Tarea 7 de Análisis Vectorial

Fecha de entrega 14 de Abril 2015

1.- Dados dos campos escalares u y v derivables con continidad en un conjunto abierto que contiene el disco R cuya frontera es la circunferencia $x^2+y^2=1$. Definimos dos campos escalares como sigue:
$\vec{f}(x,y)=v(x,y)\hat{\imath}+u(x,y)\hat{\jmath}$,
$\vec{g}(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\hat{\jmath}$,
encontrar el valor de la integral doble$\int\int_R \vec{f}\cdot\vec{g}dxdy$, si se sabe que sobre la frontera de R se tiene $u(x,y)=1$ y $v(x,y)=y$.

2.- Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple del plano xy y representamos con I_z el momento de inercia (alrededor del eje z) de la región interior a $\mathcal{C}$. Demostrar que existe un entero n tal que

$$nI_z=\oint_{\mathcal{C}} x^3dy-y^3dx.$$

3.- Si $\vec{f}$ y $\vec{g}$ son derivables con continuidad en un conjunto abierto conexo S del plano. Sea R una región de S limitada por $\mathcal{C}$ muestre que, $\oint_{\mathcal{C}}\vec{f}\nabla\vec{g}\cdot d\vec{\alpha}=-\oint_{\mathcal{C}}\vec{g}\nabla\vec{f}\cdot d\vec{\alpha}$.

4.- Dados dos campos escalares u y v derivables con continidad en un conjunto abierto S en el plano. Sea R la región limitada por la curva de Jordan $\mathcal{C}$, muestre que:
$\oint_{\mathcal{C}} uvdx+uvdy=\int\int_{\mathcal{R}}\left\{v\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}dxdy.$

5.- Si f y g son campos escalares derivables con continuidad en un conjunto abierto conexo S del plano. Sea R una región de S limitada por $\mathcal{C}$, tomando en cuenta $\nabla^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ muestre que,

$$a)\ \oint_{\mathcal{C}}\frac{\partial g}{\partial n}ds=\int\int_R\nabla^2 g dxdy.$$

$$b)\ \oint_{\mathcal{C}} f\frac{\partial g}{\partial n}ds=\int\int_R\Big(f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g\Big)dxdy.$$

$$c)\ \oint_{\mathcal{C}}\Big(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\Big)ds=\int\int_R\Big(f\nabla^2 g-g\nabla^2 f\Big)dxdy.$$

6.- Si $\vec{r}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$ y $r=||r||$, sea

$$\vec{f}(x,y)=\frac{\partial(\log r)}{\partial y}\hat{\imath}-\frac{\partial(\log r)}{\partial x}\hat{\jmath},$$

para $r>0$. Sea $\mathcal{C}$ una curva regular a trozos situada en el anillo $1<x^2+y^2<25$ hallar todos los valores posibles de la integral de línea de $\vec{f}$ a lo largo de $\mathcal{C}$.

7.- Problema 5 de la sección 11.25

8.- Problema 6 de la sección 11.25