de rayos X, los compuestos que se vuelven fluorescentes por influencia de la radiación solar, podrían ser fuentes de nuevas radiaciones, desconocidas hasta entonces. Él conservaba un espécimen puro de una sal que había usado su padre en sus experimentos sobre fluorescencia; se trataba del sulfato doble de uranilo y potasio. Con ese compuesto inició Henri Becquerel la búsqueda de una radiación desconocida, que según él debería producirse en la siguiente forma:

- 1) al ser expuesto el sulfato doble de uranilo y potasio a los rayos del sol, absorbe energía de esta radiación;
- 2) sustraído después este compuesto de los rayos del sol y

llevado al laboratorio emite la energía que había absorbido en dos formas: una de ellas como luz fluorescente y la otra como la radiación misteriosa en pos de la cual andaba el sabio.

Becquerel comenzó suponiendo que la radiación desconocida tendría semejanza a los rayos X de Röntgen, y que velaría las placas fotográficas aun dentro de sus envolturas opacas. Con estos antecedentes se ha erigido el escenario en el que ocurrirá el descubrimiento de la radiactividad.

Para poner de manifiesto la radiación desconocida Henri Becquerel envolvió en el cuarto oscuro a una placa fotográfica con un papel perfectamente opaco. En seguida colocó una llave sobre la placa envuelta. Sobre la llave puso un trozo de sulfato de uranilo y potasio. Con un cordón amarró a la placa envuelta a la llave y al trozo de sal doble. Este dispositivo lo expuso a los rayos del sol por varias horas. Cuando juzgó que el sulfato de uranilo y potasio había absorbido suficiente energía solar, llevó al conjunto a su laboratorio. Esperó un intervalo conveniente para que el sulfato de uranilo y potasio emitiera la energía absorbida en forma de luz fluorescente y de la radiación misteriosa. Luego deshizo el amarre y reveló la placa fotográfica. Con enorme placer vio aparecer la imagen de la llave en claro, rodeada de una región oscura velada por los rayos desconocidos. ¡Sus teorías se confirmaban! El sulfato de uranilo y potasio absorbía energía solar que emitía después en forma de luz fluorescente y de una radiación nueva semejante a los rayos X que penetraban a través del papel, pero no a través de la llave metálica.

Henri Becquerel repitió muchas veces su experimento en busca de algún indicio que arrojara luz sobre la naturaleza de la radiación misteriosa.

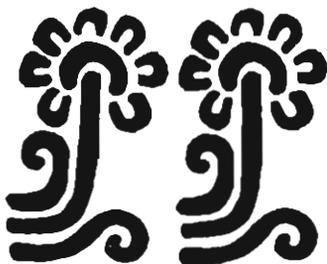
El miércoles 26 de febrero de 1896 el cielo de París estuvo todo el día cubierto con una densa capa de nubes y continuó así

durante el resto del mes. Henri Becquerel tenía listas varias placas fotográficas con sus llaves y sus trozos de sulfato de uranilo y potasio. El domingo 1º de marzo todavía ocultaban al sol densas nubes. Por un impulso afortunado Becquerel decidió no esperar más al Sol y reveló las placas sin haberlas expuesto a las radiaciones de este astro. ¡Cuál no sería su sorpresa al ver en todas ellas imágenes nítidas de las llaves! La absorción de la energía solar no era necesaria para que el sulfato de uranilo y potasio emitiera sus misteriosas radiaciones que velaban a las placas fotográficas a través de sus envolturas. Por serendipidad había descubierto Becquerel rayos que se originaban en los núcleos del Uranio del sulfato de uranilo y potasio. Por primera vez un hombre de ciencia había percibido una señal del corazón de los átomos de Uranio. Por serendipidad nacía una nueva ciencia: la de las radiaciones que emiten los núcleos de los átomos.

## viejos episodios de la ciencia en México

carlos graef fernández\*

Algunos ejemplos  
de invenciones y sus aplicaciones  
en nuestro lejano pasado



### *La invención del cero*

La máxima hazaña científica del mundo prehispánico en México es, sin duda alguna, la invención del cero. Para aquilatar en lo que vale este logro, basta considerar que un pueblo tan adelantado en la ciencia y en la filosofía como el griego en la Antigüedad, no llegó a concebir al cero como un número. A la pregunta: ¿Cuánto es cinco menos cinco?, contestaban los matemáticos griegos: "cinco menos cinco no es nada", pero no concebían a esta diferencia como cero, ni al cero como un número. Concebir a la diferencia de dos

\* El Dr Carlos Graef Fernández es actualmente Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa.

números iguales como cero, y pensar en este cero como un número, es el enorme paso matemático dado en nuestro mundo prehispánico.

El cero llegó a la cultura occidental desde la India por intermedio de los árabes. El primer manuscrito europeo que contiene al cero es el Códice Vigilanus escrito en el Monasterio de Abelda, en España, en el año 976 de nuestra era. En este libro se usa el cero en su papel posicional. Los árabes usaron el cero un siglo antes que los europeos, y ellos a su vez lo habían tomado de los matemáticos de la India. El más antiguo documento hindú que se conserva, en el que interviene el cero, es del año 876 d J. Los Mayas ya habían inventado el cero en la llamada Epoca de las Inscripciones, que se extiende del año 292 d J hasta el año 909 d J. En esta hazaña científica se adelantaron los Mayas a los Indios Orientales en más de cinco siglos.

Los Mayas representaban al cero con la figura de la cabeza de un guerrero que oculta con una mano la parte inferior de su rostro, y lo usaban en su papel posicional para escribir los números. Solamente que la base de su sistema de numeración no era de diez como en el sistema que utilizamos actualmente; para ellos la base era el veinte. Un uno acompañado de un cero significaba 20 para los Mayas. En sus cálculos calendáricos usaban un uno acompañado de dos ceros para escribir 360, y no 400, como podía esperarse. Para cálculos ordinarios usaban como unidades superiores el 20, el  $400 = 20^2$ , el  $8\ 000 = 20^3$ , etc. Su sistema de numeración era pues vigesimal, o sea de base veinte. Su método para escribir números es tan expedito como el decimal, y los Mayas lo utilizaron para escribir números muy grandes. El número más grande que se registra en un documento Maya aparece en el Códice del Dresden, y es 12 899 781.\*\*

Los Aztecas tomaron de los Mayas su sistema de numeración y en el mundo náhuatl también se usaba el veinte como base. En el idioma náhuatl la palabra que se utiliza para designar el número veinte significa "un comerciante". Algunos autores creen que esto se debe a que los Aztecas usaban, en una época, los dedos de las manos y de los pies para contar. Un "comerciante completo" es el que había agotado los veinte dedos de todo el cuerpo al estar contando un conjunto. Las unidades del sistema vigesimal reciben en náhuatl los siguientes nombres:

1	ce;
20	cemphualli;
400	cetzontli

En el idioma que se habla actualmente en México sobreviven muchas expresiones del náhuatl. En algunas interviene la palabra "tzontle", que quiere decir 400, ya que "cetzontle" es "una vez cuatrocientos". El nombre "cenzontle" se le da a un ave cantora que canta 400 melodías. Así como en español usamos "cien" como sinónimo de "muchos", en náhuatl se usaba "tzontle", 400, para ese propósito. En el mundo de habla española "ciempiés" es un insecto de muchos pies; en náhuatl "tezontle" es una roca formada de numerosos fragmentos de piedra "tetzl". Tezontle es la roca integrada con 400 piedrecillas.

Yo recuerdo que en mi infancia la leña se compraba en la Ciudad de México por "tzontles", o sea por haces de cuatrocientos palos. Resabio del sistema vigesimal de nuestros antepasados indígenas.

\*\* El lector podrá encontrar más detalles en el artículo "La medición del tiempo según los mayas" del Ing R Monges López en *Naturaleza* vol 6, no 2, p 78.

### El calendario

Otra hazaña científica prehispánica muy impresionante es el calendario. También éste es de origen Maya, aunque los otros pueblos desarrollados de Mesoamérica lo adoptaron con algunas alteraciones. Se sabe que este calendario tan perfecto que usaron los Mayas tuvo orígenes más antiguos, pero fueron los Mayas los que lo llevaron a su perfección. El calendario consistía de dos sistemas para contar días, meses y años. Uno de estos sistemas era el calendario ritual, o religioso, en el cual el año era de 260 días. Los días se agrupaban en meses, de veinte días cada mes. El año ritual tenía 13 meses. Un día particular se ubicaba dentro del calendario religioso por medio de un número y de un símbolo. Se decía por ejemplo el día 7 Conejo, o también el 3 Caña, el 11 Agua, etc, con esta indicación quedaba perfectamente localizado el día dentro del año ritual.

El calendario religioso de los Mayas señalaba las fiestas ligadas con los ritos a los dioses, pero no era adecuado para marcar las fechas de las tareas agrícolas que tienen una periodicidad anual, con años de 365 días. Para propósitos agrícolas, y en general civiles, los Mayas tenían un calendario especial con años de 365 días. En este calendario civil se dividía el año en 18 meses, de veinte días cada mes. Después del décimo octavo mes —o sea después de transcurridos 360 días— agregaban cinco días muertos, a los que los Aztecas llamaban "Nemontemi". En una variante náhuatl del calendario Maya, cada cuatro años se agregaban 6 días muertos en vez de cinco. Los Mayas mismos hacían esta corrección agregando 25 días cada 104 años, siendo el lapso de cada uno de estos años de 365 días exactamente.

Los Mayas desarrollaron un sistema de medir el tiempo mucho más preciso que el del mundo occidental de la época de la Conquista. Cuando Hernán Cortés llegó en 1519 a México todavía no



se le había hecho la corrección Gregoriana al calendario europeo. Esta corrección data de marzo de 1582. Para poder establecer un método tan preciso de medir el tiempo tuvieron que hacer observaciones astronómicas detalladas, y precisas que se extendieron por muchos siglos. Se han encontrado inscripciones con observaciones del movimiento de la Luna, de los planetas y de las estrellas. Los Mayas conocieron con gran precisión los períodos sinódicos de los elementos del sistema solar.

Para ubicar un día en el calendario civil se utilizaba también un número y un símbolo, como en el calendario ritual. Los símbolos son los mismos en los dos calendarios. La referencia a un día particular en el calendario civil es por ejemplo, 7 flor, 8 víbora o 10 jaguar.

Los dos calendarios Mayas corrían paralelamente uno y otro. Un ciclo se iniciaba con el primer día del primer mes en ambos calendarios. Como 52 por 365 es exactamente igual a 73 por 260, resulta que 52 años civiles son exactamente iguales a 73 años rituales. De donde un ciclo Maya, consiste en 18 980 días, equivalentes a 52 años de 365 días y a 73 años de 260 días. El sistema de contar los días, meses y años estaba tan bien construido que si se indicaba la localización de un día en el calendario ritual y se agregaba su localización en el calendario civil, ambos datos eran suficientes para ubicar a ese día en cierto año ritual y en un año civil. Decir por ejemplo día 6 jaguar, 5 viento, era dar una fecha completa. ¡Solamente una vez cada 374 400 años coincidían el 6 jaguar del calendario ritual con el 6 viento del calendario civil!, para todo fin práctico: 6 jaguar, 5 viento es una fecha completa, indica el día, el mes y también el año.

La fecha Maya más antigua inscrita contemporáneamente figura en la Estela 9 de Uxactún y corresponde al 17 de septiembre del año 320 de la era Cristiana.



### La botánica

Los pueblos prehispánicos tuvieron conocimientos muy profundos sobre las plantas de las tierras que habitaban y sobre el valor terapéutico de las mismas. A nosotros nos llega la información detallada a través de un manuscrito en idioma náhuatl forjado apenas 31 años después de consumada la Conquista.

Esta obra se escribió en el Colegio de la Santa Cruz de Tlatelolco, fundado en 1533 por el Virrey Antonio de Mendoza. El edificio del siglo XVI que alojó a esta institución se conserva actualmente y forma parte de la Plaza de las Tres Culturas de la Ciudad de México. En sus comienzos fue el Colegio de Tlatelolco un centro de instrucción elemental, pero después se convirtió en un instituto de educación superior e investigación científica. En el Colegio de Tlatelolco estudiaban principalmente indígenas.

Aquí fue en donde, el año de 1552, escribió Fray Martín de la Cruz su obra *Libellus de Medicinalibus Indorum herbis* (Libro de las hierbas medicinales de las Indias). El autor era un indígena náhuatl y escribió su "Libellus" en su idioma natal. Fray Martín de la Cruz era profesor de medicina en el Colegio de Tlatelolco. La obra la tradujo al latín, otro indígena, Juan Badiano, lector de ese último idioma en el mismo Colegio. El *Libellus* se conoce ahora como el *Manuscrito de la Cruz-Badiano* y fue publicado por la Universidad Nacional Autónoma de México en una edición de lujo el año de 1964 bajo el título *Codex Cruz-Badiano*.

La obra es un tratado de medicina náhuatl sin ninguna influencia europea. Para el tratamiento de las enfermedades se utilizaban principalmente hierbas.

El manuscrito contiene un Herbario con 184 ilustraciones de plantas en maravillosos colores.



Incluye además el tratamiento de numerosas enfermedades con las hierbas medicinales descritas. La actitud de Fray Martín de la Cruz es casi totalmente científica. Sólo figuran en el manuscrito unos cuantos remedios mágicos, como varias piedras preciosas y partes de animales, cuyo efecto terapéutico es pura hechicería.

Fueron los monjes franciscanos los que administraban el Colegio de Tlatelolco. Cuando Fray Martín de la Cruz y Juan Badiano terminaron su obra, este plantel pasaba por una crisis económica aguda. Los monjes franciscanos decidieron dirigirse a Carlos V para solicitar fondos para su institución. Admirados por el Manuscrito de la Cruz-Badiano, y por sus hermosas ilustraciones policromas, pensaron que sería conveniente acompañar la solicitud de ayuda económica con un regalo, que consistió en el *Libellus* hermosamente empastado en cuero con incrustaciones preciosas. Desde las primeras instituciones de enseñanza científica que existieron en nuestro país fue lo usual que atravesaran por condiciones económicas difíciles.

El manuscrito original de la Cruz-Badiano se descubrió en el año de 1929 en la Biblioteca del Vaticano, en donde se encuentra hoy en día. Con esa obra llegaron a Europa las primeras descripciones ilustradas y científicas de la flora de nuestro continente.

Otra hazaña científica, en el mismo campo de la botánica, que se realizó en el pasado en México fue la obra *De Historia Plantarum Novae Hispanae* (sobre la historia de las plantas de la Nueva España) del Dr Francisco Hernández, escrita en 1577 en 16 volúmenes. Mientras que el manuscrito de la Cruz-Badiano se refiere a conocimientos médicos y botánicos prehispánicos, *De Historia Plantarum Novae Hispanae* se refiere a datos sobre plantas mexicanas recopilados por un investigador español poco después de la conquista.



El Dr Francisco Hernández encabezó la primera expedición científica que se realizó en América. El 11 de enero de 1570, el Rey de España Felipe II, nombró a Francisco Hernández "Protomédico General de las Indias, islas y tierra firme del mar Océano". Con mano real escribió Felipe II personalmente prolizas instrucciones en las que pedía una descripción de la historia natural de la Nueva España: una descripción de sus plantas, animales y minerales que incluyera ilustraciones, y además pedía la formación de colecciones de especímenes recopilados en las diferentes provincias.

El protomédico Francisco Hernández salió de España rumbo a América el 1o. de septiembre de 1570. Llegó a la Ciudad de México a fines de febrero del año siguiente, 1571. Se había detenido en Cuba en donde realizó una expedición para estudiar la fauna y la flora.

El primero de marzo de 1571 presentó sus cartas a la Audiencia, en el Palacio Virreinal de México. Se le aceptó como protomédico con el derecho de viajar por donde él quisiera y con el privilegio de que el gobierno le costeara sus viajes y le diera ayudantes para los trabajos de ilustración y recopilación.

Francisco Hernández exploró la Nueva España durante siete años. Recorrió Querétaro, Colima y Michoacán. De allí se dirigió al Istmo de Tehuantepec a lo largo de la costa del Pacífico. Recopiló plantas en los famosos jardines botánicos que los aztecas tuvieron en Azcapotzalco, Texcoco y Oaxtepec.

Al regresar a España en 1577 llevaba Francisco Hernández el manuscrito en 16 volúmenes de su *De Historia Plantarum Novae Hispanae*. La obra fue encuadrada con el mayor lujo y depositada en la Biblioteca del Escorial. Durante un incendio ocurrido 94 años después, el fuego destruyó al manuscrito. Afortunadamente Francisco Hernán-



dez había dejado una copia del mismo en México. Esta fue la fuente de varias ediciones parciales de la obra de Francisco Hernández; la primera se publicó en 1579. La Universidad Nacional Autónoma de México publicó en 1946 la traducción al español con el título *Historia de las plantas de la Nueva España. El libro contiene la descripción de 1 400 especies vegetales y numerosas ilustraciones* entre las cuales hay algunas de gran valor artístico. Los dibujos originales fueron obra del mismo Francisco Hernández y de varios pintores indígenas. El año de 1960 publicó la Universidad Nacional Autónoma de México las obras completas de Francisco Hernández que contienen además descripciones e ilustraciones de animales. Algunos de estos dibujos son admirables como el del quetzal, al que se designa como "Ave del Paraíso", el del cacomizcle, el del coyote al que se le llama lobo americano, el del armadillo que era desconocido en el viejo mundo en el siglo de Francisco Hernández. El Protomédico dió a conocer en Europa nuestra flora y nuestra fauna. Sus obras son documentos muy valiosos para la historia natural.

*La amalgama de Bartolomé de Medina*

Una hazaña de la ciencia aplicada que se realizó en México al principio de la Colonia se debió a Bartolomé de Medina, minero sevillano que llegó a la Nueva España en 1554, apenas 23 años después de la caída de Tenochtitlan en manos de los españoles. Bartolomé de Medina fue a trabajar en la Purísima Grande, hacienda de beneficio en la que se procesaba mineral extraído de las minas de Pachuca. Ahí inventó un sistema para la extracción de la plata. Su método fue una innovación muy grande para su época. Antes de Bartolomé de Medina se sometía el mineral triturado a calor muy intenso. La plata metálica se fundía y



la mayor parte de la plata que se encontraba en combinaciones se perdía.

Bartolomé de Medina inventó el llamado "sistema de patio". Este consiste en triturar finamente el mineral y extenderlo sobre un patio embaldosado. Sobre el mineral se riega mercurio. Varias recuas de mulas azuzadas por arrieron mezclan el mercurio con el mineral triturado. La plata forma con el mercurio una amalgama. La temperatura de fusión de la amalgama de plata es mucho más baja que la temperatura de fusión de la plata misma. Al someter a calor intenso el mineral tratado con mercurio escurre la amalgama fundida. El mercurio y la plata se separan por gravedad. Al enfriarse la mezcla, flota la plata sólida sobre el mercurio líquido. El método extrae más plata de los minerales que el viejo sistema de simple calentamiento.

Para desarrollar su método, Bartolomé de Medina condujo una serie de experimentos en la Purísima Grande. Hizo toda una investigación tecnológica, en el siglo XVI, en México.

El sistema de patio se extendió por todas las minas de la Nueva España porque era más eficiente y más económico que el sistema anterior. De México pasó a la América del Sur y llegó a las minas de plata del Perú. En el siglo XVI la Nueva España exportó tecnología minera. El sistema de patio se utilizó durante tres siglos hasta que en la segunda mitad de siglo XIX fue sustituido por el método de cianuración que es el que actualmente se utiliza.

Queda un recuerdo vivo del sistema de Bartolomé de Medina en nuestro México actual. Los desechos del tratamiento de los minerales de plata, se acumulaban en terrenos baldíos en la cercanía de las haciendas de beneficio, formando con ellos unas lomas artificiales que los mineros llaman "jales". En el camino a Pachuca, ya casi llegando a las goteras de la ciudad se encuentran extensísimos jales, siendo los más viejos del siglo

XVI. Actualmente se ven desde la carretera las instalaciones que ha establecido Fomento Minero para explotar los residuos de mercurio que quedan en los antiguos jales del sistema de patio. También se extrae algo de plata residual que con los métodos modernos se puede arrancar a los desechos del pasado. Pero es el mercurio el que le da el valor comercial a los jales de Pachuca, un recuerdo vivo del sistema de patio de Bartolomé de Medina.

#### *El acueducto del padre Tembleque*

En el primer siglo de la Colonia, el XVI, ocurrió otra hazaña notable de ciencia aplicada en México, en el campo de la ingeniería civil. En esa época llegó a México un monje franciscano: el padre Tembleque, quien era un genio de la construcción. Estuvo un tiempo en el monasterio de Tepeapulco que actualmente se encuentra en las goteras de Ciudad Sahagún en el estado de Hidalgo. El padre Tembleque dirigió la construcción de un acueducto del que se conserva una arquería que se ve desde la carretera de las Pirámides de Teotihuacan a Tulancingo. Los arcos son muy esbeltos; el canal que conduce el agua es increíblemente angosto. La arquería parece desafiar la gravedad y el empuje del viento. Actualmente pasa un ferrocarril debajo de uno de los arcos y un arroyo debajo del arco central. Si un mago pudiera transportar la catedral hasta el acueducto, ésta cabría libremente debajo del arco central. Los arcos del acueducto del padre Tembleque son testimonio en piedra del adelanto técnico de la Nueva España en el siglo XVI.

En el México indígena prehispánico y en las primeras décadas de la Nueva España hubo una actividad científica y tecnológica sorprendente que quizás sea una manifestación del vigor vital de las dos culturas que al fundirse forjaron la cultura mexicana.

## URAMEX llegará a tener importancia semejante a la de PEMEX

por Carlos Graef Fernández

DE AQUI A NOVIEMBRE DE 1982, URAMEX SE PROPONE INCREMENTAR CONSIDERABLEMENTE LA PROSPECCION Y EXPLOTACION DEL URANIO E INSTALAR PLANTAS DE BENEFICIO PARA PRODUCCION DE CONCENTRADOS DE DICHO METAL Y, A MEDIANO PLAZO, PARA LOGRAR QUE MEXICO CUENTE CON UNA INDUSTRIA NUCLEAR QUE ABARQUE LAS DIFERENTES ETAPAS DEL CICLO DE COMBUSTIBLE, IMPLEMENTARA LAS CONSTRUCCIONES DE ALMACENAMIENTO DE LOS ELEMENTOS DE COMBUSTIBLE QUEMADO, UNA PLANTA DE REPROCESAMIENTO DE ESTOS Y UN CEMENTERIO DE DESECHOS RADIATIVOS. EL DOCTOR CARLOS GRAEF FERNANDEZ, GERENTE DEL CICLO DE COMBUSTIBLE DE URAMEX, PROPORCIONA UNA PANORAMICA DE LAS ACTIVIDADES A CORTO, MEDIANO Y LARGO PLAZO DE DICHA EMPRESA, PARA ALCANZAR LAS METAS QUE TIENE ESTABLECIDAS.

**E**n enero de 1979 reorganizó el Gobierno de México sus actividades en el campo de la Energía Nuclear, sustituyendo al Instituto Nacional de Energía Nuclear, que era su organismo único en esta rama, por cuatro nuevos organismos: la Comisión Nacional de Energía Atómica, Uranio Mexicano

(URAMEX), el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ) y la Comisión Nacional de Seguridad Nuclear y Salvaguardias. De estas cuatro instituciones, URAMEX es el agente exclusivo del Gobierno para explorar, explotar, beneficiar y comercializar el uranio. También es agente exclusivo del Gobierno para realizar las di-



versas etapas del ciclo de combustible nuclear que se puedan llevar a cabo en México.

Solamente el quemado del combustible nuclear para la producción de energía eléctrica es de la competencia exclusiva de la Comisión Federal de Electricidad. En aquellas operaciones que no se puedan realizar en nuestro país, URAMEX es el organismo gubernamental que debe ordenar que se lleven a cabo y debe supervisar su ejecución. La importación y exportación de minerales radiactivos y de combustibles nucleares para reactores es también de la competencia exclusiva de URAMEX.

#### Metas a Corto, Mediano y Largo Plazo

Para poder cumplir con los objetivos que la ley le señala, URAMEX se ha fijado metas a corto, a mediano y a largo plazo. Como metas a corto plazo, por el que se entiende el lapso hasta noviembre de 1982, URAMEX se propone un incremento muy considerable de la prospección y de la exploración del uranio en nuestro país y la instalación de plantas de beneficio para la producción de plantas de beneficio para la producción de concentrados de este metal.

Las metas a mediano plazo consisten en instalar en México las distintas etapas del ciclo de combustible que son de la competencia de URAMEX y que serán indispensables dentro de muy pocos años. Estas incluyen las construcciones de almacenamiento de los elementos de combustible quemado, una planta de reprocesamiento de estos elementos y un cementerio de desechos radiactivos.

Como meta a largo plazo se tiene el objetivo de establecer en México una industria nuclear que abarque paulatinamente las diferentes etapas del ciclo de combustible. Para alcanzar las metas a mediano y largo plazos se está recabando actualmente la información técnica necesaria y se están formando los cuadros de expertos.

#### Prospección y Exploración del Uranio

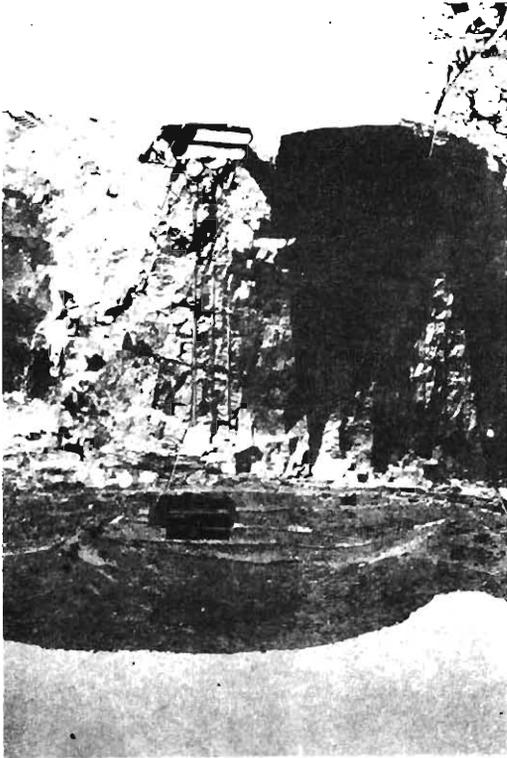
Los expertos de URAMEX consideran que es posible la existencia de yacimientos de uranio en un millón cien mil kilómetros cuadrados del territorio nacional, que es de 1.967,547 Km<sup>2</sup>. Es-

to equivale a decir que sólo en el 56.2% de la superficie de la República Mexicana se puede tener la esperanza de encontrar uranio.

URAMEX se ha puesto como meta a corto plazo el hacer el inventario de los yacimientos uraníferos en 450,000km<sup>2</sup> del área de 1.100,000 km<sup>2</sup> en la que puede existir uranio. Esto significa que el inventario cubrirá poco más del 40% del área que tiene objeto explorar.

Para localizar dentro de esos 450,000 Km<sup>2</sup> que se estudiarán, las áreas más favorables a yacimientos uraníferos, se recurrirá a muchos méto-





dos, como son la interpretación geológica tectónica, la fotogeología regional y la interpretación automática de imágenes de satélite. Para este último método se adquirirá un equipo especial.

Pero la herramienta más poderosa para localizar las áreas más favorables a yacimientos de uranio es la prospección aérea. Para realizar ésta, URAMEX cuenta con diez helicópteros Lama, recientemente adquiridos, que se están equipando actualmente con los más modernos y sofisticados aparatos de prospección y verificación. Tenemos, además, un helicóptero Bell, dos aviones Islander y un avión Piper Navajo para el mismo propósito. La flotilla de helicópteros y aviones se utilizará para detectar áreas de radiación más alta que la ordinaria, que en general son indicios de depósitos de uranio o de torio.

En los 23 años de existencia de la Comisión Nacional de Energía Nuclear y de su sucesor el Instituto Nacional de Energía Nuclear, precursor a su vez de los organismos nucleares actuales

del gobierno, se habían explorado ya, efectivamente, 125,000 km<sup>2</sup>. URAMEX se ha impuesto la tarea de explorar a noviembre de 1982, 225,000 km<sup>2</sup> más, para poder hacer el inventario de nuestra riqueza nacional en uranio en el área de 450,000 km<sup>2</sup> que nuestro Director, el doctor Francisco Vizcaino Murray, ha fijado como una meta a corto plazo.

Después de que la prospección aérea haya descubierto las áreas de radiactividad más alta que la ordinaria, se iniciará la exploración de la zona. Acudirán al lugar las brigadas terrestres para hacer una primera inspección y poder decidir si es conveniente realizar perforaciones. URAMEX tiene equipo para perforar pozos de exploración sacando muestras del subsuelo en toda la extensión del pozo. Las muestras se analizan y se puede inferir si es conveniente cubrir el área con más pozos debidamente espaciados. En caso de juzgarse indicado, se realiza la evaluación detallada del yacimiento.

URAMEX ha realizado exploración del uranio en los estados de Chihuahua, Nuevo León, Tamaulipas, Sonora, y Oaxaca. Para expresar cuantitativamente los resultados obtenidos hasta la fecha se utilizan los conceptos de "reservas geológicas" y de "reservas mineras". Las reservas geológicas expresan la cantidad de uranio (calculada en cantidad de U<sub>3</sub>O<sub>8</sub> equivalente) que existe con seguridad absoluta en el subsuelo. Las reservas mineras expresan la fracción de la cantidad de las reservas geológicas que es económicamente costeable extraer del subsuelo con el precio actual del uranio y el costo actual de su extracción y de su beneficio.

URAMEX ha determinado que tenemos en México 9,592 toneladas equivalentes de U<sub>3</sub>O<sub>8</sub> en reservas geológicas. En la Sierra de Peña Blanca, en el estado de Chihuahua, hay 1,621 toneladas equivalentes de U<sub>3</sub>O<sub>8</sub> en reservas mineras. En varias áreas con reservas geológicas no se han determinado todavía las reservas mineras.

URAMEX realizará prospección y exploración de uranio en San Luis Potosí, Durango y Zacatecas, además de los estados mencionados antes. Expertos de URAMEX descubrieron recientemente un importante yacimiento de uranio en la vecindad del poblado de Santa Catarina Tayata, en Oaxaca.

Además del uranio que existe en yacimientos de minerales que contienen este metal en cantidades considerables, se encuentra uranio también en cantidades menores acompañando a otros elementos cuya explotación es costeable. El uranio acompaña frecuentemente al cobre y a la plata en yacimientos de estos metales. La roca fosfórica que se explota para producir fertilizantes contiene uranio. En estos casos puede resultar económico explotar el uranio, aun cuando sólo sea un elemento acompañante en el yacimiento, al realizar la explotación de los elementos principales del mismo.

URAMEX está investigando estas posibilidades en cooperación con los organismos que explotan este tipo de riqueza del subsuelo. De este modo aumentan muy considerablemente nuestras reservas uraníferas.

#### Explotación y Beneficio del Uranio

Para suministrar el uranio necesario para las plantas nucleoelectricas de México, URAMEX instalará a corto plazo cuatro plantas de beneficio y una planta de extracción de uranio del ácido fosfórico que es un producto intermedio en la fabricación de fertilizantes a partir de roca fosfórica.

La planta más grande se construirá en la Sierra de Peña Blanca, en el estado de Chihuahua. Será una planta modular que está adaptada para poder duplicarse fácilmente en caso necesario. Esta planta tendrá una molineta de 600 toneladas diarias de mineral y una producción anual de concentrados equivalentes a 245 toneladas de  $U_3O_8$ . La explotación se hará parcialmente a tajo abierto y parcialmente subterránea. Actualmente se está elaborando el proyecto y se iniciarán las obras a principios de 1981.

URAMEX adquirió en España dos plantas de beneficio móviles que se instalarán en yacimientos de Sonora y de Nuevo León-Tamaulipas.

Para poder aprovechar el uranio contenido en la roca fosfórica, URAMEX y FERTIMEX colaborarán en la construcción de una instalación para la extracción del uranio del ácido fosfórico en la planta de fertilizantes que FERTIMEX tiene en operación en Pajaritos, Veracruz. La producción de uranio beneficiará tanto a URAMEX como a FERTIMEX, cuyos fertilizantes dejarán

de contener uranio que no beneficia para nada a las plantas. La cantidad de uranio contenida en las rocas fosfóricas explotables de México es enorme aunque su concentración es pequeña. La explotación sin embargo es costeable cuando se obtiene el uranio como subproducto de los fertilizantes.

#### El Ciclo de Combustible

URAMEX tiene a su cargo todo lo referente a los combustibles nucleares, desde la prospección y exploración del uranio para fabricarlos, hasta la manufactura de los elementos de combustible mismos. Estos se entregarán a la Comisión Federal de Electricidad para producir energía en los reactores nucleares de las plantas nucleoelectricas. El quemado de los elementos de combustible consiste en la transformación que sufren al generar energía. Se consume en este proceso gran parte del uranio 235 contenido en los elementos de combustible. Este isótopo se convierte en otras sustancias radiactivas al producir energía.

Parte del uranio 238 que contienen los elementos de combustible se transforma en plutonio que se utilizará en los combustibles nucleares de los reactores rápidos de cría que se instalen en México en el porvenir. Después de estar sometidos al quemado por un año, los elementos se extraen de los reactores nucleares y





vuelven al dominio de URAMEX. Unos meses pasan los elementos quemados en albercas para esperar a que disminuya su radiactividad. Después de "enfriarse", que significa que su radiactividad ha bajado considerablemente, la Comisión Federal de Electricidad se los entregará otra vez a URAMEX. A estos elementos de combustible quemados y enfriados se les somete primero a un largo enfriamiento en almacenes adecuados. Después se sujetan al reprocesamiento que consiste en separar el plutonio y el uranio que contienen, de las cenizas radiactivas. Estas últimas se transportan, debidamente tratadas, a un cementerio radiactivo. El plutonio y el uranio se almacenan para usarlos en el futuro en los reactores rápidos de cría, que son los reactores de segunda generación.

URAMEX tiene como metas a corto plazo el localizar yacimientos de uranio y el convertir minerales de este metal en concentrados. La fabricación de elementos de combustible a partir de esos concentrados se hace actualmente en el extranjero bajo las órdenes y la vigilancia de



URAMEX. Como meta a largo plazo se ha fijado URAMEX el establecer en México una industria nuclear que manufacture elementos de combustible con concentrados nacionales de uranio. La instalación de esta industria se hará por etapas.

Actualmente manda URAMEX convertir concentrados de uranio en el gas hexafluoruro de uranio en Francia. Este gas se remite en contenedores a los Estados Unidos en donde se convierte de hexafluoruro de uranio natural en hexafluoruro de uranio enriquecido.

Con el hexafluoruro de uranio enriquecido se fabrican los elementos de combustible también en los Estados Unidos. La fabricación tiene varias etapas: primero se obtiene dióxido de uranio enriquecido, que se transforma en pastillas que se someten a un tratamiento antes de ser envasadas en tubos de una aleación de circonio llamada Zircaloy. En esa forma se introducen los elementos de combustible dentro de los reactores.

De todas las etapas del ciclo de combustible la más difícil de instalar en México es la del enriquecimiento del uranio. La sofisticación del equipo industrial y el enorme consumo de energía eléctrica de una planta de enriquecimiento nos obligan a considerar a esta etapa como la meta a más largo plazo de la industria nuclear nacional. Afortunadamente puede mandarse enriquecer el hexafluoruro de uranio en varios países: los Estados Unidos, Francia, Gran Bretaña-Alemania-Holanda y la Unión de Repúblicas Soviéticas Socialistas. Además de las dificultades técnicas para instalar una planta de enriquecimiento es necesario un consumo muy grande de uranio enriquecido para hacer costeaable a la planta. En la etapa actual de nuestro desarrollo nucleoelectrónico resultaría totalmente incosteable una planta para ese propósito.

#### Almacenamiento y reprocesamiento de los combustibles quemados

Como meta a mediano plazo, URAMEX tiene que construir albercas de almacenamiento para guardar por muchos meses los elementos de combustible quemado que le entregue la Comisión Federal de Electricidad. En esas albercas se almacenarán los elementos quemados hasta que



su radiactividad haya disminuido al grado de permitir su manipulación en una planta de reprocesamiento.

Como meta a largo plazo, URAMEX tendrá que construir una planta de reprocesamiento en la que se extraigan de los elementos de combustible, quemados y enfriados, el plutonio que se haya formado durante el quemado y el uranio que contengan. En esa planta se separarán además los desechos radiactivos para ser enterrados, después de un tratamiento, en el cementerio radiactivo. URAMEX tiene que construir un cementerio para todos los desechos radiactivos que se obtienen en los procesos que se realizan en este organismo.

#### Formación de personal y acumulación de información

Una actividad continua en URAMEX es la formación de cuadros técnicos y científicos necesarios para los objetivos de este organismo. Para este propósito se recurre a centros de adiestramiento científico y técnico en México y en el extranjero. Otra actividad continua es la reco-

pilación de datos e información detallada sobre procesos ligados con los objetivos de URAMEX. Se están gestando ocho bancos y tres subbancos de información y datos, un sistema integral de información y un archivo técnico.

#### El futuro de URAMEX

Al instalarse en México más plantas nucleoelectricas, crecerá la importancia de URAMEX y, en el transcurso de los años, llegará a ser un organismo de significación semejante para nuestro país a la que tiene PEMEX.

El papel histórico de URAMEX es el de suministrar los combustibles nucleares para generar gran parte de la energía eléctrica que se consume en México, liberando así al petróleo para tareas más nobles, como son la de servir de materia prima para la industria petroquímica y la de suministrar los combustibles para aviones y vehículos terrestres.

Ya en la actualidad es una lástima quemar las enormes cantidades de combustóleo necesarias para generar energía eléctrica cuando existe el uranio que puede relevarlo de esta tarea. ●

PALABRAS PRONUNCIADAS POR EL DR. CARLOS GRAEF  
FERNANDEZ DURANTE EL HOMENAJE QUE LE RINDIO  
LA SOCIEDAD MEXICANA DE FISICA

Estoy profundamente agradecido con la Sociedad Mexicana de Física por el homenaje que se me ofrece ahora. Doy las gracias más sinceras a su presidente, Dr. Ramón Peralta, por la entrega de la medalla que me acaba de hacer como símbolo de distinción. Me conmovieron mucho las palabras que sobre mí dijeron mis amigos Alberto Barajas y Juan Manuel Lozano.

Mientras escuchaba al Dr. Barajas estaba gozando del valor estético de su pieza oratoria y admirando la sucesión de frases maravillosas, cuando de pronto me di cuenta de que esas frases se decían sobre mí y entonces aumentó a un grado muy grande el placer que disfrutaba al escuchar su elocución, ya que al deleite estético se sumó la emoción de escuchar los elogios de un amigo muy querido. Me halagó mucho lo que dijo mi antiguo alumno y querido amigo, el Dr. Juan Manuel Lozano, sobre mí. Aquilato especialmente que presentara rasgos humanos de mis relaciones con los alumnos de su época de estudiante. Aprecio las anécdotas y recuerdos que expuso.

Actualmente estamos viviendo un auge increíble de la física en el mundo. En México ha habido un progreso extraordinario desde que se fundó la carrera de físico-matemático hace cincuenta años. Parece que este movimiento en la física es para siempre, que ya nunca volveremos a retroceder, que lo logrado nunca volverá a deshacerse. Sin embargo, hay que recordar que en el pasado hubo en México un surgimiento del interés por la física que después se apagó y que no tuvo proyección hacia el futuro. Me refiero al movimiento científico en la Nueva España a finales de la Colonia, en el ocaso del siglo XVIII, cuando se fundó el Real Seminario de Minería. En esa época vinieron de España varios profesores a impartir cursos en la nueva institución. No se trataba de profesores extranjeros, venían de España a la Nueva España. No todos los profesores del Real Seminario de Minería llegaron de España; unos fueron nacidos en México, criollos y mestizos. El que sustentó la primera clase de mecánica, en 1795, fue Dn. Antonio de León y Gama, nacido en esta Ciudad de México. El año anterior, 1794, se había iniciado una cátedra de física, la de hidráulica y neumática de los gases, que sustentó Dn. Francisco Antonio Bataller.

Los profesores españoles que vinieron a México a impartir cursos

616

en el Real Seminario de Minería, tenían una excelente formación europea. Ellos habían estudiado en la Academia de Minas de Freiberg, en Alemania. La ciencia que ellos exponían en sus clases era la de actualidad. Es interesante notar que la primera clase de física newtoniana que se impartió en México fue la cátedra de Francisco Antonio Bataller en 1794. En la Real y Pontificia Universidad de México se enseñaba física de Aristóteles. Me han informado investigadores que conocen muy bien la época de finales de la Colonia, que quizá se impartió física newtoniana en algún colegio en México antes que en el Real Seminario de Minería.

El primer registro documental que se conoce de la enseñanza de la física newtoniana en instituciones oficiales en México es el de la cátedra de hidráulica y neumática de los gases de Dn. Francisco Antonio Bataller en 1794 en el Real Seminario de Minería, que estaba ubicado en lo que ahora es calle de Guatemala, números 88, 90 y 92. Fue hasta 1815 que se trasladó el Real Seminario al Palacio de Minería, construido por Dn. Manuel Tolsá. En este palacio se inició el auge actual de la física en México. Cuando llegaron los profesores españoles en 1792 no existía el palacio. Antes de terminarse su construcción, en 1813, empezaron a impartirse en el edificio las cátedras de física, de mineralogía y de geología. Tanto el auge que tuvo la enseñanza de la física en México a fines del siglo XVIII, como el inicio del auge actual están íntimamente ligados con la enseñanza de las ciencias físico-matemáticas en la Escuela de Ingeniería.

Entre los profesores españoles que vinieron al Real Seminario de Minería había personajes muy notables, como Dn. Fermín Elhuyar, descubridor, junto con su hermano, del elemento tungsteno y conocido mundialmente. Otro científico destacado que llegó de España al Real Seminario, fue Dn. Andrés Manuel del Río. Al analizar éste unos minerales de Zimapán, Hidalgo, encontró un elemento nuevo, que él llamó eritronio. Por una serie de circunstancias desafortunadas no se confirmó a tiempo su descubrimiento. El eritronio de Dn. Andrés Manuel del Río lleva ahora el nombre de vanadio, en homenaje a la diosa escandinava Vanadis; el nombre se lo dio su redescubridor, el científico noruego Sefstrom.

Es muy probable que ese primer florecimiento de las ciencias fí-

sicas y matemáticas que se inició en México en 1792, al fundarse el Real Seminario de Minería, se haya extinguido debido a la profunda transformación que sufrió el país durante la guerra de independencia y en el período de gran agitación política y social que siguió a ésta. Se siguieron impartiendo cursos de física en el Palacio de Minería a los candidatos a ser ingenieros mineros, pero el entusiasmo por la ciencia que hubo a fines del siglo XVIII y en los albores del siglo XIX decayó.

La Real y Pontificia Universidad de México tuvo una historia trágica durante el siglo XIX. Los liberales la consideraron un baluarte de las ideas conservadoras y la cerraron cada vez que asumieron el poder. Siendo Vicepresidente de la República, Encargado de la Presidencia, Dn. Valentín Gómez Farías, cerró la Universidad en 1833. El gobierno conservador de Dn. Antonio López de Santa Anna la reabrió el año siguiente. La última clausura de la Universidad ocurrió durante el siglo XIX, en 1861, siendo Presidente Dn. Benito Juárez.

Desde que se fundó el Real Seminario de Minería hubo en México una Escuela de Ingenieros. Cuando Dn. Valentín Gómez Farías clausuró la Universidad en 1833, la dividió en Establecimientos de Estudios Mayores y a éstos les agregó el Establecimiento de Ciencias Físicas y Matemáticas, en el que se convirtió al Real Seminario de Minería. En el Palacio de Minería se enseñó la física durante el siglo XIX como parte del acervo científico del ingeniero. En este maravilloso edificio se inició el segundo auge de las ciencias físicas y matemáticas en México. En la década de 1930 a 1940 se impartieron cátedras de física y de matemáticas a un nivel superior del de los cursos para la formación de los ingenieros.

Cuando Dn. Justo Sierra vuelve a crear la Universidad de México en 1910, siendo Ministro de Instrucción Pública y Bellas Artes del Gobierno del General Porfirio Díaz, funda en esta institución una Escuela de Altos Estudios. Entre 1912 y 1914 se impartieron allí un curso teórico de física, por Dn. Valentín Gama, y un curso práctico, por Dn. Joaquín Gallo. En 1924, siendo Rector de la Universidad Nacional de México Dn. Ezequiel Chávez, se transformó la Escuela de Altos Estudios en Facultad de Filosofía y Letras y allí se siguieron impartiendo cátedras de física y matemáticas a un nivel superior que las materias correspondientes a los planes

618

de estudio de ingeniería. Pero la efervescencia científica y el renacimiento interés en las ciencias exactas en esos años ocurrió en el Palacio de Minería. Dn. Sotero Prieto impartió una cátedra de Mecánica Analítica en la Facultad de Filosofía y Letras, en la que exponía los principios variacionales de esta disciplina. Sustentó un curso de Historia de las Matemáticas en esa misma institución. En Minería dio la clase de funciones de variable compleja. Dn. Alfonso Nápoles Gándara que regresó en 1932 de los Estados Unidos, en donde había realizado estudios especiales de matemáticas en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, impartió cursos de cálculo tensorial que Alberto Barajas y yo estudiamos con ahínco y en los que adquirimos conocimientos que más tarde nos fueron muy valiosos para nuestras investigaciones en la teoría de la gravitación. Más que por los conocimientos que nos transmitieron aquilatamos las enseñanzas de Dn. Sotero Prieto y de Dn. Alfonso Nápoles Gándara por el estímulo que significaron para avivar nuestro interés por las ciencias exactas.

En 1929 nuestra Universidad conquista su autonomía y resurge como Universidad Nacional Autónoma de México. En 1934 el Rector Dn. Manuel Gómez Morín, reestructuró a la Universidad y creo la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas que abarcaba a la Escuela de Ingenieros, a la Escuela de Ciencias Químicas y a una Sección de Física y Matemáticas. En esta última se creó la carrera de físico-matemático en la que nos inscribimos Alberto Barajas y yo. Varios alumnos de la Escuela de Ingenieros llevaron cursos aislados de esta carrera para profundizar sus conocimientos científicos. La Sección de Física y Matemáticas estaba ubicada en el Palacio de Minería, albergue de la Escuela de Ingenieros. La vecindad en el espacio de los dos establecimientos fue muy fecunda. Los profesores de la Sección de Física y Matemáticas eran profesores de la Escuela de Ingenieros que sentían un amor especial por las ciencias exactas. Los que se dedicaban entonces a la enseñanza de estas materias tenían que impartir muchas horas de clase diarias para poder reunir una remuneración decolorosa. No había instituto de física ni de matemáticas, y el único ingreso para ellos era el de su labor docente. Tenían que robarle horas al sueño para estudiar aspectos científicos superiores. No se compensaba la investigación ni el esfuerzo enorme del autodidacta para adquirir conociemien-

tos. Dedicarse a las ciencias físico-matemáticas en esa época significaba hacer un gran sacrificio y enormes esfuerzos. Pero a pesar de las circunstancias tan desfavorables desde el punto de vista económico, hubo hombres como Sotero Prieto y Alfonso Nápoles Gándara que dedicaron su vida a la ciencia.

En el año de 1935 hubo una nueva estructuración de la Universidad. Desaparece la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y vuelven a aparecer la Escuela de Ingenieros y la Escuela de Ciencias Químicas. La Sección de Física y Matemáticas sobrevive como parte de la Escuela de Ingenieros, hasta convertirse en 1939 en la Facultad de Ciencias que incluye además un Departamento de Biología.

Dice el ilustre médico Dr. José Joaquín Izquierdo, catedrático de la Facultad de Medicina de la Universidad Nacional Autónoma de México, e historiador de la Ciencia, que el Real Seminario de Minería fue la primera casa de la ciencia en nuestro país. Allí se realizó, como ya dijimos, el primer auge en física y en matemáticas. Al mismo tiempo florecieron, allí la mineralogía, la geología y la química. En el Palacio de Minería que fue albergue del Real Seminario, se inició, en la década de 1930 a 1940, el segundo auge de las ciencias físicas y matemáticas que estamos viviendo actualmente. La Escuela de Ingenieros proporcionaba en aquella época a los jóvenes interesados en las ciencias exactas. Al principio no había candidatos que llegaran directamente de la Escuela Preparatoria a estudiar la carrera de físico-matemático. Los alumnos de la Sección de Física y Matemáticas eran alumnos de la Escuela de Ingenieros que tenían un interés especial en las materias científicas.

La mayor parte de los que estudiaban los cursos especiales de física y matemáticas terminaron la carrera de ingeniero y se dedicaron con éxito a esa profesión. De mi generación recuerdo a Nabor Carrillo, a Ernesto Rivera, a Bruno Mascanzoni y a Miguel Urquijo que se apasionaron por las materias científicas pero que dedicaron sus vidas a la ingeniería y fueron brillantes profesionistas. Alberto Barajas y yo también acudimos a la Universidad con el propósito de llegar a ser ingenieros, pero fascinados por los encantos de la física y las matemáticas abrazamos carreras científicas.

Durante toda la época en que la formación de físicos y matemáticos se realizó en el Palacio de Minería, hubo una captura, muy fecunda para la ciencia, de alumnos de ingeniería. Juan Manuel Lozano y Francisco Medina Nicolau son dos conquistas muy valiosas de esos años. Javier Barros Sierra terminó las dos carreras, la de ingeniero y la de matemático y fue un brillante rector de nuestra Universidad.

Al cambiarse las facultades y escuelas de la Universidad Nacional Autónoma de México, de sus viejos recientos en la Ciudad a sus magníficos albergues en la Ciudad Universitaria en 1952, se ganaron muchos valores nuevos, pero también se perdieron algunos valores muy queridos y apreciados. Por razones de desarrollo histórico las facultades y escuelas se trasladaron a Ciudad Universitaria como ínsulas intelectuales, como lo habían sido en la Ciudad de México. Había muy poco contacto académico entre un plantel y otro por su distinta ubicación geográfica en la urbe. De ese modo se fueron las dependencias universitarias a su nueva ciudad. Cada una se trasladó como ínsula. En el pedregal no se establecieron los vínculos que no habían existido en el centro. Algunos universitarios teníamos la esperanza de que al estar todos en la Ciudad Universitaria se propiciara un mayor contacto espiritual; que los cursos de materias iguales que se imparten en planteles distintos pudieran ser un lazo de unión intelectual. Por ejemplo, soñábamos que todos los universitarios que tuvieran que adquirir conocimientos de geometría analítica llevarían ese curso en un Departamento de Matemáticas y tuvieran de compañeros a estudiantes de muy diversas facultades, todos escuchando al matemático profesional que impartiera la enseñanza. La inercia de la costumbre fue un obstáculo infranqueable para este sistema que hubiera logrado un acercamiento espiritual entre todos los universitarios. En muchas estructuras universitarias del mundo, como en los EE.UU. y en Europa ocurre esto cotidianamente. Al pasar a Ciudad Universitaria se perdió el lazo de unión que había entre la Facultad de Ciencias y la Facultad de Ingeniería.

Otro rasgo que distingue a la estructura de nuestra Universidad Nacional Autónoma de México de las grandes universidades europeas y estadounidenses es la forma en que se realiza la investigación científica. En nuestra universidad se practica la investigación principalmente en ins

titutos que tienen ese objetivo y sólo de un modo ocasional en las facultades. En el extranjero la investigación la llevan a cabo principalmente los profesores de las facultades. El catedrático tiene poca carga docente y tiene tiempo para investigar. Cuenta con los laboratorios y cubículos para poder trabajar en esta tarea. El profesor es a la vez investigador. En nuestra universidad hay un gran número de profesores que practican una profesión y que dedican una pequeña parte de su tiempo a sus labores académicas. En estas condiciones no tienen tiempo ni medios para realizar investigaciones. Los institutos practican la investigación científica. El personal puede, si quiere, impartir además cursos, pero su labor principal es la de investigar. Nuestra universidad no pudo convertir a todos sus maestros en profesores de tiempo completo. Gran parte del personal docente no hubiera aceptado dejar sus labores profesionales y dedicarse exclusivamente a la Universidad. Por otra parte la Universidad no tiene los medios económicos para poder ofrecer puestos de tiempo completo a todo su personal académico. En el extranjero hay unos cuantos casos de institutos dedicados exclusivamente a la investigación científica, como el del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, EE.UU., en el que además de investigación, sólo hay seminarios, coloquios y cursos especiales para graduados. El instituto no es una institución de docencia, sino de investigación. La Universidad Autónoma Metropolitana se organizó en México con la estructura de las grades universidades europeas y estadounidenses. Se contrató para una dedicación completa a casi todo el personal académico. Los profesores tienen una carga docente mínima y la obligación de dedicar gran parte de su tiempo a la investigación. No hay en esa universidad institutos de investigación científica además de las divisiones de enseñanza. Lo que hace difícil sostener en México un sistema de esa índole es la increíble presión demográfica en las instituciones de enseñanza. Hasta ahora no ha sido posible acotar el número de estudiantes en nuestros planteles de enseñanza superior. Al crecer la población estudiantil incontinentemente no se puede sostener un personal académico con poca carga docente. Al aumentar la ocupación docente de los profesores, éstos tienen cada vez menos tiempo para investigar. Por eso parece que el sistema de realizar la investigación en institutos *ad hoc* es neces

622

rio en países de crecimiento vertiginoso de la población universitaria, como México.

Los que tuvimos la fortuna de participar en el nacimiento del desarrollo explosivo de la física y las matemáticas que estamos viviendo ahora, también tuvimos el privilegio de que nos inspiraran los maestros que originaron ese movimiento, que lo crearon e impulsaron. Sotero Prieto, cuyo centenario de su nacimiento se celebrará el año próximo de 1984, provocó en muchos ingenieros el entusiasmo por las matemáticas. A algunos nos inspiró a dedicarnos de cuerpo entero a la ciencia. No era su éxito económico el que nos fascinaba como ejemplo a seguir. Él tenía que reunir una remuneración exigua, dedicándose desde la mañana temprano hasta la noche a dar clases, tarea muy fatigosa. Lo que nos inspiraba de él era su entrega completa a la ciencia, sus lecciones ejemplares, la claridad de su inteligencia y su amor apasionado por las matemáticas. La personalidad y las enseñanzas de Dn. Alfonso Nápoles Gándara nos indujeron, a Alberto Barajas y a mí, a seguir el camino de la física y las matemáticas. Fuimos los dos primeros alumnos de tiempo completo de la carrera de físico-matemático.

Mi papá era de origen alemán, pero no era ni autoritario ni imponía a sus hijos una disciplina agobiante. Cuando le comuniqué que había dejado el estudio de la ingeniería para dedicarme de lleno a la carrera de físico-matemático, no me reclamó ni se enojó. Me miró con tristeza y me preguntó: "¿ya te fijaste como viven en México las personas dedicadas a la física y a las matemáticas?". Yo le contesté que a pesar de eso quería yo dedicarme a esas ciencias. Entonces me dijo: "si eso es lo que quieres, está bien".

Yo tuve la fortuna de que en 1937 se me otorgara una beca de la John Simon Guggenheim Memorial Foundation para hacer estudios del doctorado en el Instituto Tecnológico de Massachusetts. Estuve en esa institución desde 1937 hasta 1940, año en que obtuve el Doctorado en Filosofía, equivalente al Doctorado en Física de nuestro sistema universitario. Al regresar a México en 1941 encontré un panorama científico muy distinto al que yo había dejado en 1937. Existía ya una Facultad de Ciencias desde 1939, lo mismo que un Instituto de Física desde ese mismo año y un Insti-

tuto de Matemáticas. Estuve trabajando en el Observatorio Astrofísico de Tonanzintla, Puebla, como Subdirector durante tres años. Después me invitó a colaborar mi maestro, Dr. Alfonso Nápoles Gándara, en el Instituto de Matemáticas. En 1945 fui nombrado Director del Instituto de Física, puesto que desempeñé hasta 1958, año en que la Junta de Gobierno de la Universidad Nacional Autónoma de México me nombró Director de la Facultad de Ciencias.

Ahora hay en México muchas instituciones en las que puede colaborar un físico que recientemente haya terminado su carrera. En nuestra Universidad están los Institutos de Física, de Astronomía, de Geofísica, de Ciencias del Mar, el Centro de Estudios Nucleares, la Facultad de Ciencias y el Centro de Estudios de la Atmósfera. Se hace además investigación en física en el Centro de Investigación y Estudios Superiores del Instituto Politécnico Nacional. Se cultivan las ciencias físicas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas de ese Instituto y en la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana. También en provincia han surgido varios centros en que se cultiva la física.

En la Facultad de Ciencias hay un fuerte movimiento de autoridades, profesores y alumnos por que se establezcan programas de investigación. Sería muy fecundo para el desarrollo de la ciencia en México en el porvenir, si en las instituciones de enseñanza superior se realizaran sistemáticamente investigaciones científicas.

Volvamos unos instantes la mirada hacia uno de los principales inspiradores del movimiento científico actual en México, hacia Sotero Prieto. Yo creo que este gran maestro era del linaje de los pensadores de los que decía el poeta alemán Goethe: "yo me declaro del linaje de esos que de lo oscuro aspiran a lo claro". Sotero Prieto sentía un deleite espiritual máximo al entender con claridad alguna estructura mental complicada y a exponerla, iluminada con la luz meridiana de su claro entendimiento, a sus alumnos. No todos los pensadores son del linaje de los que de lo oscuro aspiran a lo claro. Algunos tienen una vorágine de ideas en terrible confusión. De esta turbulencia surge de pronto una joya del pensamiento, lógicamente estructurada, que nos deslumbra por su be

lleza. Sotero Prieto tenía la ambición de iluminar todo el proceso del pensamiento, de esparcir claridad en todas las ideas. Con motivo de los 45 años transcurridos desde la muerte de Dn. Sotero Prieto se le rindió un homenaje en la Facultad de Ingeniería. En la ceremonia dijo el maestro Dn. Alfonso Nápoles Gándara que Sotero Prieto había sido como Sócrates, que presentaba las ideas con claridad meridiana por medio del diálogo. En sus clases, Dn. Sotero Prieto nos hacía redescubrir los conocimientos científicos llevándonos hasta ellos paso a paso, obligándonos a encontrar cada eslabón en la cadena de ideas que conduce al resultado. Este método es ideal y deja una profunda satisfacción intelectual. Lo único que se le puede objetar es que es muy lento y sólo puede utilizarse cuando no tiene el profesor prisa por cubrir un programa. Desgraciadamente aumenta día a día la cantidad de material que hay que transmitir a los alumnos y no es posible hacerlo en forma socrática. El único camino sería el de exponer uno que otro conocimiento clave, con el estilo de Dn. Sotero Prieto, y transmitir el resto de la información con rapidez. Es mucho más valiosa la inspiración que un maestro pueda encender en sus alumnos que la cantidad de información que les pueda transmitir, ya que esta última se encuentra en libros y artículos.

Otro de los iniciadores del auge de las ciencias exactas en el siglo XX en México, fue Dn. Alfonso Nápoles Gándara. Él es el primer mexicano que estudió en los Estados Unidos cursos superiores de matemáticas. Disfrutó de una beca que le otorgó la John Simon Guggenheim Memorial Foundation. Regresó del Instituto Tecnológico de Massachusetts profundamente entusiasmado con el cálculo tensorial que había estudiado con el matemático Dirk Jan Struik, maestro holandés que residió por décadas en Cambridge. Varios alumnos seguimos los cursos sobre tensores de Dn. Alfonso Nápoles Gándara inspirados por su entusiasmo. Cuando Alberto Barajar y yo nos apasionamos por la gravitación contábamos con la herramienta matemática necesaria para investigar en este campo.

En 1932 fundó Dn. Sotero Prieto, con la colaboración de Dn. Alfonso Nápoles Gándara, el Seminario de Física y Matemáticas en la Academia Nacional de Ciencias Antonio Alzate. Un grupo de profesores y alumnos de la Escuela de Ingenieros nos reuníamos los viernes a las seis de la tar

de a tratar temas de ciencias exactas. Asistían Dn. Sotero Prieto, Dn. Alfonso Nápoles Gándara, Dn. Mariano Hernández Barrenechea y Dn. Ricardo Toscano. Entre los alumnos recuerdo a Alberto Barajas, a Nabor Carrillo, a Ernesto Rivera, a Bruno Mascanzoni, a Miguel Urquijo, a Ismael Erlij y a Juan Limón.

En este Seminario se discutieron temas como el teorema de los cuatro colores, recientemente demostrado con ayuda de una computadora, el planímetro de hachita, los números hipercomplejos y el campo gravitatorio de la Tierra.

A nuestro Seminario de la Academia Nacional de Ciencias Antonio Alzate llegó un día el Dr. Manuel Sandoval Vallarta invitado por Dn. Sotero Prieto. Dn. Manuel era profesor titular del Instituto Tecnológico de Massachusetts. Era catedrático de física de las altas energías. El había estudiado en la Escuela Nacional Preparatoria en México y después cursó sus estudios profesionales en el Instituto Tecnológico de Massachusetts en Cambridge, EE.UU. Disfrutando de una beca Guggenheim había hecho estudios especiales de física en Alemania con Albert Einstein. Siendo ya profesor titular del Instituto Tecnológico de Massachusetts venía cada año a pasar las vacaciones de verano en México. Era un científico mexicano que tenía fama internacional. Junto con el Abate Lemaitre de la Universidad Católica de Lovaina en Bélgica, había creado la teoría de la radiación cósmica primaria. En el Seminario de la Alzate nos habló de partículas recientemente descubiertas, como el neutrón, de física de las altas energías, de la radiación cósmica primaria, de teoría del campo, de fascinantes temas que estaban en el foco de atención de los científicos del mundo. Para nosotros significó, Dn. Manuel Sandoval Vallarta, el científico que nos abrió una ventana al maravilloso mundo de la ciencia en gestación, de la ciencia del siglo XX.

Tengo la impresión de que los aparatos que ha habido en México para la investigación en física experimental muestran dramáticamente el estado de la física en cada época. La presencia de un aparato de investigación es un síntoma del grado de desarrollo que se ha alcanzado en el momento de su utilización.

La física es en realidad una sola ciencia que tiene dos aspectos,

626

uno teórico y otro experimental. Hubo una época en que una misma persona podía ser a la vez físico experimental y físico teórico. Isaac Newton hizo experimentos con péndulos para demostrar que la masa inercial de un cuerpo es estrictamente proporcional a su masa gravitatoria. El mismo creó la maravillosa teoría de la gravitación universal, una de las más grandes hazañas de la física teórica. El forjó además el cálculo de las fluxiones, disciplina matemática necesaria para su teoría de la gravitación. En un solo hombre se reúnen el matemático, el físico teórico y el físico experimental. Ahora nos parecen los experimentos de Newton con péndulos un poco toscos, pero en su época representaban experimentos con técnicas de lo más refinadas. Ahora es casi imposible que un solo hombre de ciencia pueda ser a la vez un gran físico teórico y un gran físico experimental. Pero a pesar de la división del trabajo de investigación, es muy conveniente que en el mismo centro se cultiven los dos aspectos de la física.

La historia de los aparatos para la investigación en física experimental en México se inicia con un telescopio de rayos cósmicos que mandó instalar Dn. Manuel Sandoval Vallarta en la Torre Meteorológica del Palacio de Minería. Cuando se fundó el Instituto de Física en 1938, con el nombre de Instituto de Física y Matemáticas, sólo contábamos con ese aparato para realizar investigaciones en física experimental. El telescopio de rayos cósmicos había sido construido en la Universidad de Chicago en los EE.UU. y permitía medir la intensidad de la radiación cósmica para distintos ángulos cenitales y distintos azimutes.

Siendo Rector de la Universidad Nacional Autónoma de México el Dr. Salvador Zubirán, quiso conseguir fondos para equipar mejor a los laboratorios de nuestra Máxima Casa de Estudios. Durante los años de 1947 y 1948 organizó una campaña para reunir una suma, fuera del presupuesto oficial de nuestra Universidad, para adquirir aparatos y equipos de laboratorio. La meta que se fijó el Dr. Salvador Zubirán fue la de reunir diez millones de pesos, nombre que se le dio a la campaña: "la campaña de los diez millones". Hay que tener en cuenta que esto ocurrió hace varias devaluaciones. Pero aun así los diez millones muestran la escasez de recursos que imperaba en nuestra universidad en aquella época. Cuatro años más

tarde el gobierno del presidente Miguel Alemán dedicaba la Ciudad Universitaria a la Universidad Nacional de México, cuya construcción había costado trescientos millones de pesos.

De los fondos reunidos en la campaña de los diez millones se le asignaron \$60,000.00 al Instituto de Física, del que yo era director. En 1948 adquirimos con esa suma un aparato de difracción de rayos X.

Dos años más tarde, en 1950, se adquirió para el Instituto de Física de nuestra Universidad un aulador de partículas, tipo Van de Graaff de dos millones de electrones-volt, con un costo de un millón de pesos. La historia de la adquisición de este aparato arroja luz sobre la situación de nuestra Universidad en esa época.

El Dr. Nabor Carrillo, que más tarde sería Rector de nuestra Máxima Casa de Estudios, de 1952 a 1960, era entonces Coordinador de la Investigación Científica. Cada año sustentaba un curso de verano sobre mecánica de suelos en la Universidad de Harvard, en Cambridge, Massachusetts, EE.UU. En 1949 visitó una fábrica de aceleradores tipo Van de Graaff, fundada por varios profesores de Massachusetts, entre ellos el mismo Van de Graaff. Le explicaron al Dr. Nabor Carrillo que esos aceleradores se construían en grande escala porque se utilizaban para esterilizar fármacos en la industria farmacéutica. Preguntó el Dr. Nabor Carrillo por el precio de uno de esos aceleradores. Le dieron la respuesta en dólares, que traducida a pesos equivalía a un millón de pesos. Esta era una suma muy alta en aquella época para la adquisición de un solo aparato de investigación, pero a Nabor Carrillo le pareció que estaba casi a nuestro alcance. Regresando a México nos reunió a Alberto Barajas y a mí y nos platicó del acelerador Van de Graaff de dos millones de electrones-volt que costaba un millón de pesos. Juntos fuimos a ver al arquitecto Carlos Lazo, amigo de los tres, que había sido designado por el Presidente de la República, Lic. Miguel Alemán, Gerente General de Ciudad Universitaria, organismo creado por el Gobierno para construir el nuevo albergue de nuestra Universidad. Carlos Lazo se entusiasmó con el relato del Dr. Nabor Carrillo y lo que le platicamos Alberto Barajas y yo que se podía hacer con ese acelerador. Hombre de acción y muy valiente, Carlos Lazo adquirió el acelerador Van de Graaff de dos millones de electrones-

Instituto de Física, con fondos de la construcción de la Ciu

dad Universitaria. Se inició la edificación del pabellón que alojaría al acelerador. El edificio lo diseñó y construyó un arquitecto industrial: González Reina. Un jardín rodea al albergue del aparato.

No faltó un alma piadosa que le llevó al presidente Miguel Alemán la información de que el arquitecto Carlos Lazo estaba usando fondos de la construcción de la Ciudad Universitaria para adquirir aparatos de física. Cuentan que el Lic. Miguel Alemán se molestó. Pero cuando visitó las instalaciones del acelerador se entusiasmó y otorgó fondos para terminar las obras y adquirir equipo adicional. En 1961 obtiene el Instituto de Física un acelerador dinamitrón de alta corriente. Era director entonces del Dr. Fernando Alba, a quien le hacen el donativo del aparato.

En 1968 se adquiere para el Centro Nuclear de México, en Salazar, Edo. de México, un acelerador Van de Graaff Tandem de doce millones de electrones-volt y un reactor Triga Mark III de un megawatt en régimen establecido, capaz de pulsar hasta 1,200 megawatts durante un breve intervalo. Estos dos aparatos se adquirieron siendo yo director de ese centro. El acelerador Tandem costó 900,000 dólares y el reactor Triga 700,000 dólares. La sucesión de aparatos de investigación muestra el creciente esfuerzo económico que está dispuesto a hacer México por el desarrollo de la física experimental.

Más importante que la inversión en aparatos es nuestra creciente capacidad para construirlos. Tenemos ahora talleres en que se pueden manufacturar aparatos muy sofisticados de investigación. Hay además un conjunto de investigadores capaces de diseñarlos y construirlos.

Para ofrecer un foro en donde se pudieran presentar los resultados de las investigaciones en física se creó la Sociedad Mexicana de Física en 1950. Hubo un antecedente: en 1943 se fundó la Sociedad Mexicana de Ciencias Físicas y Matemáticas que sólo tuvo un año de vida. Mientras no existió nuestra Sociedad Mexicana de Física, presentábamos nuestros resultados de investigación en las Asambleas y Congresos de la Sociedad Matemática Mexicana, y publicábamos nuestros artículos en el Boletín de esa Sociedad. Me halaga mucho que la Sociedad Mexicana de Física, de la que fui Presidente Fundador, me rinda este homenaje que agradezco conmovido.

## ORIGEN DEL DESARROLLO Y USO DE LOS ACELERADORES DE PARTICULAS EN MEXICO

Carlos Graef Fernández  
Facultad de Ciencias, UNAM

En el desarrollo de la física nuclear experimental en México, hay una discontinuidad causada por la instalación del primer acelerador de partículas: el Van de Graaff de dos millones de electrones-Volt del Instituto de Física de la Universidad Nacional (IFUNAM). Con ese aparato, se inician las investigaciones en física nuclear experimental en el año de 1954. La representación gráfica de la intensidad de las actividades en física experimental en nuestro país tiene una ordenada nula en 1939, año de la fundación del IFUNAM; asciende con suavísima pendiente hasta 1954; en este año dobla hacia arriba y sube vertiginosamente, despertando ilusiones y provocando esperanzas.

Al fundarse el IFUNAM en 1939, se inicia la construcción de trenes de contadores de rayos cósmicos para medir la intensidad de esta radiación para diferentes azimutes y diferentes ángulos cenitales. Este programa lo dirigía el Dr. Manuel Sandoval Vallarta desde el Instituto Tecnológico de Massachusetts en Cambridge, Estados Unidos, en donde él era entonces catedrático titular de física de altas energías. Los aparatos se instalaron en la azotea del Palacio de Minería que alojaba en esa época al IFUNAM y a los departamentos de física y de matemáticas de la recién fundada Facultad de Ciencias.

La escasez de recursos económicos para la investigación en física experimental en México durante esa primera etapa de su evolución se manifiesta dramáticamente en la adquisición del segundo equipo para este propósito. El Dr. Salvador Zubirán, Rector de nuestra máxima casa de estudios en esa época, organizó en los años de 1947 y 1948 una campaña para reunir fondos, fuera del presupuesto oficial de la UNAM, para equipos de laboratorios y bibliotecas de las dependencias universitarias. La meta que se fijó para esa colecta fue de diez millones de pesos. Se llamó al proyecto "Campaña de los Diez Millones". Ahora nos parece insignificante esta suma. Hay que tener en cuenta que esta actividad se realizó antes de varias devaluaciones y que diez millones de pesos equivalían a 20,000 centenarios que cuestan ahora seis mil millones de pesos. Del derrame de fondos que significó la campaña, el IFUNAM reci

bió en 1949 60,000 pesos. Con esa suma, se adquirió un aparato de difracción de rayos X. Con este aparato, se iniciaron investigaciones de física cristalográfica.

Cuando el autor hizo sus estudios del doctorado en física (Ph.D.) en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, en Cambridge, EEUU, le impresionó mucho el acelerador de partículas inventado y construido por Robert Van de Graaff, catedrático de la institución. Soñaba que algún día se harían investigaciones con un aparato de ese tipo en México, pero ese día se veía en el futuro muy remoto. Un acelerador Van de Graaff se construía en los talleres de un centro de investigación. Cada uno de esos aparatos se fabricaba de acuerdo con las especificaciones de las investigaciones y era un ejemplar único. Se requería un taller que construyera el equipo auxiliar de un modo continuo. Para el funcionamiento y mantenimiento del acelerador, eran necesarios científicos y técnicos especializados. Parecía que en muchos años sería imposible que se realizaran en México investigaciones con un acelerador de partículas Van de Graaff. Una serie de acontecimientos afortunados cambió ese desalentador panorama hacia 1950.

El cambio se debió a universitarios que influyeron profundamente en el destino de nuestra Universidad Nacional de México. El primero de ellos fue el Dr. Nabor Carrillo que fue Rector de nuestra máxima casa de estudios de 1953 a 1961. Nabor Carrillo hizo sus estudios del doctorado en ingeniería en la Universidad de Harvard, en Cambridge, Massachusetts, EEUU, siendo becario de la fundación John Simon Guggenheim. En ese centro de estudios, impresionó profundamente por su originalidad y por su talento científico a los investigadores en mecánica de suelos, especialidad a la que él se dedicó. Durante sus años de estudio, hizo una amistad especial con el Dr. Arturo Casagrande, que fue uno de sus profesores. Este lazo de unión entre los dos hombres de ciencia, perduró durante sus vidas. A su regreso a México, después de obtener el doctorado en ingeniería en Harvard (Sc.D.), la UNAM nombró a Nabor Carrillo, Coordinador de la Investigación Científica. El año de 1950 la Universidad de Harvard invitó a Nabor Carrillo a dictar una serie de conferencias sobre mecánica de suelos como profesor huésped de esa institución. El cuñado de Arturo Casagrande era Dennis Robinson, Gerente General de la High Voltage Engineering Corporation.

El profesor Van de Graaff había obtenido la patente para sus aceleradores. El y varios científicos del Instituto Tecnológico de Massachusetts deseaban explotar esa patente. Utilizando aparatos de Van de Graaff para acelerar electrones, la industria farmacéutica los empezaba a usar para esterilizar fármacos. El profesor Van de Graaff y los científicos que él encabezaba crearon esta compañía constructora de aceleradores: la High Voltage Engineering Corporation. Dennis Robinson invitó a Nabor Carrillo a visitar la fábrica de aceleradores, concociendo su enorme interés en el desarrollo de la física experimental en nuestro país. Como estos aceleradores se fabricaban para uso industrial, ya no era cada aparato un modelo especial. El precio se había abatido. Se podía adquirir un acelerador por un millón de pesos. Nabor Carrillo se llenó de ilusiones: un millón de pesos era todavía una suma muy grande para invertirse en un solo aparato de investigación para nuestra Universidad Nacional, pero ya estaba dentro de lo que era accesible con sacrificios! México podía entrar a la era atómica adquiriendo un acelerador Van de Graaff.

De su visita a Harvard, Nabor Carrillo regresó a México con la ilusión de ver pronto instalado un acelerador de partículas en la UNAM. Contagió con su entusiasmo a Alberto Barajas y al autor, que entonces eramos Director de la Facultad de Ciencias y Director del Instituto de Física, respectivamente. En estas circunstancias, aparece en el horizonte de la UNAM, el arquitecto Carlos Lazo.

El Presidente de México, Miguel Alemán, había manifestado su deseo, al iniciar su gobierno el año de 1946, de construir una Ciudad Universitaria para albergar a nuestra máxima casa de estudios. Para realizar este ambicioso proyecto que era una de sus ilusiones favoritas, nombró a unos arquitectos muy distinguidos. Desafortunadamente, pasaba el tiempo y no se lograba un consenso de opiniones de los universitarios sobre el proyecto de la casa de estudios mayores. Llegó el año de 1950 sin que hubiera sido posible iniciar las obras. Entonces decidió el Presidente Miguel Alemán que el Gobierno de la República construyera la Ciudad Universitaria y una vez terminada se la dedicara a la Universidad Nacional. Los encargados de la construcción escucharían la opinión de los dirigentes de la casa de estudios y de universitarios distinguidos. Para realizar este magno proyecto, se creó un organismo gubernamental que se llamó "Ciudad Universitaria". El Presidente nombró Geren-

te General de esta dependencia al arquitecto Carlos Lazo. Para fortuna del desarrollo científico de nuestro país, Carlos Lazo era un visionario que creía que México debería incorporarse a la era atómica cuanto antes y que esto se lograría entrando a esta nueva época por la puerta de la física nuclear experimental. Carlos Lazo creía que esta actividad contribuiría de un modo importante a sacarnos del subdesarrollo.

Los constructores de Ciudad Universitaria utilizaron los servicios de Alberto Barajas y del autor como consultores del área de ciencias. Con ese motivo, teníamos frecuentes entrevistas con Carlos Lazo, a quien le comunicamos los sueños de Nabor Carrillo sobre un acelerador de partículas Van de Graaff para México. A Lazo le fascinó el proyecto. Celebramos reuniones Carrillo, Lazo, Barajas y el autor. Lazo nos comunicó su decisión de dedicar un millón de pesos de los fondos asignados a la construcción de Ciudad Universitaria a la compra de un acelerador de partículas Van de Graaff de dos millones de electrones Volt para que México entrara a la era atómica iniciando investigaciones en física nuclear experimental. Lazo convenció al C. Presidente Miguel Alemán de la bondad del paso dado. Se firmó un contrato con la High Voltage Engineering Corporation. El acelerador llega a México en 1952. Se instala en un pabellón especial construido por el arquitecto González Reyna en un jardín en la inmediata vecindad del edificio que albergaba a los institutos de investigación en aquella época y que se conocía con el nombre de "Torre de Ciencias". Una ola de euforia inundó al mundo académico en esos días. Tanto los universitarios que trabajarían en las nuevas instalaciones como los arquitectos e ingenieros que las construían desbordaban entusiasmo y tenían fe en el futuro de México. En ese ambiente, se instaló el primer acelerador que hubo en nuestro país. Terminaron los trabajos de instalación y calibración a finales de 1953. Al año siguiente, se iniciaron las investigaciones en física nuclear experimental con los haces de partículas de este aparato. México había entrado en la era atómica.

Para el desarrollo científico de un país, son muy importantes los equipos de laboratorio, pero de más relevancia todavía son los científicos que los utilizan en sus investigaciones. En la instalación de nuestro primer acelerador de partículas, el Van de Graaff de dos millones de electrones-Volt, en la Ciudad Universitaria intervinieron los físicos Fernando Alba y Alonso Fernán-

dez y el ingeniero mecánico electricista Eduardo Díaz Lozada. Los dos físicos tienen la doble formación de ingenieros y científicos. Desde que se iniciaron las gestiones para adquirir el Van de Graaff, se designó al Dr. Fernando Alba Jefe del nuevo laboratorio que se construiría en torno al acelerador. La UNAM comisionó al Dr. Alba para hacer estudios especiales sobre aceleradores Van de Graaff en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, Cambridge, EEUU.

En aquella época, era el Dr. William W. Buechner el Encargado del Laboratorio del Acelerador de Partículas Van de Graaff en el Instituto Tecnológico de Massachusetts.

Aceptó con gusto al Dr. Alba en el laboratorio que él dirigía y lo ayudó en forma importante con sus enseñanzas y sus consejos. Desde que se estableció ese primer contacto con los que iniciaría la física nuclear experimental en México, William Buechner ayudó desinteresadamente y en forma muy eficaz a la investigación científica en ese campo en nuestro país. El año de 1953 en el que terminó la instalación y calibración de nuestro primer acelerador, la UNAM comisionó a Marcos Mazari para trasladarse al Instituto Tecnológico de Massachusetts y para hacer allí, en el Laboratorio del Van de Graaff, estudios especiales sobre reacciones nucleares que se pudieran realizar con nuestro nuevo equipo. Marcos Mazari estuvo dos años en ese centro de investigación estadounidense, estudiando e investigando bajo la dirección de William W. Buechner. El Dr. Nabor Carrillo, Rector en esa época de nuestra máxima casa de estudios, fue el que descubrió a Mazari. Le habían impresionado profundamente las investigaciones que Mazari había realizado en el campo de la ingeniería. Nabor Carrillo pensó que el talento de Mazari como experimentador era trasladable al campo de la física. ¡El tiempo le dio la razón a Nabor Carrillo! Mazari es ahora un gran físico experimental.

El año de 1954 visitan el Laboratorio del acelerador Van de Graaff del IFUNAM los investigadores estadounidenses William W. Buechner y A. Sperduto del Instituto Tecnológico de Massachusetts y Thomas W. Bonner del Instituto Rice de Houston, Texas. Buechner hace al IFUNAM un donativo de una pequeña cámara de dispersión que utilizaba pequeñas placas fotográficas y con la que se pueden medir distribuciones angulares en reacciones nucleares.

Con el acelerador Van de Graaff y esta cámara de dispersión donada por Buechner, se realizan las primeras investigaciones en física nuclear experimental en México: se estudian las distribuciones angulares de  $^{12}\text{C}(d,p)$ ,  $^{13}\text{C}$  y de  $^{16}\text{O}(d,p)$ ,  $^{17}\text{O}$ .

Ejecutan esta labor científica los investigadores del IFUNAM: Fernando Alba, Alonso Fernández, Tomás A. Brody y Manuel Vázquez Barete. En 1954 regresa Marcos Mazari de los Estados Unidos y se incorpora al grupo. Por su iniciativa, se inicia la construcción de un espectrógrafo magnético que se llama en el IFUNAM "Espectrógrafo I". Con este aparato, se medirían dos años después, con precisión, las distribuciones angulares en reacciones nucleares producidas con el acelerador Van de Graaff.

En 1955 se emprende un programa de medición de las secciones transversales a los neutrones de energías comprendidas entre 13 y 16 millones de electrones-Volt. Estas investigaciones se realizan por sugerencia del Prof. Thomas W. Bonner, utilizándose un blanco de tritio que él mismo preparó. Los neutrones se obtienen como productos de la reacción  $T(d,\alpha)n$  y las secciones transversales se miden para blancos de Na, Al, Fe, Ni, Cu, Zn, Sr, Mo, Ag, In, Sn, Hg, Ta, Pb y Bi.

En ese año se contrataron técnicos para la operación y mantenimiento del acelerador: C. Lilo R. Velázquez y J. Velázquez. Más tarde se unió al grupo de técnicos, F. Velázquez.

En 1955 se inicia un programa sistemático de núcleos ligeros, utilizando las reacciones  $(d,p)$ ,  $(d,\alpha)$  y  $(p,\alpha)$ . Se realizan medidas de masas nucleares y espectros de energía en los siguientes núcleos:  $^1\text{H}$ ,  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^5\text{He}$ ,  $^6\text{Li}$ ,  $^7\text{Li}$ ,  $^8\text{Be}$ ,  $^{10}\text{Be}$ ,  $^{11}\text{Be}$ ,  $^{12}\text{B}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{16}\text{N}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{29}\text{Si}$ ,  $^{30}\text{Si}$ ,  $^{30}\text{P}$ ,  $^{33}\text{S}$  y  $^{40}\text{K}$ . Ejecutan estos trabajos: Fernando Alba, Marcos Mazari, Ariel Iejera, Jorge Rickards, María Esther Ortiz, Gilberto López D' Antín, Roberto Domínguez y Alejandra Jaidar.

La presencia en México de nuestro primer acelerador representa mucho más que los trabajos de investigación de física nuclear experimental que se realizan con él. En los talleres del IFUNAM se aprendió y dominó la técnica del vacío, del soplado de vidrio, de las emulsiones fotográficas nucleares.

Se construyeron espectrógrafos, cámaras de dispersión, electroimanes y toda clase de equipo auxiliar. Cambió el panorama de la construcción de instrumentos científicos. El acelerador Van de Graaff de dos millones de electrones-Volt fue un catalizador que aceleró nuestro desarrollo científico y tecnológico en la física nuclear experimental. Afortunadamente había en México un grupo fuerte de física nuclear teórica, encabezado por Marcos Moshinsky, que pudo apoyar al grupo experimental desde el primer momento.

Además de numerosos artículos, libros técnicos y de divulgación, el Van de Graaff provocó la elaboración de tesis de licenciatura, maestría y doctorado. Algunos de los más distinguidos físicos experimentales de México escribieron sus tesis sobre trabajos realizados con el Van de Graaff. Las primeras tesis de licenciatura sobre trabajos realizados con este acelerador fueron la de Vinicio Serment y la de Marcos Mazari, desarrollada esta última bajo la dirección del Prof. William W. Buechner en 1955. Hasta 1964 se habían escrito 16 tesis de licenciatura; además de las dos ya mencionadas, las de los siguientes candidatos listados por orden cronológico: Manuel Vázquez Barete, Jorge Rickards C., María Esther Ortiz S., Alejandra Jaidar M., Juan A. Carega V., Carmen Tagueña P., Raúl Nuño G., Roberto Domínguez B., Gilberto López D'Antón, Rafael Almanza Salgado, Alfonso Martínez B., Ignacio Castro V., Héctor del Castillo G., José R. Alvarez B.

Los candidatos que hicieron sus tesis doctorales con el acelerador Van de Graaff son: Fernando Alba A., Ariel Tejera Rivera, Jorge Rickards C., Jorge Gómez del Campo E., Angel Dacal Alonso, María Esther Ortiz S.

El acelerador de partículas Van de Graaff de dos millones de electrones-Volt del IFUNAM provocó una reacción en cadena en la física nuclear experimental. En 1955 se inicia la construcción de otro acelerador de 0.5 MeV. Dos años después, emprende la Universidad de Guanajuato el diseño y la construcción de un acelerador de 0.5 MeV.

El autor tuvo la fortuna de visitar la Universidad de Guanajuato en 1946, en una misión del Seminario de Cultura Mexicana. En esos días los trabajos en física experimental se hacían en Guanajuato en unas oficinas que había ren-

tado Armando López en el edificio de las Fábricas de Francia, en León. Las actividades en física experimental las dirigía y costeaba Armando López. Diez años después la situación había cambiado radicalmente. En la Universidad de Guanajuato se emprende la construcción de un acelerador de 0.5 MeV. bajo la dirección de Armando López. Al visitar Dennis Robinson, Gerente General de la High Voltage Engineering Corporation los laboratorios de investigación de Guanajuato, le impresionó tanto la parte que ya se había construido de ese acelerador, que indujo a la High Voltage a donar a la Universidad de Guanajuato el tubo acelerador para ese aparato.

Los aceleradores en México se multiplicaron. Los EE.UU. regalaron al IFUNAM un dinamitrón. Más tarde se instaló en el Centro Nuclear de México, en Salazar, Edo. de México, un acelerador Tandem Van de Graaff de 12 MeV.

El desarrollo de la física nuclear experimental que se inicia hace un tercio de siglo culmina en 1986 con la instalación en el IFUNAM de un acelerador Van de Graaff de 5.5 MeV. a fines de agosto y con la inauguración del Pelletron del ININ a la que estamos asistiendo. El nuevo Van de Graaff del IFUNAM es el aparato medular de un laboratorio que dirige Alejandra Jaidar, que se formó como física nuclear experimental en el primer Van de Graaff de México, origen de todo este movimiento. A los veteranos de la física en México que vimos nacer hace más de treinta años a la física nuclear experimental en nuestro país, nos conmueve y nos llena de orgullo que ahora se ponga en marcha un acelerador, el Pelletron, concebido en nuestro territorio por científicos mexicanos y construido aquí en el ININ por hombres de ciencia, por ingenieros y técnicos mexicanos. El diseño es de Armando López, que inició la física nuclear experimental en la Universidad de Guanajuato, en la provincia de México, y el responsable de la construcción es su hijo Héctor López, investigador del ININ. La semilla que germinaba hace un tercio de siglo en el origen de la física nuclear experimental ha producido un árbol vigoroso. Nuestros científicos, nuestros ingenieros y técnicos pueden diseñar y construir instrumentos científicos sofisticados si se les da la oportunidad y los medios para hacerlo.

Bibliografía:

- 1) Héctor Cruz Manjarrez. Reseña Histórica del Instituto de Física. UNAM. Diciembre de 1975.
- 2) Angel Dacal Alonso. La Física Experimental en el IFUNAM. Curriculum de la Física Nuclear Experimental. Instituto de Física. UNAM. Agosto de 1986.

Los datos cronológicos están tomados de 1) y 2). Los detalles sobre trabajos realizados en la primera etapa del desarrollo de la física nuclear experimental en México se tomaron de Angel Dacal.

**PROLOGO DEL DR. CARLOS GRAEF FERNANDEZ**

El escenario de los fenómenos físicos de la teoría de la relatividad general de Einstein es un espacio-tiempo curvo, que es un espacio de Riemann de cuatro dimensiones, un  $R_4$ . En los desarrollos recientes de la relatividad general se ha visto que conviene considerar a este  $R_4$  como inmerso en un espacio llano de seis dimensiones, en un  $E_6$ . Desde el punto de vista de la física es muy importante el estudio de la inmersión de  $R_4$  en  $E_6$ . El trabajo que José Luis Fernández Chapou presenta como tesis doctoral y que se titula "Inmersión de  $R_4$  en  $E_6$ " es de gran alcance para la relatividad general, a pesar de su enunciado que parece referirse a un problema muy particular de la geometría de espacios de múltiples dimensiones.

El tema de la inmersión de un espacio dentro de otro de más dimensiones tiene como antecedente tanto lógico como histórico, la construcción de un sistema para identificar puntos en el espacio contenedor. El espacio inmerso se describe dando un criterio que permita decir en qué punto del espacio recipiente está cada punto del espacio inmerso. Una forma muy expedita de establecer este criterio en espacios llanos es la de construir en estos redes cartesianas de rectas y describir los miembros de la red que pasan por el punto que se quiere señalar. En los espacios llanos existen siempre redes cartesianas de rectas que permiten localizar a los puntos por medio de sus coordenadas. Los espacios llanos, tanto los euclidianos como los pseudoeuclidianos, son ideales para espacios contenedores en los que se surgen los espacios inmersos. En este trabajo se usa como contenedor un espacio

2.

llano de 6 dimensiones y se trata también detalladamente el caso de un espacio llano de 5 dimensiones para colocar en ellos a un espacio riemanniano de 4 dimensiones.

La creación de espacios llanos con una red de rectas para localizar puntos de debe al eminente matemático, filósofo y físico francés del Siglo XVII, René Descartes, quien es el pensador que establece el racionalismo filosófico. Descartes es tan grande como matemático como lo es como filósofo. Su creación científica más importante: la Geometría Analítica aparece en 1637 como un apéndice titulado: "Géométre" de su obra filosófica "Discourse de la Méthode". Descartes restringió su geometría analítica a espacios de 2 y 3 dimensiones. Sus ideas llegan al Siglo XIX enriquecidas por la posibilidad de extenderse a espacios de cualquier número de dimensiones. Por atisbos geniales que iluminan súbitamente el paisaje matemático desde la antigüedad griega se adivina la posibilidad de espacios de más de tres dimensiones. Tu vieron esas visiones multidimensionales: Tolomeo en el Siglo II de nuestra era, el matemático inglés J. Wallis en el Siglo XVII, Jean-le-Rond D'Alembert en el Siglo XVIII, y el genio de la mecánica, creador del cálculo de variaciones, el genio francés Joseph Louis Lagrange a fines del Siglo XVIII y principios del XIX.

Dice Michel Chasles que la geometría analítica de Descartes

3.

es "proles sine mater creata" (infante nacido sin intervención de madre), para enfatizar la falta de predecesores de la idea de identificar a un punto con una colección ordenada de números: sus coordenadas. Hay empero antecedentes de esta idea en Apolonio de Pérgamo en el Siglo III A. J., en el algebrista francés Francis Vieta en el Siglo XVI, y en otros matemáticos anteriores a Descartes. El genial matemático - francés Pierre de Fermat, contemporáneo de Descartes llegó independientemente al concepto de coordenadas en su obra -- "Ad locos planos et solidos isagoge".

A Descartes se le considera sin embargo el creador de la - geometría analítica, porque él supo utilizar sistemáticamente esta generalización de la geometría y convertirla en un método poderoso para analizar objetos geométricos. El tiene el mérito de haber desarrollado la geometría analítica y de haberla convertido en una importantísima disciplina matemática.

En el espacio euclidiano de tres dimensiones que nos es tan familiar existen inmersos espacios riemannianos de dos dimensiones: las superficies planas y curvas. Por esta razón - no es sorprendente que se hayan investigado primero los espacios  $R_2$  inmersos en  $E_3$ . En 1827 publicó el más grande de los matemáticos alemanes Carl Friedrich Gauss su obra geométrica magna: "Disquisitiones Generales circa Superficies -

4.

curvas". En ella utiliza como idea fundamental para caracterizar a una superficie curva el cuadrado del elemento de arco que es el cuadrado de la distancia entre dos puntos de la superficie cuyas coordenadas difieren en las diferenciales de las mismas. En la superficie curva construye Gauss dos familias de curvas que son una generalización de las redes cartesianas de rectas en los espacios llanos y que permiten localizar puntos en la superficie. Gauss nos presenta a la superficie como un universo bidimensional en el que seres racionales bidimensionales pueden construir la geometría de la superficie sin pensar en el espacio llano  $E_3$  contenedor, en el que la superficie está inmersa. Como resultado cumbre obtiene Gauss su famoso "Theorema Egregium" que establece que la curvatura total de la superficie en cada punto es invariante en las flexiones sin dilatación o contracción. Este teorema es tan hermoso como poderoso. Son increíblemente ricas las flexiones sin dilatación ni contracción que son también las que dejan invariante al cuadrado del elemento de arco. La joya que Gauss encontró es el teorema que afirma que las transformaciones que dejan invariante a la  $ds^2$  también dejan invariante a la curvatura total de la superficie en cada punto.

Gauss descubrió el camino para estudiar una superficie curva desde adentro, sin recurrir al espacio contenedor. Los desarrollos gaussianos parecen indicar que el devenir de la geo

5.

metría será en la dirección de estudiar a  $R_n$  desde adentro, sin recurrir a un  $E_{n+m}$  que lo contenga.

Otro matemático de la Universidad de Göttingen G. F. Bernhard Riemann, discípulo de Gauss, generalizó las ideas de su maestro relativas a las  $R_2$  a espacios curvos de cualquier número de dimensiones. Riemann es uno de los matemáticos más originales cuyas ideas revolucionaron varias disciplinas matemáticas. Siguiendo a Gauss y extendiendo sus ideas a cualquier número de dimensiones, Riemann hizo al cuadrado del elemento de arco el invariante fundamental de su geometría. Actualmente se le rinde homenaje llamando a los espacios curvos de esta índole "espacios de Riemann". El espacio-tiempo de la teoría de la relatividad general de Einstein es un  $R_4$ .

Riemann construye la geometría de un  $R_n$  desde adentro: intrínsecamente. No recurre a un espacio llano  $E$  de mayor número de dimensiones en el que esté inmerso  $R_n$ . El presentó sus ideas geométricas en la primera clase que sustentó como profesor de matemáticas de la Universidad de Göttingen en 1854. Su disertación inaugural se tituló: "Sobre las Hipótesis en las que se funda la Geometría". Este trabajo impresionó mucho a Gauss que escuchó la disertación inaugural en compañía de los otros miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad, como es la tradición.

6.

La investigación de los espacios de Riemann se había iniciado desde un espacio llano en el que estuvieran inmersos y había terminado con el análisis intrínseco del espacio de Riemann, con su investigación desde dentro, se consideró un -- triunfo el eliminar el  $E_{n+m}$  en el que está inmerso  $R_n$ . Se consideraba al  $E_{n+m}$  como un auxiliar, como un andamiaje para establecer la geometría en  $R_n$ .

Esta era la situación hasta que en la segunda mitad de nuestro Siglo XX adquiere importancia el  $E_{n+m}$  en el que está inmerso el  $R_n$ . Después de más de un siglo de trabajar desde adentro en un  $R_n$ , vuelven ahora los matemáticos la atención a los  $E_{n+m}$  en que se puede sumergir el espacio de Riemann. R. Penrose y E. T. Newman desarrollan un formalismo poderoso que arroja luz sobre las inmersiones de espacios curvos de Riemann en espacios llanos de más dimensiones. Una pleyade de físicos y matemáticos se lanzan a investigar estas inmersiones y sus aplicaciones a la relatividad general. Recobran importancia los espacios llanos en los que están inmersos los espacios curvos de Riemann. Entre los científicos que han contribuido a este campo quiero mencionar a C. Collinson, H. Goenner, D. Lovelock, J. Peblanski del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN; V. V. Narlikar, K. R. Karmarkar, A. Z. Petrov. A la luz de los nuevos desarrollos sobre inmersiones se ha descubierto la importancia de resultados anteriores que ahora resaltan con más brillo,

7.

como el espín-tensor de C. Lanczos. En México se cultiva el problema de las inmersiones en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, en la Universidad Autónoma Metropolitana, en el Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN.

Ahora, se ha encendido el interés por esos problemas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. La presencia entre nosotros de José Luis López Bonilla ha atraído hacia el problema de las inmersiones a investigadores jóvenes y brillantes como José Luis Fernández Chapou.

Es curioso observar el giro de  $180^\circ$  que ha dado el estudio del escenario de la relatividad general. Se estudió el  $R_4$ , que es el espacio-tiempo, intrínsecamente y sólo hasta hace dos décadas se volvió a fijar la atención en el  $E_6$  en el que puede sumergirse ese  $R_4$ . Ahora no se considera un andamiaje sin importancia el espacio llano de 6 dimensiones en el que puede estar inmerso el espacio-tiempo.

Antes de ser presentado como tesis doctoral éste trabajo de José Luis Fernández Chapou ya ha sido considerado y comentado por científicos nacionales y extranjeros. Se han recibido reacciones de la Gran Bretaña, del Japón, de Alemania y de Centros Nacionales de Investigación.

José Luis Fernández Chapou es uno de los jóvenes investigadores de los que estamos orgullosos en la UNAM por su originalidad, por su formación, por su entusiasmo y su dedicación.

Dr. Carlos Graef Fernández.

RELACION ENTRE EL INSTITUTO DE FISICA Y EL CENTRO  
NUCLEAR DE MEXICO.

(Década 1965-75).

Carlos Graef y Marcos Mazari.

Fue nuevamente por el entusiasmo de nuestros profesores en ingeniería, física y matemáticas, Nabor Carrillo, Carlos Graef y Alberto Barajas, respectivamente, que el 3 de junio de 1964, Antonio Ortiz Mena, Secretario de Hacienda y Crédito Público, coloca la primera piedra en el Centro Nuclear de Salazar. Este trascendente evento para México ocurre siendo todavía presidente de la República Don Adolfo López Mateos, de la Comisión Nacional de Energía Nuclear Don José María Ortiz Tirado y vocales de la misma Nabor Carrillo y Manuel Sandoval Vallarta.

Con su sencillez el Maestro Carlos Graef, primer director del Centro Nuclear, nos escribe en la introducción de la primera etapa de trabajo del grupo del acelerador Van de Graaff Tandem<sup>(1)</sup> (1966-69) lo siguiente:

"FINALIDADES.

Las finalidades del Centro Nuclear son cuatro:

- 1) El adiestramiento de personal;
- 2) La producción de radio isótopos;
- 3) La investigación científica y tecnológica;
- 4) El prestigio de México en el campo de la ciencia nuclear.

Nuestro país necesitará, en un futuro muy próximo, de un gran número de ingenieros, de técnicos y de científicos preparados en la investigación y aplicaciones de la energía nuclear -con fines pacíficos- que puedan desarrollar un programa de producción de energía núcleo-eléctrica.

El Centro Nuclear está constituido adecuadamente por 4 Direcciones: 1) reactor; 2) acelerador, 3) talleres generales, y 4) seguridad. En la serie de artículos presentada aquí nos referimos únicamente a los primeros trabajos del acelerador, grupo que pudo ya recibir ayuda de los Talleres Generales para sus primeros proyectos.

## "EL ACELERADOR VAN DE GRAAFF".

El Centro Nuclear tiene, para realizar sus trabajos, uno de los aparatos de investigación más finos del mundo: El acelerador Van de Graaff Tandem de 12 millones de electrón-volts. Este aparato ya está instalado en su edificio y listo para iniciar la etapa de investigaciones y preparación de nuevo personal. La meta final de estas investigaciones es el conocimiento detallado de la estructura de los núcleos de los átomos. No es solamente por satisfacer una mera curiosidad lo que hace que los científicos concentren en la actualidad tantos esfuerzos en investigar la constitución íntima de los núcleos atómicos. Un mayor conocimiento de esa estructura íntima del núcleo nos dará mayor dominio sobre la materia. De los conocimientos de los físicos sobre el núcleo surgió la energía nuclear de la que tanto espera la humanidad. Al crecer nuestros conocimientos sobre los núcleos, se obtendrán quizás otras fuentes de energía nuclear que las ya conocidas, u otras formas para liberar la energía aprisionada en los núcleos de los átomos. La investigación científica fundamental es indispensable para los estímulos que presenta para la tecnología y para las aplicaciones de la ciencia en la industria y a la agricultura, además del valor intrínseco que tiene como parte integrante de la cultura del siglo XX.

El aparato Van de Graaff Tandem es un ingenioso invento de R. J. Van de Graaff, quien fuera profesor del Instituto Tecnológico de Massachusetts hasta su muerte en 1967. En el tandem se carga de electricidad un cilindro metálico hueco encerrado en un recipiente metálico y rodeado de dióxido de carbono y de nitrógeno a presión. Una banda de algodón ahulada transporta mecánicamente electricidad a esta terminal hueca llamada "electrodo", del aparato. Este llega a cargarse hasta adquirir un potencial eléctrico positivo de 6 millones de volts. Los iones, primero negativos hasta el canal de despojo de la terminal, se convierten en positivos: para aprovechar una segunda vez el alto potencial de la terminal" (Fig. 1).

Describe brevemente los principales equipos complementarios del acelerador desarrollados para el Centro:

- a) Sistema de deflectores magnéticos diseñados y construidos por el Instituto de Física.
- b) La primera cámara de dispersión diseñada y construida en el Centro.
- c) El espectrógrafo de polarización diseñado en el Centro y parcialmente maquinado en el Instituto de Física.
- d) Dos espectrógrafos, el toroidal que sigue perteneciendo al Instituto de Física y el Q-absoluto que finalmente fue adquirido por el INEN.

El grupo inicial de físicos a cargo del desarrollo inicial de este laboratorio lo formaron: M. Mazari, G. López, J. Calvillo, R. Almanza, A. Martínez B. y R. Roos, todos elementos preparados profesionalmente en el Instituto de Física. Además se contó con la estrecha colaboración de M. E. Ortiz y A. Dacal del IFUNAM, durante la primera época de experimentación en el Centro, la mayor parte de las veces cubriendo los turnos nocturnos.

El maestro Graef termina su presentación hablando del propio personal del INEN y de la participación de otros profesionistas en el Centro Nuclear:

"El personal científico y técnico del acelerador del Centro Nuclear consiste de 5 físicos profesionales y de 6 técnicos. Esta dependencia cuenta además con un personal administrativo de 4 empleados, 3 de ellos oficiales de servicio.

El Dr. Alfonso Mondragón, asesor científico de la CNEN ha impartido cursos de física teórica al grupo de científicos y técnicos del acelerador en el Centro Nuclear. Esta actividad docente ha sido muy fecunda para preparar las labores de investigación que se realizarán en los laboratorios. Los miembros del programa de física teórica de la CNEN, encabezados por su director el Dr. Marcos Woshinsky, se reúnen semanalmente en el Centro Nuclear en un Seminario en el que se tratan temas relativos a la espectroscopía nuclear, como reacciones nucleares, polarización, etc. Este seminario es altamente estimulante para el personal científico y técnicos que trabajan en el acelerador Van de Graaff Tandem, que ha podido mantener de ese modo su contacto con la literatura especializada y con los desarrollos teóricos.

La Dirección del acelerador ha recibido ayuda de numerosos físicos extranjeros de Instituciones como MIT, la Universidad Rice, Laboratorio Nacional de Argonne, etc. Han estado colaborando en nuestros programas de investigación, científicos como Buechner, Phillips, Temmer, Enge, Sperduto, Ajzenberg, etc.

Recientemente desarrollaron tesis profesionales tres pasantes de Física del IPN.

El personal científico y técnico que trabaja en el Centro Nuclear está muy consciente del enorme esfuerzo económico que nuestro Gobierno ha realizado para construir los edificios y para dotar al Centro de instrumentos, aparatos de laboratorio y de máquinas de taller. Los investigadores, ingenieros y técnicos pondrán todo su entusiasmo para corresponder a ese esfuerzo, y

conquistar para México el lugar que nuestro país se merece entre los que realizan investigaciones científicas y tecnológicas en el campo de la física nuclear".

Estas notas reflejan el entusiasmo con el que se trabajaba en esa época y no puede decirse que en mejores condiciones o mayores oportunidades que las actuales.

Sin embargo es de asombrar en momentos críticos, la falta de apoyo de las autoridades ante acciones políticas que afectan a grupos tan sensibles y que tanto tiempo y esfuerzo requieren para formarse científicamente. Si bien en los últimos años se muestra una recuperación del grupo, la dispersión provocada en la primera época ha implicado un período árduo de preparación. El grupo requiere en la actualidad un decidido apoyo.

#### LABORATORIO VAN DE GRAAFF TANDEM 12 MeV (CNEN, INEN, ININ).

Con un poco más de detalle, los principales aspectos que se abrieron en la década mencionada en este laboratorio fueron:

- A) En lo referente al desarrollo de la instrumentación magnética para estudios de gran precisión.
  - a) Como ya se mencionó, la instrumentación completa, incluyendo la alimentación estable de alta corriente de los imanes, para el transporte, selección y enfoque del haz de proyectiles.
  - b) El montaje del estereo-espectrógrafo del IFUNAM para la realización principalmente de trabajo conjunto entre ambas instituciones.
  - c) Diseño y construcción del Espectrógrafo IV orientado a la investigación de reacciones con partículas po-

larizadas (Fig. 2).

- d) La adquisición y montaje del espectrógrafo Q-absoluto.
- B) En lo referente a la instrumentación estado sólido-electrónica.
- a) Diseño y construcción de una cámara general de blancos, dotada de discos rotatorios en su interior. (Fig. 3).
  - b) Diseño y construcción de una segunda cámara de blancos para experimentos de doble dispersión, necesarios para la exploración de características de interacción de partículas polarizadas.
  - c) Puesta en línea de módulos de equipo electrónico a interfases para la comunicación de señales con computadoras en la adquisición de datos.
  - d) Línea de bombardeo central, con el mínimo de masa, de dedicado a la producción de neutrones.
- C) En lo referente al propio acelerador tandem.
- a) Siguiendo el diseño proporcionado por el Profesor Sperry y E. Darden de la Universidad de Notre Dame, la construcción de una fuente de iones polarizados bajo la dirección de Marco Fernández.
  - b) La sustitución del intercambiador de carga del tipo gaseoso en la terminal del acelerador por una de películas delgadas de carbono.
- D) En lo referente a proyectos de experimentación.
- a) Calibración de la energía del acelerador empleando el método de umbrales de neutrones bajo la dirección de José Calvillo.

## 6.-

- b) Espectroscopía de los isótopos  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{110}\text{Cd}$  y  $^{112}\text{Cd}$  empleando el espectrógrafo IV, como temas de tesis de licenciatura de F. Aldape y D. Olmos bajo la dirección de M. Mazari.

Es una lástima que después de un período tan largo de preparación de este equipo desde su concepción hasta la puesta en marcha, no se haya empleado en estudios de polarización nuclear.

- c) Desarrollo de un detector direccional de neutrones; A. Varela continúa en la actualidad con la experimentación de neutrones empleando la técnica de la partícula asociada para la determinación absoluta de de sus intensidades.
- d) La principal línea de investigación de la estructura nuclear por este grupo ha sido desde un principio y sigue activa en la actualidad bajo la dirección de Ghirardo Murillo, el empleo de la técnica de los "estados isóbaros análogos". Se contó en un principio con el apoyo de Anthony Sperduto y más adelante y en forma permanente con el Profesor Sperry Darden, efectuando la exploración de las resonancias con el tandem de Salazar, y de los experimentos con iones polarizados en la Universidad de Notre Dame. Se incluye en la Fig. 4 un ejemplo de la reacción  $^{19}\text{F}(^{18}\text{O}+p)$  para mostrar el tipo de información que se obtiene mediante el uso de los diagramas de Argand para su interpretación teórica.

E) Necesidad de la interpretación teórica de la Información Experimental. Puesto que en esta área de la micro-estructura de la materia con una fuerte componente de mecánica cuántica, la interpretación de la información experimental requiere de un sólido conocimiento teórico a través de modelos y métodos de cómputo, es conveniente y necesaria la participación de personal con este tipo de formación científica. Durante la etapa de integración del grupo se impartieron durante varios años por el Profesor Alfonso Mondragón cursos de matemáticas, mecánica cuántica y física nuclear en Salazar. También el Profesor Darden impartió un curso extenso sobre física nuclear con énfasis en polarización nuclear durante sus estancia sabática en México.

a) Con este fin en el primer lustro de los años setenta, ya se había iniciado la formación de un grupo teórico encabezado por Juan Quintanilla, quien a su regreso de trabajo posdoctoral en MIT, había traído a México una serie de programas de cómputo, directamente utilizables en la interpretación de la información experimental. Desgraciadamente este grupo fue disuelto, pero ampliamente se recomienda la integración a corto plazo de un pequeño grupo teórico que participe de cerca con los investigadores experimentales.

b) Otro tipo de experimento orientado a entender mejor el mecanismo de interacción directa (DWBA) y por núcleo compuesto Hauser-Feshbach de reacciones nucleares.

8.-

res, lo constituyó el trabajo de tesis doctoral de Angel Dacal en el que con distribuciones angulares de reacciones (p.  $\alpha$ ) en isótopos de  $^{65}\text{Cu}$  se buscaba establecer la anchura promedio  $\Gamma$  íntimamente relacionada con su vida media de los estados compuestos en una región de la tabla periódica carente de información,  $60 < A < 70$ . Estas anchuras se compararon con las predicciones basadas en los modelos de Ericson y Brink-Stephen.

#### Referencias.

- 1) "Primera etapa de trabajo del grupo del acelerador Van de Graaff Tandem en el Centro Nuclear".  
Rev.Mex. Fis., 18, Supl. (1969).

## LA FÍSICA

CARLOS GRAEF FERNANDEZ

ACTUALMENTE estamos viviendo en México una época de vigoroso desarrollo en las ciencias exactas. Tanto acerca de la física como de las matemáticas se publican todos los años numerosos artículos originales que se leen, se citan y se comentan en centros científicos y en revistas especializadas del extranjero. Hay en el país varias instituciones dedicadas a la investigación y a la formación de profesores e investigadores en estas ramas de la ciencia. La intensa actividad actual en física y en matemáticas se inicia en la era posrevolucionaria. Empero, México no fue en el pasado un desierto cultural en lo que concierne a las ciencias exactas; desde la época prehispánica hubo en diversas ocasiones un auge en el cultivo de la física y las matemáticas.

El triunfo máximo de la ciencia mexicana prehispánica, fue el descubrimiento del número cero por los mayas. En la cultura de este pueblo se empleó el cero en su función posicional desde la época de las inscripciones, que se extienden desde el año 292 D.C. hasta 909 D.C. Los mayas se adelantaron en este aspecto en más de cinco siglos a las culturas del viejo mundo. Allí aparece el cero por primera vez en un documento hindú del año 876 D.C., en el cual se usó también en su función posicional. Los árabes lo adoptaron de fuentes de las Indias Orientales y lo llevaron a todas las tierras islámicas. Así llegó el cero a la España mora. En las culturas cristianas de Occidente aparece el cero por primera vez en el Códice Vigilanus, manuscrito elaborado en el monasterio de Abelda, en España, el año de 976 D.C.

Los mayas utilizaban el sistema de base 20 para escribir los números. El cero se representaba con la cabeza de un guerrero que oculta con una mano la parte inferior de su rostro. El método maya para representar los números era tan bueno como nuestro sistema decimal. El máximo número registrado documentalmente en la cultura maya es 12 899 781 y se encuentra en el Códice de Dresden.

Otra gran hazaña de las ciencias exactas prehispánicas es la construcción de un calendario tan perfecto como el gregoriano que se utiliza actualmente en casi todo el mundo. Cuando Hernán Cortés llegó a México en 1519 ya hacía siglos que se había establecido un calendario de origen maya que contenía las correcciones que todavía no se le hacían al calendario occidental. No fue sino hasta marzo de 1582 en que la mayor parte del mundo cristiano adoptó el calendario gregoriano. La fecha más antigua a la que hacen referencia los mayas se expresa en el calendario grego-

riano como 17 de septiembre del año 320 D.C. y está perpetuada y en la estela "g" de Vaxactun.

Durante los tres siglos de la Colonia hubo muy poca actividad en México en el campo de las ciencias exactas; esto se debe principalmente a la ausencia de España en la revolución científica la cual se inicia con Galileo en la segunda mitad del siglo xvi. No fue sino hasta el ocaso de la dominación española que aconteció un auge en la Nueva España en estas disciplinas. En los trescientos años de la Colonia hubo uno que otro destello científico sorprendente.

Si volvemos la mirada hacia las aplicaciones de la ciencia a la técnica descubrimos que en el campo de la tecnología minera se produjo en México un desarrollo importante. El año de 1554 llegó a la Nueva España el sevillano Bartolomé de Medina, quien trabajó en la Purísima Grande, hacienda de beneficio de los minerales de Pachuca. Allí estuvo realizando experimentos sobre la extracción de la plata contenida en las rocas, hasta que en 1557 encontró el método de patio, el cual utiliza la formación de la amalgama de plata al revolver el mineral molido con mercurio metálico; operación que se realizaba en los patios embaldosados de las haciendas de beneficio. Actualmente se explotan los minerales residuales de este proceso, acumulados desde el siglo xvi hasta el xix en los llamados "jales", para obtener mercurio y plata. En el siglo xvi se exportó la tecnología del método de patio al Perú y a otras partes del mundo. En el lenguaje contemporáneo: Bartolomé de Medina realizó investigaciones, y estimuló el desarrollo en la industria minera, y otras regiones del mundo importaron de México la tecnología obtenida. Esto ocurrió en el país hace cuatro siglos.

En la segunda mitad del siglo xvii vivió en la ciudad de México un genio universal que cultivaba con pasión múltiples disciplinas culturales: don Carlos de Sigüenza y Góngora, espíritu afín a los grandes hombres del Renacimiento italiano. Lo mismo escribió una *Historia del Imperio chichimeca* que un *Tratado sobre los eclipses del Sol* y otro sobre la Esfera (celeste). Tuvo, entre otros cargos, el de Cosmógrafo Mayor y Matemático de la Academia Mexicana y Catedrático de Astrología (entiéndase astronomía) y Matemáticas de la Real y Pontificia Universidad de México. En su obra astronómica titulada *Belerofonte Matemático acontra la Chime-ra Astrológica* sostiene Sigüenza que los cometas son un fenómeno natural, que están sometidos a las leyes del movimiento del universo y que no son mensajeros de desgracias y catástrofes. En ese mismo Tratado menciona la posibilidad de que las estrellas tengan sistemas planetarios semejantes al solar. Es curioso que no sea sino hasta nuestro siglo xx que los astrónomos hayan descubierto indicios de la existencia de cuerpos opacos -planetas- que forman sistemas gravitatorios con estrellas. En algunas estrellas binarias se observan movimientos que sólo se pueden explicar suponiendo la existencia de un planeta en la vecindad. Esto comprueba el atisbo genial de don Carlos de Sigüenza y Góngora. Este sabio varón mexicano fue contemporáneo y amigo de nuestra Décima Musa: Sor Jua-

na Inés de la Cruz. También don Carlos fue poeta y también Sor Juana mostró verdadero genio en las ciencias físicas. Su poema "Primero Sueño" expresa en bellísima forma literaria su pensamiento astronómico. En él muestra una cosmovisión totalmente científica, en la que el movimiento de los planetas y el juego de la luz del sol y de las sombras, sin ningún ornato mitológico, exhiben su belleza intrínseca.

De Sor Juana se conserva el recuerdo de una vivencia que señala que en México existieron personas geniales, quienes a pesar de que la Nueva España estaba al margen de las grandes corrientes culturales de Europa, fueron capaces de tener atisbos científicos reveladores. En el caso de Sor Juana se trata de una experiencia en la ciencia física. Unas niñas jugaban en un patio haciendo bailar un trompo; después de girar vertiginosamente un rato en torno de su eje con una posición vertical, la velocidad del trompo disminuye, su eje de rotación mismo se desplaza y el vértice del trompo traza en el suelo una curva que fascina a Sor Juana. Para estudiar con detalle esta línea, Sor Juana regó harina sobre la superficie tersa de las losas del suelo y bailó el trompo. Cuando éste perdió velocidad de rotación y su vértice se deslizó en el piso, trazo una línea que quedó plasmada en la harina. Nuestra Décima Musa se comportó con una actitud totalmente galileana. Ella razonaba como los genios que estaban creando la física en Europa en su siglo XVII; la obra en que Galileo expone su pensamiento sobre sus experimentos en la física *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nodue Scienze* se publicó en 1586 y la experiencia de Sor Juana ocurrió antes de que hubieran transcurrido 40 años de la publicación de esta obra.

En los últimos lustros de la época colonial hubo una intensa actividad científica en México. España vivía en esos años la era de la Ilustración; se respiraba una atmósfera de libertad de pensamiento para la ciencia, y en la Nueva España se reflejó esta actividad cultural. Siendo Virrey don Juan Vicente Güemes Pacheco de Padilla, segundo Conde de Revillagigedo, se fundó el Real Seminario de Minería el primero de enero de 1792. La actual Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México es la continuación directa de esa institución. El Real Seminario de Minería se instaló primero en los edificios del Hospicio de San Nicolás, que son actualmente los inmuebles que están en la calle de Guatemala, números 88, 90 y 92, en el primer cuadro de la ciudad de México. Dice el Dr. José Joaquín Izquierdo, que fue médico, fisiólogo e historiador de la ciencia, que el Real Seminario de Minería fue la primera casa de la ciencia en México. La institución merece ampliamente ese exaltado título en el campo de las ciencias exactas: en el Real Seminario de Minería se impartieron las primeras cátedras de física de Newton en México, en la Real y Pontificia Universidad se cultivó, durante la Colonia, la física de Aristóteles. El primer catedrático que expuso disciplinas físicas newtonianas en el Real Seminario de Minería fue don Francisco Antonio Batañer. Su curso de física se inició en 1793, y ese año lo dedicó a hidrostática e hidrodinámica. Presentó estas ramas de la ciencia como parte de la físi-

ca newtoniana. Bataller era un minero residente en México que había sido Maestro Interino del Colegio de San Isidro de Madrid. El primer texto de física que se utilizó fue la traducción al español de la obra francesa titulada *Elementos de Física Teórica y Experimental* de Sigaud de la Fond. La versión en castellano se publicó en Madrid en 1787. El profesor mexicano, don Antonio de León y Gama, impartió el año de 1794 el primer curso de mecánica de Newton en el Real Seminario de Minería. Don Antonio había sido catedrático de la Real y Pontificia Universidad de México.

El Real Seminario de Minería fue el centro en el que se inicia el cultivo de la física como disciplina científica rigurosa en México. En 1798 se instala el primer "laboratorio" de física con excelentes aparatos de demostración: una máquina de Atwood para estudiar las leyes de las caídas de los graves, un generador electrostático de Ramsden para producir altas tensiones eléctricas y un telescopio astronómico. Entre su personal académico hubo hombres de ciencia muy importantes. Su primer director fue el peninsular don Fausto Elhuyar quien en investigaciones realizadas en colaboración con su hermano Juan José descubrió en España, en el año de 1783, el elemento tungsteno. Entre los profesores que llegaron de España se encontraba don Andrés Manuel del Río, experto en mineralogía. Analizando unos minerales de las minas de Zimapán que ahora se localiza en el estado de Hidalgo. Del Río encontró un elemento nuevo que llamó pancromio y que rebautizó después con el nombre de "eritronio". Su descubrimiento se publicó en 1803 en Madrid, en una obra de don Ramón de la Cuadra titulada *Tablas Comparativas de todas las substancias metálicas*. Por una serie de circunstancias desafortunadas para México, el descubrimiento del nuevo elemento se atribuye oficialmente al científico sueco Sefstrom; lleva el nombre de Vanadio, por la diosa escandinava Vanadis. Sefstrom redescubrió el elemento en 1830.

Don Andrés Manuel del Río era súbdito español. Al consumarse nuestra Independencia optó por la nacionalidad mexicana y vivió en México hasta su muerte, acaecida en 1849. Durante su residencia en México en los años de 1803 y 1804, el ilustre hombre de ciencia alemán, el Barón Alejandro de Humboldt, fue profesor extraordinario de geología y examinador de mineralogía en el Real Seminario de Minería. En los salones de la calle de Guatemala construyó sus mapas y sus tablas de la Nueva España.

En 1813 se traslada el Real Seminario a su magnífica residencia, el Palacio de Minería, joya arquitectónica del neoclásico construida para albergar ese centro de la enseñanza de la ingeniería y de las ciencias exactas. El constructor de este magnífico edificio fue el arquitecto don Manuel Tolosa. Antes de su inauguración oficial en 1813 ya se habían instalado allí, desde 1811, algunas de las actividades del Real Seminario. En el Palacio de Minería nace el cultivo de la física y de las matemáticas como ciencias autónomas en la época posrevolucionaria. Estas disciplinas dejan de considerarse tan sólo como herramientas del ingeniero. Acuden cada vez más hombres de estudio deseosos de profundizar en las ciencias exactas y con la esperanza de poder realizar investigaciones. En ese palacio se crean los

Institutos de Física y de Matemáticas. También es en ese monumento nacional, en donde en la época posrevolucionaria, inician sus actividades los Departamentos de Física y de Matemáticas de lo que fue más tarde la Facultad de Ciencias. La física del siglo xx en México da sus primeros pasos en el Palacio de Minería.

El desarrollo de las ciencias exactas sufre en México vicisitudes muy graves durante el siglo xix. El 4 de octubre de 1833 el Vicepresidente de la República, don Valentín Gómez Farías, quien estaba encargado de la Presidencia debido a una licencia de la cual disfrutaba el presidente don Antonio López de Santa Anna clausura la Real y Pontificia Universidad de México. Las funciones de la Universidad se delegan en seis Establecimientos de Estudios Mayores. Uno de ellos es el de Ciencias Físicas y Matemáticas que es la continuación del Real Seminario de Minería, que no había formado parte de la Real y Pontificia Universidad. Este establecimiento de Estudios Mayores en Física y Matemáticas se aloja en el Palacio de Minería. La Universidad se reestablece brevemente durante el gobierno conservador de don Félix María Zuluaga. Tanto en los periodos en que estuvo abierta la máxima casa de estudios como en los que estuvo clausurada hubo una actividad docente continua en el Palacio de Minería. En el se formaron los ingenieros durante el primer siglo del México Independiente. Allí se hacían los estudios de física más elevados que se exponían en nuestro país. El establecimiento de Estudios Mayores en Física y Matemáticas perdió su nombre al promulgarse la Ley Orgánica de Instrucción Pública del D.F., el 2 de diciembre de 1867, durante el gobierno del presidente don Benito Juárez. La institución resurge con el nombre de "Escuela de Ingeniería"; con esa designación llega hasta 1910, al final del régimen del presidente Porfirio Díaz. En ese año cobra nueva vida la Universidad, que había estado cerrada varias décadas. Nace la actual Universidad Nacional de México, aunque todavía no es autónoma. Las ciencias exactas se cultivan en la nueva máxima casa de estudios en la Escuela de Ingenieros y en la Escuela de Altos Estudios.

En el campo de las ciencias físico-matemáticas ocurre un acontecimiento notable en 1863: se crea el Observatorio Astronómico Nacional, que inicia sus labores en una torre del Castillo de Chapultepec con aparatos que estaban instalados en la azotea del Palacio Nacional. Veinte años después, en 1883, el Observatorio Astronómico Nacional se traslada a un edificio construido *ad hoc* en Tacubaya, en donde estuvo instalado durante varias décadas.

Se había previsto que en la nueva Escuela de Altos Estudios de la recientemente reabierta Universidad se cursaran las carreras de físico y de matemáticas, sin embargo, nunca llegó a realizarse este ideal. Se impartieron empero dos cursos de física durante los primeros años de la Revolución. De 1912 a 1914 el ingeniero don Valentín Gama sustentó una cátedra titulada "Curso Teórico de Física" y, el ingeniero don Joaquín Gallo otra que se llamó "Curso Práctico de Física".

En lo más intenso de nuestra guerra civil, en los años de 1914 a 1920,

la Universidad Nacional se convirtió en el Departamento Universitario de Bellas Artes, en aquella época dependencia del gobierno del Distrito Federal. Al terminar la lucha armada, en 1920, resurge la Universidad Nacional, siendo su primer rector el Lic. José Vasconcelos. Al año de desempeñar funciones en la rectoría renuncia, para desempeñar las de Secretario de Educación Pública. Es designado Rector de la Universidad el distinguido filósofo don Antonio Caso. El lema que José Vasconcelos legó a nuestra Universidad: "Por mi raza hablará el espíritu", expresa la fe que —al triunfo de la Revolución— tenían los pensadores mexicanos en el destino cultural. Este lema se diría en México y lo dirían hombres de la raza cósmica que habita este país.

Con la victoria de la Revolución sigue una gran época de creaciones culturales que se inicia en el arte. En el campo de la pintura acontece una profunda revolución en México, al surgir un grandioso movimiento: el muralismo mexicano. Aparece como una explosión luminosa en el foro mundial de la cultura. Su existencia se debe principalmente a tres genios mexicanos: Diego Rivera, José Clemente Orozco y David Alfaro Siqueiros. Los tres tenían una excelente preparación como pintores, adquirida principalmente en México y complementada más tarde en el extranjero. Quiso el destino que al triunfo de la Revolución fuese Secretario de Educación José Vasconcelos, hombre genial que supo aquilatar el valor de nuestros tres grandes pintores. Él los invitó a plasmar sus murales en las paredes de la Secretaría de Educación Pública, de la Universidad y del Palacio Nacional. Inspirados por los ideales de nuestra Revolución crearon estos hombres obras que conmovieron al mundo. El muralismo mexicano nos colocó en la cima de la creación plástica mundial.

Este triunfo cultural de México creó un ambiente de optimismo en todos los campos de actividad intelectual y una fe entusiasta en la capacidad creativa del mexicano. En las ciencias exactas tuvo una especial influencia la repercusión que en la ingeniería causó la ola de entusiasmo contagioso iniciada por el muralismo. En esa época se cultivaban en nuestro país las ciencias exactas principalmente en la Escuela Nacional de Ingenieros de la Universidad Nacional que tenía por residencia el Palacio de Minería. La creación de las carreras de Físico y de Matemático se realizó en ese grandioso monumento neoclásico. Los creadores fueron profesores de la Escuela Nacional de Ingenieros.

El optimismo cultural desatado por el muralismo se manifestó en la ingeniería como una fe en la capacidad técnica del mexicano. Cuando inicia sus actividades la Comisión Nacional de Caminos en 1925, durante el régimen del presidente General Plutarco Elías Calles, se construyeron las tres carreteras: México-Puebla, México-Cuernavaca y México-Toluca, por una compañía extranjera. En la década de 1930-1940 ingenieros mexicanos dirigen la construcción de nuestros caminos. Lo mismo ocurrió con las presas, los puentes, las grandes estructuras y con la cimentación de todas las obras. A los pocos años del triunfo de la Revolución, nuestra ingeniería civil podía emprender la construcción de obras de cualquier mag-

nitud. Los hombres que crearon los centros en los que se cultivan actualmente la física y las matemáticas eran profesores de estas disciplinas en la Escuela Nacional de Ingenieros. Lo que ocurrió en el campo de la ingeniería en México se reflejaba de un modo natural en las ciencias exactas.

El año de 1924 es el último en que el licenciado José Vasconcelos está al frente de la Secretaría de Educación Pública. Don Ezequiel Chávez es rector de la Universidad Nacional. Ese año nuestra máxima casa de estudios sufre un cambio profundo: la Escuela de Altos Estudios se convierte en Facultad de Filosofía y Letras. Se designa Director de la nueva institución al eminente filósofo don Antonio Caso. Tenía este ilustre pensador la ilusión que en la recientemente fundada Facultad se formarían, además de los humanistas, los científicos. Había el antecedente de que en la Escuela de Altos Estudios se habían impartido cátedras en distintas ramas de la ciencia. En el campo de las ciencias exactas se invitó a profesores de la Escuela Nacional de Ingenieros a formar parte del personal docente de la Facultad de Filosofía y Letras. Sotero Prieto, Alfonso Nápoles Gándara, Mariano Hernández Barrenechea impartieron curso, en la nueva Facultad. Aunque nunca se formaron allí físicos o matemáticos profesionales, las cátedras difundieron expresiones superiores de estas ramas de la ciencia a un auditorio selecto.

El año de 1929 se desencadena un movimiento revolucionario universitario que manifiesta inquietudes y preocupaciones de años. El malestar que se sentía en el mundo académico no encontró inmediatamente su formulación en un programa de acción. Pero al transcurrir el tiempo, orientado por magníficos ideólogos y oradores carismáticos, se perfiló como solución de los problemas universitarios la autonomía de la Universidad Nacional de México. Se pensó, con razón, que la Universidad debería tener capacidad para gobernar y dictar las normas internas de su vida en el marco jurídico del Estado —en palabras de Antonio Caso. La libertad de cátedra y la independencia ideológica implícitas en la autonomía son condiciones indispensables para una vigorosa actividad creativa de valores culturales. La autonomía encuentra su expresión legal en la Ley Orgánica de la Universidad Nacional Autónoma de 1929; esta ley se expide el 10 de julio de 1929. Desde entonces es la Universidad Nacional Autónoma de México.

El amor por las ciencias exactas se convirtió en una desbordante pasión en algunos maestros de la Facultad de Ingeniería en la que se había transformado la Escuela Nacional de Ingenieros de la Universidad. Más que transmisores de información fueron inspiradores que contagiaron a varios de sus discípulos de su ferviente amor a la ciencia. Sotero Prieto, que con su claridad meridiana y con su dominio magistral de las matemáticas era entonces la figura máxima en este campo en México, y Alfonso Nápoles Gándara que acababa de regresar al país después de hacer estudios de especialización en matemáticas superiores en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, invitaron a profesores y alumnos amantes de las

ciencias físicas y matemáticas a un seminario dedicado a estas disciplinas. Alfonso Nápoles Gándara fue el primer mexicano que obtuvo una beca de la Fundación John Simon Guggenheim para hacer estudios superiores de matemáticas en el extranjero. Al realizar su especialización en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, E.U., se empezó a romper el aislamiento científico en el que habíamos vivido en México. Nápoles Gándara trajo a nuestro país disciplinas matemáticas que no se habían cultivado nunca en nuestros centros de estudios superiores. Él difundió esos conocimientos en cátedras y en conferencias comunicando su entusiasmo por la ciencia a sus discípulos. El seminario creado por Sotero Prieto y Alfonso Nápoles Gándara se reunía todos los viernes en la Academia Nacional de Ciencias "Antonio Alzate" de las seis de la tarde a las ocho de la noche. Asistían a las sesiones profesores y alumnos apasionados por las ciencias exactas. Este grupo científico inició sus labores en 1932. Algunos profesores entusiastas asistían asiduamente y dirigían y orientaban las actividades del seminario. Presidía las reuniones don Sotero Prieto, respetado por todos como "el Maestro". Animaban las discusiones Don Alfonso Nápoles Gándara, don Mariano Hernández Barrenechea y don Ricardo Toscano. Todos ellos profesores de la Facultad de Ingeniería. Entre los alumnos que asistíamos atraídos por una fuerza poderosa que ejercían sobre nosotros los aspectos desconocidos de las ciencias exactas que allí se revelaban, estábamos, Rita y Sarita López de Llergo, Alberto Barajas, Ernesto Rivera, Bruno Mascanzoni, Miguel Urquijo Mercado y Carlos Graef Fernández. Nuestro seminario era el primer intento organizado para rebasar en ciencias lo que se enseñaba en las carreras de ingeniería. Sus reuniones avivaron en nosotros nuestra pasión por las matemáticas y por la física; en esa época del renacimiento científico de México en las ciencias exactas, llamábamos "Seminario" a un foro de una miscelánea de temas. Me imagino a un grupo de asombrados que con una lámpara poderosa se encuentran en una noche oscura frente a un castillo maravilloso. La luz se enciende por unos instantes en intervalos irregulares e ilumina distintas partes del monumento. Los asombrados adivinan, admirados, una edificación plena de magia.

En una ocasión presentó don Alfonso Nápoles Gándara aspectos de la conjetura de los cuatro colores. Esto dio motivo a que don Sotero Prieto nos expusiera otros aspectos, varias sesiones del Seminario se dedicaron a este tema topológico. Apenas hace unos cuantos meses se demostró la conjetura, después de más de 30 años y sólo con el auxilio de una poderosa computadora electrónica. Don Sotero Prieto nos expuso en forma brillante fragmentos de la teoría de la extensión de Grassmann; lo vimos multiplicar puntos de espacios multidimensionales y representar movimientos de sólidos en el espacio, por tornillos grassmanianos. Don Alfonso Nápoles Gándara contagió su entusiasmo por los tensores a varios seminaristas. Don Ricardo Toscano nos interesó en tableros de ajedrez de forma arbitraria que pueden llenarse con saltos de caballo a partir de una casilla. Se trató el tema del planímetro de hachita que, a pesar de su sim-

plicidad, mide áreas definidas por curvas simplemente conexas. Nabor Carrillo quien años más tarde sería rector de nuestra máxima casa de estudios, nos presentó una aproximación muy fiel del campo gravitatorio de la Tierra con un anillo circular con una distribución de masa lineal uniforme. Miguel Urquijo Mercado nos sorprendió mostrando unas curvas planas que son sus propias evolutas, Carlos Graef Fernández exhibió una generalización de los números complejos bidimensionales que, después descubrimos, son los números dobles de Clifford. Estos ejemplos muestran cuales eran las inquietudes en el campo de la física y las matemáticas en la primera mitad de la década de 1930 y 1940 con el mundo científico mexicano.

El Seminario de Física y Matemáticas fue mucho más que un foro en el que se mostraban aspectos interesantes de estas disciplinas. Hasta entonces México había estado al margen del desarrollo mundial en física y matemáticas. No sólo no habíamos participado en la creación de ese movimiento, sino que no estábamos informados con detalle de lo que ocurría en Europa y en E.U. El seminario abrió una ventaja al mundo de la ciencia y ofreció una tribuna para presentar las inquietudes sobre física y matemáticas en el extranjero. El año de 1934 el Maestro Don Alfonso Nápoles Gándara logró que la Secretaría de Educación Pública invitara al Profesor Dirk J. Struik a venir a México para sustentar conferencias de matemáticas superiores. El Profesor Struik nació en Holanda y contribuyó a desarrollar el cálculo tensorial. Fue durante muchos años profesor de geometría diferencial y cálculo tensorial en el Instituto Tecnológico de Massachusetts en Cambridge, E.U. Durante su residencia en México tuvo una oficina en la Academia Nacional de Ciencias "Antonio Alzate". Su actividad en nuestro país estuvo íntimamente ligada con el Seminario de física y Matemáticas. Struik presentó en sus conferencias en forma brillante, clara y llena de sugerencias el Programa de Erlangen del matemático alemán Felix Klein. Nos deslumbró ver como el concepto de "grupo", nacido de la teoría de las ecuaciones algebraicas, daba unidad y orden al aparente caos de los innumerables teoremas geométricos. Otro paisaje matemático que Struik hizo aparecer en el escenario fue el de la geometría diferencial en grande. Dibujó la curva que encierra al área mínima en lo que un segmento de recta puede realizar una vuelta completa sin salirse del recinto. Aprendimos cómo investigar las propiedades globales de las superficies. Por primera vez llegaban a México vientos preñados con información sobre la matemática contemporánea que se cultivaba en el extranjero.

Otro hombre de ciencia que nos presentó en el seminario las maravillosas construcciones científicas que se estaban forjando en el extranjero fue el físico mexicano don Manuel Sandoval Vallarta. El era catedrático de física de altas energías en el Instituto Tecnológico de Massachusetts. Las vacaciones de verano las pasaba en México. Cuando se encontraba en nuestra capital visitaba el Seminario de Física y Matemáticas. A él le oímos mencionar por vez primera los espinores. Presentó las ecuaciones del cam-

po electromagnético y su cuantización. Nos asombraba su dominio en el panorama de la ciencia universal.

En el lustro de 1931 a 1935 la docencia en ciencias exactas en un nivel superior se realizaba en la Facultad de Ingeniería y en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional Autónoma de México. Esas cátedras son el antecedente inmediato de la Facultad de Ciencias. Don Sotero Prieto impartió unos cursos de la física contemporánea. En 1933 estableció la teoría de la radiación cósmica primaria en colaboración con E. Lemaître de la Universidad de Lorainá en Bélgica. Esta teoría tuvo resonancia mundial y es la explicación aceptada en la actualidad de ese fenómeno físico. Sandoval Vallarta era un científico de talla internacional. En el seminario nos llenaba de orgullo el que un científico mexicano tuviera esa posición destacada sobre Mecánica Analítica, sobre Cálculo de variaciones y sobre Historia de las Matemáticas en la Facultad de Filosofía y Letras. Cada clase de don Sotero era una joya de presentación científica que inspiraba a los alumnos y los entusiasmaba a seguir profundizando en las ciencias exactas, don Alfonso Nápoles Gándara sustentó cátedras sobre Cálculo Avanzado, Geometría Diferencial y Cálculo Tensorial; don Valentín Gama expuso el Cálculo de Probabilidades, don Mariano Hernández Barrenechea presentó la Mecánica de Fluidos y el Doctor Alfredo Baños dio el curso sobre Física Teórica. Todas estas clases se impartieron en la Facultad de Filosofía y Letras. Los cursos que se sustentaron en esos años en la Facultad de Ingeniería sobre ciencias exactas cristalizaron, primero en la carrera de físico-matemático, y después en las dos carreras separadas de físico y matemático. La historia de las instituciones de docencia que precedieron a la Facultad de Ciencias es muy agitada. El año de 1934 el rector don Manuel Gómez Morín le da una nueva estructura a la Universidad. Se crea la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas que agrupa en una institución lo que antes eran la Facultad de Ingeniería y la Facultad de Ciencias Químicas. Esta facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas tiene una sección de Física y una sección de Matemáticas que ofrecen la carrera de Físico-Matemático. En el año de 1935, siendo Rector de la Universidad Nacional Autónoma el licenciado Chico Goerne, cambia una vez más la estructura de nuestra Máxima Casa de Estudios. La Facultad de Ciencias Químicas se separa de la Facultad de Ingeniería; deja de existir la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Las antiguas secciones de Física y Matemática de esta última institución se convierten en los departamentos de Física y Matemáticas de la Facultad de Ingeniería en los que se sigue ofreciendo la carrera de Físico-matemático. Ese mismo año fallece don Sotero Prieto. Estos departamentos de Física y de Matemáticas son el núcleo de la Escuela Nacional de Ciencias Físicas y Matemáticas que se crea en la Universidad en el año de 1937 y que tiene cuatro departamentos: Física, Matemáticas, Química y Geología. Se designó director de la nueva Escuela al ingeniero don Ricardo Monges López. En vez de la carrera de Físico-matemático que se cursaba en los departamentos de Física y de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería, el nuevo plantel

ofrece dos carreras: la de físico y la de matemático que este año de 1987 cumplen medio siglo de existir en México.

En 1939 se crea la Facultad de Ciencias la cual tiene por núcleo la Escuela Nacional de Ciencias Físicas y Matemáticas y a la que se le adiciona un departamento de Biología que es más antiguo que los otros y que tiene una historia muy distinta. Esa Facultad de Ciencias es la que ha tenido un vigoroso desarrollo y la que lleva con orgullo ese nombre en nuestra Universidad Nacional Autónoma de México. Con cursos atractivos, brillantemente expuestos, las instituciones ancestros de la actual Facultad de Ciencias capturaron alumnos que originalmente deseaban estudiar ingeniería. Don Sotero Prieto ofreció unos cursos magistrales de Álgebra Superior y de Funciones Analíticas. Era un deleite especial oírlo disertar sobre la función de Weierstrass. Don Alfonso Nápoles Gándara exponía Geometría Diferencial y Cálculo Avanzado; el maestro Jorge Quijano disertaba sobre la Geometría Proyectiva. El doctor Alfredo Baños exponía. El ingeniero Carlos Martínez Becerril dictó una cátedra de Ecuaciones Diferenciales; a algunos alumnos se les dio la oportunidad de sustentar alguna materia del primer año; Carlos Graef Fernández disertó sobre Geometría Moderna.

El progreso que ha habido en México en la enseñanza de la Física, desde que terminó la lucha armada de la Revolución en 1920 hasta la fecha (1987), ha sido vertiginoso. De dos materias que se exponían además de las de los planes de estudio de las carreras de ingeniería, se ofrecen ahora cursos superiores en gran número de disciplinas físicas. En las dos primeras décadas de este desarrollo impartían las cátedras ingenieros, apasionados de la ciencia que no tenían una formación sistemática de físicos. Con esfuerzos heroicos y gran entusiasmo exponían sus cursos, contagiando su pasión por la ciencia a los alumnos. Actualmente cada materia la presenta un físico especializado en esa disciplina. Muchos de los profesores tienen doctorado en física de alguna institución europea o estadounidense. Actualmente se puede estudiar la carrera de Físico, además de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, en el Instituto Politécnico Nacional, en la Universidad Autónoma Metropolitana y en varias Universidades de los estados. En 1960 se fundó la Escuela Superior de Física y Matemáticas y el Instituto Politécnico Nacional que ofrece la carrera de Físico-matemático. Catorce años después, en 1974 empezó a funcionar la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana en donde se forman físicos, químicos, matemáticos y biólogos, además de ingenieros. En la ciudad de México existe la carrera de Ingeniero Físico en la Universidad Iberoamericana.

Varias universidades de los estados han establecido la carrera de Físico: ésta se ofrece por ejemplo en Guanajuato, en Puebla, en San Luis Potosí, en Jalisco, en Sonora y en la Universidad Nicolaita de Michoacán.

Todos los centros de estudios mayores en México en los que se forman

profesores de física superior e investigadores en esta disciplina laboran para incrementar el tesoro más valioso que tiene nuestro país, que es el acervo de sus hombres preparados. No son los bienes materiales los que engrandecen a una nación; son estos hombres que con su calidad y cantidad constituyen la capacidad de progreso y de recuperación de un país. Al finalizar nuestra Revolución no se formaban en la República ni profesores de física superior ni tampoco investigadores en esa rama de la ciencia. Ahora se lanzan anualmente decenas de profesores e investigadores de física al foro de los acontecimientos nacionales.

En los países desarrollados de Europa y en los Estados Unidos realizan investigaciones en física los departamentos docentes de las Universidades e Institutos Tecnológicos. La labor la realizan los profesores de esas dependencias. Naturalmente se hace en esos países investigación en física en otros centros, como en los departamentos de Investigación y Desarrollo de las Industrias, como en institutos gubernamentales y como en establecimientos creados especialmente para ese propósito. Debido a que nuestra Universidad Nacional Autónoma está orientada a impartir enseñanza a centenares de miles de estudiantes, necesita para ello varios miles de profesores, la mayor parte de los cuales no son de tiempo completo. Con este tipo de personal docente no es posible exigir que cada maestro sea además un investigador. Por esta razón se lleva a cabo la investigación científica, en una forma especial, adecuada a nuestras circunstancias. En el campo de la física se realizan investigaciones principalmente en los Institutos de Física, de Geofísica, de Astronomía y en los Centros de Estudios Nucleares, de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Sistemas, de Instrumentos y de Investigación en Materiales. Desde hace apenas unos cuantos años, algunos profesores de la Facultad de Ciencias realizan investigaciones en física en ese centro docente.

La Universidad Nacional Autónoma tiene fuera de la Ciudad de México establecimientos que llevan a cabo investigaciones científicas en física y en disciplinas internamente relacionadas con esta ciencia, como la astrofísica y la oceanografía. Existen instalaciones de este tipo en Ensenada, Baja California Norte, en Cuernavaca, Morelos, y en Guanajuato, Guanajuato.

Hay varios centros importantes fuera de la UNAM que realizan investigaciones en física. En la Universidad Autónoma Metropolitana se lleva a cabo esta labor en los departamentos de Física o siguiendo el modelo de los centros de los países desarrollados realizan esta tarea los profesores de tiempo completo que son la inmensa mayoría del personal académico. La Universidad Autónoma Metropolitana cuenta con un excelente grupo de investigadores y científicos en física que está produciendo investigaciones de la más alta calidad.

En el Instituto Politécnico Nacional hay varias dependencias que desarrollan investigaciones en física. El Centro de Investigación y de Estudios Avanzados y la Escuela Superior de Física y Matemáticas de ese Instituto tienen personal académico dedicado a esa actividad.

En provincia se realizan investigaciones en física en las Universidades de Guanajuato, Puebla, San Luis Potosí y Yucatán. En este último estado hay otro Centro de Investigación Científica además del universitario: el del Instituto Tecnológico de Mérida, que también se dedica a este tipo de investigación.

Una parte muy importante de la investigación científica en las Ciencias Físicas en el mundo se lleva a cabo en los departamentos de investigación y desarrollo de las industrias de los países desarrollados. En los países en desarrollo que han alcanzado un nivel semejante al nuestro comienzan las investigaciones en física en las industrias más importantes. En México se llevan a cabo estas investigaciones en el Instituto Mexicano del Petróleo, en el Instituto de Investigaciones Eléctricas de la Comisión Federal de Electricidad y en el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares de la Secretaría de Energía, Minas e Industria Paraestatal. Todos estos centros equivalen a departamentos de investigación y desarrollo de las grandes industrias paraestatales.

El cambio acontecido en México desde la época prerrevolucionaria en el campo de la investigación en física ha sido radical. Antes de la Revolución no existía ésta en nuestro país. En los primeros años después de la Revolución se crean las condiciones que hacen posible la investigación científica en este campo. Después siguen años de una actividad vertiginosamente creciente en la investigación física.

La investigación en física experimental requiere de laboratorios, y en ocasiones de aparatos muy costosos, o de talleres con la capacidad necesaria para construirlos. Por eso es natural que en un país en desarrollo este tipo de investigación experimental vaya a la zaga de lo que se realiza en física teórica. Con gran esfuerzo y con derroche de ingenio han logrado, los que se dedican a esta actividad en México, establecer centros de investigación lo cual es índice de la evolución de la física experimental en nuestro medio.

Cuando se fundó el Instituto de Física en 1939 se instaló en el Observatorio meteorológico que había en el Palacio de Minería, un telescopio de Rayos Cósmicos para medir la intensidad de esta radiación en diferentes azimutes y diferentes ángulos cenitales. Fue por iniciativa del Dr. Manuel Sandoval Vallarta que se inició esta investigación en física experimental. Este telescopio tuvo el mérito de haber sido construido totalmente en México; fue el primer aparato con el que se hizo investigación en física en nuestro país. El año de 1947 era rector de nuestra máxima casa de estudios el Doctor Salvador Subirán. La pobreza de los equipos de laboratorios y la falta de fondos para adquirir libros y revistas para las bibliotecas de la Universidad le preocupaban profundamente. Organizó una campaña para reunir fondos para remediar en lo que fuera posible esta situación. Se fijó la meta de reunir diez millones de pesos; la campaña llevó como nombre "la campaña de los diez millones". En 1947 esa cantidad era muy considerable. El Instituto de Física recibió sesenta mil pesos de los fondos recabados, con los que adquirió un aparato de difracción de rayos X. Con

el se investigaron las redes cristalográficas de algunos minerales mexicanos y la composición de numerosas arcillas.

En 1950 se produce un cambio brusco en el esfuerzo económico que estaba dispuesto a hacer México para el desarrollo de la investigación en física experimental: se adquiere en los E.U. un acelerador electrostático de partículas del tipo de Van de Graaff para el Instituto de Física. Ese año se inicia la construcción de Ciudad Universitaria. Se construye un pabellón para alojar ese aparato al pie de la Torre en que se albergarían inicialmente los institutos de la investigación científica. El aparato produce una tensión eléctrica entre su electrodo y la Tierra de dos millones de voltios. La energía de las partículas proyectiles del acelerador es de dos millones de electrones volt, cuando éstas son protones. El costo del Van de Graaff fue de un millón de pesos de aquella época. Con este aparato se hicieron investigaciones sobre reacciones nucleares y sobre secciones transversales a los neutrones. La gran importancia que tuvo este primer acelerador de partículas fue que en torno de él se formaron físicos experimentales. Estos científicos demostraron su capacidad y conocimientos construyendo excelente equipo auxiliar. Ahora los científicos mexicanos manejan los altos vacíos de la física experimental y saben diseñar aparatos de investigación muy complejos. En la instalación del Van de Graaff y en los proyectos de investigación en los que se utilizó, se contó con la ayuda desinteresada del inventor mismo, el doctor Van de Graaff, y de los físicos doctor William Buechner y doctor Sparduto; todos ellos investigadores estadounidenses del Instituto Tecnológico de Massachusetts. El aparato todavía funciona en el Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. En este centro se instaló en 1963 un acelerador de partículas del tipo Dinamitrón que los E.U. donaron a nuestro país.

El año de 1964 se colocó la primera piedra del Centro Nuclear de México de la entonces Comisión Nacional de Energía Nuclear en Salazar, Estado de México. El Centro se inauguró en 1970. Allí se instalaron un acelerador de partículas del tipo Tandem Van de Graaff, que comunica a sus proyectiles una energía de doce millones de electrones-volt y un reactor nuclear experimental de una potencia de un megawatio en el régimen establecido, ambos aparatos se utilizan en investigaciones nucleares. El equipo para realizar investigaciones en física experimental aumentaba explosivamente al pasar el tiempo.

El último avance en este camino fue el donativo que hizo el Instituto Rice de Houston, Texas, E.U. al Instituto de Física, de un acelerador de partículas tipo Van de Graaff que comunica a sus proyectiles una energía de cinco millones de electrones-volt. México ha aumentado su acervo de equipo poderoso de laboratorio de manera rápida. Simultáneamente con estas adquisiciones ha crecido nuestra capacidad de construir aparatos de física experimental en los talleres de los centros de investigación. El Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México y el Centro Nuclear de México en Salazar, tienen excelentes talleres en los que se pueden construir toda clase de aparatos. Para el desarrollo de la cien-

cia en México es de capital importancia la capacidad de construir en el país los aparatos que los investigadores inventen en el curso de sus trabajos.

El contacto con científicos extranjeros ha sido muy estimulante para el progreso de la ciencia en México. Después de los primeros encuentros en la década de 1930-1940 se buscan sistemáticamente las oportunidades de intercambiar ideas. El año de 1942 se inaugura el Observatorio Astrofísico de Tonanzintla en el estado de Puebla. Para hacer resaltar este acontecimiento se celebra un Congreso Científico en Puebla; entre los asistentes a esta reunión se encuentra el matemático estadounidense George David Birkhoff, quien expone su teoría de la gravitación en esa ocasión. Dos científicos mexicanos se entusiasman con las ideas de Birkhoff e inician investigaciones para obtener las consecuencias de su teoría. Se trata de los doctores Alberto Barajas y Carlos Graef Fernández. Otro científico estadounidense que acudió a Puebla al Congreso fue el doctor Jesse W. Beams, el inventor de las ultracentrífugas de suspensión magnética. En el Centro Nuclear de México en Salazar hay un laboratorio que cuenta con varias ultracentrífugas del tipo Beams, en el Instituto de Física, el doctor Fernando Alba ha construido centrífugas en las que interviene la suspensión magnética de Beams.

En el año de 1943 se funda la Sociedad Matemática Mexicana. Los físicos publican durante 8 años sus trabajos de investigación en el Boletín de esa sociedad y los presentan en los Congresos y Asambleas que ésta celebra. En 1950 la Sociedad estadounidense de Física (American Physical Society) realiza su asamblea anual en la Ciudad de México. Varios miembros mexicanos de esa Sociedad presentan trabajos de investigación en la Asamblea de 1950, ese mismo año, el 15 de agosto, se funda, en el Palacio de Minería, la Sociedad Mexicana de Física. Cuenta con 157 socios titulares y 7 miembros estudiantes. La Sociedad Mexicana de Física tuvo una preocupación: la Sociedad Mexicana de Ciencias Físicas, que solamente funcionó unos meses del año de 1943.

La Sociedad Mexicana de Física celebró Asambleas Conjuntas con la Sociedad Estadunidense de Física y con la Sociedad Canadiense de Física. Estas asambleas conjuntas se reunieron en 1955 en la Ciudad de México, en 1961 también en la Ciudad de México y en 1963 en Houston, Texas, en los Estados Unidos.

En los últimos años ha habido numerosos contactos con físicos estadounidenses. Con los físicos europeos y japoneses también ha habido oportunidad de intercambiar ideas. Desde la década 1940 a 1950 colaboraron en el Instituto de Física los científicos españoles refugiados, don Blas Cabrera, que había sido director del Instituto de Física y de Matemáticas de Madrid y don Pedro Carrasco, que había sido director del Observatorio Astronómico de Madrid.

El cultivo de la física es indispensable para entender el universo que nos rodea. El mundo material es un caos que se convierte en un cosmos armonioso, regido por leyes para el que sabe física. Sin esta ciencia nues-

tra cosmovisión es incompleta. El lugar que el hombre ocupa en el universo nos lo revela la física. En las simetrías matemáticas de la materia que la física nos manifiesta hay rasgos de una belleza extraordinaria ¡No hay cultura sin física!

Además de su valor cultural y estético es la física la base de la técnica que da al hombre su dominio sobre el mundo material. Sin física no hay tecnología. Los países subdesarrollados sólo pueden superar esta etapa si desarrollan una física vigorosa para construir sobre ella una tecnología propia. Hay que realizar un esfuerzo gigantesco para vencer el abismo que hay entre nuestra incipiente tecnología y la de los países desarrollados. La ciencia física es un todo que debe cultivarse y cuidarse para que crezca, para que se fortalezca y nos recompense con una tecnología propia que acelere nuestro desarrollo.



CURRICULUM VITAE



---

Carlos Graef Fernández nació en Guanaceví, Durango, el 25 de febrero de 1911; hijo de Carlos Graef Ziehl y Gudelia Fernández Espinosa. Casó con Alicia Sánchez Castell en 1938. Falleció en la Ciudad de México el 13 de enero de 1988.

#### *Estudios*

Colegio Alemán de México (1922-1928)

Escuela Técnica Superior, Darmstadt, Alemania (1929-1930)

Escuela Nacional de Ingenieros, Universidad Nacional Autónoma de México (1931-1933)

Escuela Nacional de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México (1934-1937)

Massachusetts Institute of Technology, EUA (1937-1940) doctorado en ciencias, como becario de la Fundación John Simon Guggenheim en Boston, EUA

#### *Puestos académicos y docentes*

Profesor titular en la Escuela Superior de Construcción, Secretaría de Educación Pública (1934-1937)

Profesor titular en el Departamento de Física y Matemáticas y en la Escuela Nacional de Ingenieros, Universidad Nacional Autónoma de México (1934-1937)

Profesor titular de Física en la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (1941-1988)

Investigador titular del Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México (1945-1976)

#### *Cargos desempeñados*

Subdirector (fundador) del Observatorio Astronómico de Tonantzintla, Puebla (1941-1944)

Vicepresidente (fundador) de la Sociedad Matemática Mexicana (1943)

Director del Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México (1945-1957)

Presidente (fundador) de la Sociedad Mexicana de Física (1951-1964)

Director General de Enseñanza Superior e Investigación Científica, Secretaría de Educación Pública (1952-1954)

Vicepresidente de la Sociedad Científica Antonio Alzate (1952)

Presidente del Seminario de Cultura Mexicana (1952-1953)

Director de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (1957-1959)

Miembro del Consejo Consultivo de la Comisión Nacional de Energía Nuclear (1956-1962)

Gobernador representante de México en la Junta de Gobernadores del Organismo Internacional de la Energía Atómica, Viena, Austria (1960-1961)

Asesor Científico Coordinador de la Comisión Nacional de Energía Nuclear (1962-1965)

Vocal Físico del Instituto Nacional de la Investigación Científica (1962-1970)

Director General del Centro Nuclear de México (1965-1970)

Consejero General del Instituto Nacional de Energía Nuclear (1971-1977)

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa (1974-1976)

Coordinador General del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (1977-1978)

Coordinador General de Uranio Mexicano (1979-1980)

Gerente del Ciclo de Combustible de Uranio Mexicano (1980-1983)

#### *Cargos honoríficos*

Profesor invitado en el Departamento de Astronomía, Universidad de Harvard, Boston, EUA (1944-1945)

Miembro del Simposio sobre Problemas matemáticos que se estudian en América Latina, Punta del Este, Uruguay (1951)

Miembro de la Mesa Redonda sobre Teoría de las órbitas, Universidad de Nueva York, EUA (1957)

#### *Honores*

Premio Manuel Ávila Camacho del Instituto del Libro (1959)

Medalla Francisco Zarco

Premio Nacional de Ciencias (1970)  
Hijo predilecto de Guanaceví, Durango (1978)  
Profesor emérito de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (1979)  
Premio Nabor Carrillo de Ciencia y Tecnología Nucleares (1982)  
Medalla Académica de la Sociedad Mexicana de Física (1983)

*Membresía en sociedades científicas*

Sociedad Mexicana de Física  
Sociedad Científica Antonio Alzate  
Sociedad Matemática Mexicana  
Sociedad Astronómica Mexicana  
Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística

*Representaciones*

Miembro de la Delegación Mexicana en la Comisión Internacional de Energía Atómica de la Organización de las Naciones Unidas (1946)  
Delegado de México ante la Conferencia de la UNESCO sobre las Zonas Áridas, París (1953)  
Miembro de la Delegación de México a las conferencias sobre los Usos pacíficos de la energía atómica de las Naciones Unidas, agosto de 1955 y septiembre de 1958  
Delegado de México a la Conferencia sobre el Estatuto del Organismo Internacional de la Energía Atómica, Nueva York (1956)  
Asesor científico de la Delegación de México ante el Organismo Internacional de la Energía Atómica (1958 y 1963)  
Jefe de la Sección Mexicana del Grupo de Estudio sobre Desalación de Agua de Mar para el Noroeste de México y el Suroeste de Estados Unidos (1967-1970)

*Publicaciones*

*I. Trabajos de investigación científica*  
Representación de un tensor por medio de seis vectores, *Ingeniería XI* (6), 4 (1937) y *XI* (7), 25 (1937)  
On periodic orbits in the equatorial plane of a magnetic dipole (en colaboración con S. Kusaka), *Journal of Mathematics and Physics XVII*, 43 (1938)

- Galactic rotation and the intensity of cosmic radiation at the geomagnetic equator (en colaboración con M. Sandoval Vallarta y S. Kusaka), *Physical Review* 55, 1 (1939)
- An analysis of periodic orbits of particles of primary cosmic radiation (tesis para recibir el grado de Doctor en Ciencias), Massachusetts Institute of Technology, 1940
- On Birkhoff's new theory of gravitation (en colaboración con A. Barajas, G.D. Birkhoff y M. Sandoval Vallarta) *Physical Review* 66, 138 (1944)
- Órbitas periódicas de la radiación cósmica primaria, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* 1, 1 (1944)
- El movimiento de los dos cuerpos en la teoría de la gravitación de Birkhoff, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* 1, 25 (1944)
- La corrección bolométrica de las magnitudes de las galaxias en la cosmología birkhoffiana, *Anuario CICIC* (1945).
- La expansión del universo en la teoría de Birkhoff, *Boletín de la Sociedad Matemática II*, 43 (1945)
- Principios de conservación en la teoría de la gravitación de Birkhoff, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* 5, 7 (1948)
- La teoría de la gravitación de Birkhoff, *Memoria del Simposio Latinoamericano sobre problemas matemáticos que se estudian en América Latina*, UNESCO, Punta del Este, Uruguay, p. 121 (1951)
- Campo gravitacional de un punto masa en movimiento arbitrario en la teoría de Birkhoff, *Revista Mexicana de Física* I, 11 (1952)
- Principios variacionales para el movimiento de los planetas en el campo central de Birkhoff, *Revista Mexicana de Física* II, 180 (1953)
- Campo gravitacional de un punto masa en movimiento arbitrario en la teoría de Birkhoff, *Memoria del Congreso Científico Mexicano*, UNAM, México, p. 262 (1953)
- Estado actual de la teoría de la gravitación de Birkhoff, *Memoria del Congreso Científico Mexicano*, UNAM, México, p. 277 (1953)
- Birkhoff's theory of gravitation (en colaboración con A. Barajas). Notas en mimeógrafo, Instituto de Física, UNAM, 1953
- Movimiento de una masa que aniquila su propio campo gravitacional, *Revista Mexicana de Física* III (4), 253 (1954)
- La teoría de la gravitación de Birkhoff, *Cosmos y Ciencia* I (1), 44 (1954)

- Las fuerzas gravitacionales de Birkhoff en el espacio físico, *Anales del Instituto de Física, UNAM 1*, 35 (1955)
- Orbits in Birkhoff's central field [en] *Orbit theory, Proceedings of the Symposium on Applied Mathematics*, American Mathematical Society, Nueva York IX, 167 (1959)
- El gradiente del campo gravitacional de Birkhoff, *Revista Mexicana de Física X* (3), 181 (1961)
- El hiperángulo sólido en la teoría de la relatividad especial, *Revista Mexicana de Física XI*, 129 (1962)
- Del potencial de un punto masa a las ecuaciones del campo en la teoría de Birkhoff, *Revista Mexicana de Física XVI*, 181 (1968)
- Primera etapa de trabajo del grupo del acelerador Van de Graaf Tandem en el Centro Nuclear de México, *Revista Mexicana de Física XVIII*, S1 (1969)
- Primera etapa de trabajo del grupo del reactor nuclear en el Centro Nuclear de México, *Revista Mexicana de Física XIX*, S1 (1970)

## II. Ensayos y conferencias

- El aparato de Galton, *Ingeniería IX* (5-7), 121 (1935)
- La aceleración de Coriolis, *Ingeniería IX* (10), 176 (1935)
- Las geodésicas, *Ingeniería IX* (9), 164 (1935)
- El espacio de cuatro dimensiones, *Ingeniería IX* (11 y 12), 214 (1935)
- El principio de Hamilton, *Ingeniería X* (1), 26 (1936)
- Las deformaciones elásticas, *Ingeniería XI* (10), 395 (1937)
- La fundación de la Sociedad Matemática Mexicana, *Ingeniería XVII* (10), 304 (1943)
- Afinidades morfológicas entre las matemáticas y la pintura, *Cuadernos Americanos 6*, 105 (1946)
- Escultura y ciencia, *Revista de Arquitectura 31*, 35 (1950)
- Espacio matemático y espacio físico, *Seminario de Problemas Científicos y Filosóficos*, Cuaderno núm. 2, UNAM, México (1955)
- My tilt with Albert Einstein, *The American Scientist 44*, 204 (1956)
- Alejandro de Humboldt, Seminario de Cultura Mexicana, México, 1963
- Niels Bohr, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 8*, 13 (1963)
- The Texcoco Project [en] *Water production using nuclear power*, The University of Arizona Press, Tucson, 1966

- Nuclear power and water desalting plants in Southwest United States and Northwest Mexico*, Atomic Energy Commission, Washington, D.C., 1968
- La física (prólogo del libro *Física general*, de Salvador Mosqueira), Patria, México, 1974, pp. 9-12
- La serendipidad, Anuario de 1975 del Seminario de Cultura Mexicana, México (1975), pp. 80-87
- Viejos episodios de la ciencia en México, *Naturaleza* 66 (5), 204 (1975)
- Los radioisótopos como instrumento de progreso, *IV Simposio Panamericano de Farmacología y Terapéutica*, Excerpta Medica International Congress Series No. 185, agosto de 1967
- Uramex llegará a tener importancia semejante a la de Pemex, *Energía* 19 y 20, 26 (1980)
- Reminiscencias, *Revista Mexicana de Física* 30, 599 (1984)
- Origen y desarrollo de los aceleradores de partículas en México, *Memoria del Simposio sobre aceleradores de electrones en México*, Centro Nuclear de México, México, 1986
- Geometría no euclídea (prólogo a "Inmersión de  $R_4$  en  $E_6$ ", tesis de José Luis Fernández Chapou para obtener el grado de Doctor en Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 1986
- La física [en] *Setenta y cinco años de Revolución*, Fondo de Cultura Económica, México, 1988, vol. IV, p. 743





JAM  
Q158.5  
G7.3

2893396  
Graef Fernandez, Carlos  
Obra científica / Carlos

