CAPITULO 2

# INFERENCIA LÓGICA

## ● 2.1 *Introducción*

En el capítulo uno, hemos aprendido a dividir las proposiciones en sus partes lógicas y de este modo se ha llegado a conocer algo sobre la forma lógica de las proposiciones. La idea de *forma* se puede ilustrar con alguno de los resultados del capítulo anterior. La proposición $P \rightarrow Q$ es la misma, en cuanto a la forma lógica se refiere, cualesquiera que sean las proposiciones en castellano que sustituyan a la $P$ y a la $Q$. Los términos de enlace determinan la forma de la proposición.

Conocidas las formas de las proposiciones y teniendo los instrumentos de simbolización a nuestro alcance, podemos dirigirnos ya hacia una parte importante de la Lógica formal: inferencia y deducción. Las *reglas de inferencia* que rigen el uso de los términos de enlace son muy simples. Se pueden aprender estas reglas y su uso, como se aprenden las reglas de un juego. El juego se juega con proposiciones, o fórmulas lógicas, nombre que se dará a las proposiciones simbolizadas. Se empieza con conjuntos de fórmulas que se denominan *premisas*. El objeto del juego es utilizar las reglas de inferencia de manera que conduzcan a otras fórmulas que se denominan *conclusiones*. El paso lógico de las premisas a la conclusión es una *deducción*. La conclusión que se obtiene se dice que es una *consecuencia lógica* de las premisas si cada paso que se da para llegar a la conclusión está permitido por una regla. La idea de inferencia se puede expresar de la manera siguiente: *de premisas verdaderas se obtienen sólo conclusiones que son verdaderas*. Es decir, si las premisas son verdaderas, entonces las conclusiones que se *derivan* de ellas lógicamente, *han* de ser verdaderas.

Con frecuencia se aprende un juego nuevo, por un ejemplo. Veamos algunos de inferencia antes de proseguir con las leyes formales. Se supone que se tienen dos premisas, la fórmula $P \rightarrow Q$ y la fórmula $P$. Se sabe que estas premisas están dadas; es decir, se empieza diciendo que se ha dado $P$ y que se ha dado $P \rightarrow Q$. ¿Se puede sacar una conclusión de estas dos proposiciones? Es decir, ¿se puede idear otra proposición que haya de ser cierta si las premisas son ciertas? La conclusión es clara si se leen las premisas en la forma:

Si **P** entonces **Q**, y **P**.

La primera proposición expresa que si se verifica **P**, entonces se verifica **Q**, y la segunda dice que se verifica **P**. La conclusión es que se verifica **Q**. La proposición **Q** es consecuencia lógica de las premisas, **P** y $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$.

Veamos ahora una inferencia de la misma forma, pero cuyo contenido se ha suplido por lenguaje corriente. La primera premisa es:

Si llueve, entonces el cielo ha de estar cubierto.

La segunda premisa es:

Llueve.

¿Qué conclusión se puede sacar de las dos premisas?

La respuesta es la conclusión «El cielo ha de estar cubierto». Esta conclusión se puede inferir lógicamente de las premisas dadas. Se discutirá a continuación la regla particular de inferencia que permite deducir esta conclusión de las premisas.

## ● 2.2 *Reglas de inferencia y demostración*

*Modus Ponendo Ponens.* La regla de inferencia aplicada en el ejemplo precedente tiene un nombre latino, *modus ponendo ponens.* Consideremos algunos ejemplos del uso de esta regla en la deducción de conclusiones a partir de premisas.

| | |
|---|---|
| Premisa 1. | Si él está en el partido de fútbol, entonces él está en el estadio. |
| Premisa 2. | Él está en el partido de fútbol. |
| Conclusión. | Él está en el estadio. |

Otro ejemplo del uso del *modus ponendo ponens* es el siguiente:

| | |
|---|---|
| Premisa 1. | Si no hace frío, entonces el lago no se helará. |
| Premisa 2. | No hace frío. |
| Conclusión. | El lago no se helará. |

Simbólicamente, el primer ejemplo se expresa así:

Sea:

P =«Él está en el partido de fútbol»
Q =«Él está en el estadio»,

entonces

Premisa 1. $P \rightarrow Q$
Premisa 2. $P$

Conclusión $Q$

La regla de inferencia llamada *modus ponendo ponens* permite *demostrar* $Q$ a partir de $P \rightarrow Q$ y $P$.

El segundo ejemplo se simboliza de la manera siguiente, donde $P$ es la proposición «Hace frío» y $Q$ es la proposición «El lago se helará».

$$\neg P \rightarrow \neg Q$$
$$\neg P$$

$$\neg Q$$

En cada uno de los ejemplos, la regla *modus ponendo ponens* permite pasar de dos premisas a la conclusión. Decir que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas, es decir, que siempre que las premisas son ciertas, la conclusión es también cierta. La regla de inferencia aprendida dice que si se tienen dos proposiciones de la forma $P \rightarrow Q$ y $P$, se puede deducir la conclusión $Q$.

Recuérdese que la regla se aplica a la *forma* de las proposiciones, o sea, que siempre que se dé una *proposición condicional* y se dé precisamente *el antecedente de aquella condicional,* se sigue precisamente el *consecuente.* La misma regla se aplica tanto si el antecedente es una proposición atómica como si es una proposición molecular y tanto si el consecuente es una proposición atómica como si es una proposición molecular. En la proposición condicional anterior el antecedente y el consecuente son proposiciones moleculares. La segunda premisa afirma el antecedente, que es $\neg P$. Por tanto, el consecuente, que es $\neg Q$, se sigue de la regla *modus ponendo ponens.* En todos los ejemplos que se dan a continuación se aplica el *modus ponendo ponens.* Tanto los antecedentes como los consecuentes que se utilizan pueden ser proposiciones atómicas o moleculares:

*a.* $R \rightarrow S$
$R$

$S$

*b.* $P$
$P \rightarrow \neg Q$

$\neg Q$

*c.* $P \ \& \ Q \rightarrow R$
$P \ \& \ Q$

$R$

*d.* $\neg P \rightarrow Q$
$\neg P$

$Q$

*e.* $P \rightarrow Q \ \& \ R$
$P$

$Q \ \& \ R$

Obsérvese, en el segundo ejemplo, que la condicional figura en segundo lugar, y P, que es precisamente el antecedente, está situado primero. Cuando el *modus ponendo ponens* o cualquiera de las otras reglas se aplica para sacar una conclusión de dos o más proposiciones, el orden de aquellas proposiciones es indiferente.

Recuérdese que una condicional se puede escribir $(P) \rightarrow (Q)$. Con los paréntesis, el *modus ponendo ponens* es:

$$\begin{array}{l} (P) \rightarrow (Q) \\ (P) \\ \hline (Q) \end{array}$$

Si es una ayuda, se pueden usar paréntesis cuando el antecedente o el consecuente son proposiciones moleculares, como en los tres últimos ejemplos anteriores o en el siguiente:

$$\begin{array}{lcl} \neg P \lor R \rightarrow S \,\&\, \neg Q & \qquad & (\neg P \lor R) \rightarrow (S \,\&\, \neg Q) \\ \neg P \lor R & & (\neg P \lor R) \\ S \,\&\, \neg Q & & (S \,\&\, \neg Q) \end{array}$$

El nombre *modus ponendo ponens* se puede explicar de la siguiente manera: Esta regla de inferencia es el método *(modus)*, que afirma *(ponens)* el consecuente, afirmando *(ponendo)* el antecedente.

## EJERCICIO 1

**A.** ¿Qué conclusión se puede sacar de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas? Es decir, ¿qué proposición lógica se sigue de las premisas?

1. Si usted está en Madrid, entonces su reloj señala la misma hora que en Barcelona. Usted está en Madrid.
2. Si no nos despedimos ahora, entonces no cumpliremos nuestro plan. No nos despedimos ahora.
3. Si esta planta no crece, entonces o necesita más agua o necesita mejor abono. Esta planta no crece.
4. Son las cinco. Si son las cinco, entonces la oficina está cerrada.
5. Si vivo en la capital de los Estados Unidos, entonces no vivo en ninguno de los cincuenta estados. Vivo en la capital de los Estados Unidos.

**B.** Utilizando *modus ponendo ponens* sacar una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes. Escribir las conclusiones en la línea (3).

1. (1) $P \vee Q \rightarrow R$
   (2) $P \vee Q$
   (3)

2. (1) $\neg P \rightarrow \neg R$
   (2) $\neg P$
   (3)

3. (1) $\neg P$
   (2) $\neg P \rightarrow Q$
   (3)

4. (1) $P \rightarrow Q \;\&\; R$
   (2) $P$
   (3)

5. (1) $P \rightarrow Q \vee R$
   (2) $P$
   (3)

6. (1) $\neg R$
   (2) $\neg R \rightarrow Q \;\&\; P$
   (3)

**C.** Poner una «C» junto a cada ejemplo en el que la conclusión es correcta según el *modus ponendo ponens*. Poner una «I» junto a cada conclusión incorrecta.

1. Premisas: $S$ y $S \rightarrow T$; conclusión: $T$
2. Premisas: $T \rightarrow V$ y $T$; conclusión: $V$
3. Premisas: $P \rightarrow Q$ y $Q$; conclusión: $P$
4. Premisas: $S$ y $R \rightarrow S$; conclusión: $R$
5. Premisas: $R$ y $R \rightarrow S$; conclusión: $S$

**D.** Utilizar el *modus ponendo ponens* para deducir una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes:

1. Si $x \neq 0$ entonces $x+y>1$. $x \neq 0$.
2. Si $x+y=z$ entonces $y+x=z$. $x+y=z$.
3. Si $x$ es un número e $y$ es un número, entonces $x+y$ es un número. $x$ es un número e $y$ es un número.
4. Si $x>y$ y $y>z$, entonces $x>z$. A la vez $x>y$ y $y>z$.
5. A la vez $x=y$ y $y=z$. Si $x=y$ y $y=z$, entonces $x=z$.

• *Demostraciones.* Cuando se usa una regla de inferencia para pasar de un conjunto de proposiciones a otra proposición se *demuestra* que la última proposición es consecuencia lógica de las otras. Esto se puede expresar de muchas maneras. Se puede decir que se ha *derivado* la conclusión de las premisas, que la conclusión se *infiere de* o es *implicada* por las premisas, que la conclusión se *deduce* de las premisas, y otras. Todas estas palabras o expresiones significan lo mismo: Dadas ciertas proposiciones, si una regla de inferencia nos permite pasar a otra proposición, entonces esta proposición es una conclusión lógica de las proposiciones dadas.

En la última sección se han visto algunas demostraciones cortas. Utilizando *modus ponendo ponens* como regla, se demostró una conclusión a partir de un conjunto de premisas. Por ejemplo, de $R \rightarrow S$ y $R$ se demostró $S$. Se podría esquematizar la demostración de manera clara poniendo

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $R \rightarrow S$ | P |
| (2) | $R$ | P |
| (3) | $S$ | PP |

Cada línea en la demostración está numerada. Después de las proposiciones simbolizadas se indican como se obtiene cada proposición. Se han indicado con P las premisas dadas. Las líneas que son premisas se representan por P en la *regla de premisas*. Se parte de ellas y se deduce la línea (3) por el *modus ponendo ponens,* lo que se indica en la línea por la abreviatura PP, escrita después de la proposición.

## EJERCICIO 2

**A.** A continuación se dan conjuntos de premisas. Deducir una conclusión de cada conjunto, indicando cómo se obtienen cada una de las terceras líneas por medio de las abreviaturas P en la regla de premisas, o PP en el *modus ponendo ponens.*

Ejemplo:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg P \rightarrow S$ | P |
| (2) | $\neg P$ | P |
| (3) | $S$ | PP |

1. (1) $\neg A \rightarrow \neg B$
   (2) $\neg A$
   (3)

2. (1) $M$
   (2) $M \rightarrow N$
   (3)

3. (1) $R$
   (2) $R \rightarrow \neg T \vee Q$
   (3)

4. (1) $\neg B \rightarrow \neg D \;\&\; A$
   (2) $\neg B$
   (3)

**B.** Simbolizar cada uno de los conjuntos de premisas del apartado **A** en el Ejercicio 1. Después indicar una demostración como en la Sección **A** de este ejercicio, numerando cada linea y señalando por medio de las abreviaturas P para las premisas y PP para *modus ponendo ponens,* cómo se justifica cada línea.

**C.** Simbolizar las proposiciones matemáticas de la Sección **D** del Ejercicio 1. Después indicar una demostración como en la Sección **A** de este ejercicio.

*Demostraciones en dos pasos.* Algunas veces no se puede ir directamente de las premisas a la conclusión por un solo paso. Pero esto no impide poder llegar a la conclusión. Cada vez se deduce una proposición por medio de una regla, entonces esta proposición se puede utilizar junto con las premisas para deducir otra proposición. Considérese un ejemplo en el que se tienen tres premisas:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $A \to B$ | P |
| (2) | $B \to C$ | P |
| (3) | $A$ | P |

Se quiere probar la proposición **C**. Para llegar a **C**, se necesitan dos pasos, cada uno permitido por el *modus ponendo ponens*, PP. Estos dos pasos son las líneas (4) y (5) escritas a continuación:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $A \to B$ | P |
| (2) | $B \to C$ | P |
| (3) | $A$ | P |
| (4) | $B$ | PP 1, 3 |
| (5) | $C$ | PP 2, 4 |

Observemos atentamente el esquema de la demostración. Cada línea está numerada, tanto si es una premisa como una línea deducida. Cada línea está justificada, bien por ser premisa (indicada por P), bien deducida por una regla de inferencia (indicada por la abreviatura PP). Además, después de las abreviaturas correspondientes a las reglas empleadas para obtener las líneas *deducidas,* se ha indicado el número de las líneas a partir de las cuales se ha deducido esta línea. Por ejemplo, en la línea (4) la sigla «PP 1, 3» significa que **B** se ha deducido por el *modus ponendo ponens* de las líneas (1) y (3). Análogamente, en la línea (5) se ha deducido de la **C** por medio de la regla PP de las líneas (2) y (4). Obsérvese que se puede utilizar una línea que se ha deducido, junto con otras líneas, para deducir una nueva línea. Cada línea que puede ser justificada ya sea como una premisa o por el uso de una regla, se puede utilizar en otros pasos posteriores de la demostración.

Antes de intentar hacer algunas demostraciones cortas, consideremos todavía un ejemplo. Se suponen dadas las premisas siguientes y se quiere demostrar **R** :

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $S \to \neg T$ | P |
| (2) | $S$ | P |
| (3) | $\neg T \to R$ | P |
| (4) | $\neg T$ | PP 1, 2 |
| (5) | $R$ | PP 3, 4 |

Se utiliza el *modus ponendo ponens* para deducir una línea (4) y entonces se puede aplicar el *modus ponendo ponens* a aquella línea y a otra, tal como la (3) para deducir la conclusión (5). Se da un paso (permitido por una regla) y después se puede dar otro paso usando la proposición deducida.

## Ejercicio 3

**A.** En cada uno de los ejercicios siguientes se ha de demostrar que una proposición es consecuencia lógica de las premisas dadas. Deducir la conclusión, escribiendo la abreviatura que corresponde a la regla que permite obtener cada línea, y cuando se empleen líneas deducidas anteriormente, indicar el número de cada línea que ha sido utilizada al aplicar la regla.

1. Demostrar: $\neg T$
   (1) $R \rightarrow \neg T$ P
   (2) $S \rightarrow R$ P
   (3) $S$ P
   (4)
   (5)

2. Demostrar: $G$
   (1) $\neg H \rightarrow \neg J$ P
   (2) $\neg H$ P
   (3) $\neg J \rightarrow G$ P
   (4)
   (5)

3. Demostrar: $C$
   (1) $A \rightarrow B \ \& \ D$ P
   (2) $B \ \& \ D \rightarrow C$ P
   (3) $A$ P
   (4)
   (5)

4. Demostrar: $M \vee N$
   (1) $\neg J \rightarrow M \vee N$ P
   (2) $F \vee G \rightarrow \neg J$ P
   (3) $F \vee G$ P
   (4)
   (5)

5. Demostrar: $\neg S$
   (1) $T$ P
   (2) $T \rightarrow \neg Q$ P
   (3) $\neg Q \rightarrow \neg S$ P
   (4)
   (5)

**B.** Simbolizar cada una de las proposiciones de los conjuntos siguientes y demostrar que la conclusión (la proposición que empieza por «Por tanto...») es consecuencia lógica. Se seguirá el mismo método de las demostraciones de la pág. 50.

1. Si 2 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 1.
   Si 3 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 0.
   2 es mayor que 1.
   Por tanto, 3 es mayor que 0.

2. $x+1=2$.*
   Si $x+1=2$ entonces $y+1=2$.
   Si $y+1=2$ entonces $x=y$.
   Por tanto, $x=y$.
3. Si $x+0=y$ entonces $x=y$. $x+0=y$.
   Si $x=y$ entonces $x+2=y+2$.
   Por tanto, $x+2=y+2$.
4. Si $x>y$ y $y>z$ entonces $x>z$.
   $x>y$ y $y>z$.
   Si $x>z$ entonces $x>10$.
   Por tanto, $x>10$.
5. Si $x=y$ y $y=z$ entonces $x=z$.
   Si $x=z$ entonces $z=x$.
   $x=y$ y $y=z$.
   Por tanto, $z=x$.
6. Si se levanta aire húmedo, entonces refrescará.
   Si refresca, entonces se formarán nubes.
   Se levanta aire húmedo.
   Entonces se formarán nubes.

**C.** No existe limitación respecto al número de veces que se puede aplicar en una demostración la regla *modus ponendo ponens*. Los ejercicios que siguen requieren más de dos aplicaciones. Deducir la conclusión que se desea demostrar, expresando la regla aplicada para deducir cada línea e indicando las líneas que se han utilizado al aplicar la regla.

Demostrar: $\neg N$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $R \rightarrow \neg S$ | P |
| (2) | $R$ | P |
| (3) | $\neg S \rightarrow Q$ | P |
| (4) | $Q \rightarrow \neg N$ | P |

Demostrar: $B$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg G \rightarrow E$ | P |
| (2) | $E \rightarrow K$ | P |
| (3) | $\neg G$ | P |
| (4) | $K \rightarrow \neg L$ | P |
| (5) | $\neg L \rightarrow M$ | P |
| (6) | $M \rightarrow B$ | P |

Demostrar: $R \vee S$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $C \vee D$ | P |
| (2) | $C \vee D \rightarrow \neg F$ | P |
| (3) | $\neg F \rightarrow A \mathbin{\&} \neg B$ | P |
| (4) | $A \mathbin{\&} \neg B \rightarrow R \vee S$ | P |

* Cuando para expresar una proposición atómica se usan símbolos matemáticos, no es necesario utilizar letras mayúsculas para simbolizar la proposición atómica, pues se utilizarán los símbolos matemáticos como lógicos. Por ejemplo, en el Ejercicio 2, Sección **B**, las premisas se pueden escribir

$$x+1=2$$
$$x+1=2 \quad \rightarrow \quad y+1=2$$
$$y+1=2 \quad \rightarrow \quad x=y$$

*Doble negación.* La *regla de doble negación* es una regla simple que permite pasar de una premisa única a la conclusión. Un ejemplo simple es el de una negación de negación, que brevemente se denomina «doble negación». Sea la proposición:

No ocurre que Ana no es un estudiante:

¿Qué conclusión se puede sacar de esta premisa? Evidentemente, se puede decir:

Ana es un estudiante.

La regla de doble negación también actúa en sentido contrario. Por ejemplo, de la proposición:

Juan toma el autobús para ir a la escuela,

se puede concluir la negación de su negación:

No ocurre que Juan no toma el autobús para ir a la escuela.

Así la regla de doble negación tiene dos formas simbólicas.

$$\frac{(P)}{\neg\neg(P)} \quad \text{y} \quad \frac{\neg\neg(P)}{(P)}$$

La abreviatura para esta regla es DN.

En los ejemplos siguientes, el uso de la doble negación permite demostrar una conclusión como consecuencia lógica de una premisa.

*a.* (1) $R$ P
(2) $\neg\neg R$ DN 1

*b.* (1) $\neg\neg A$ P
(2) $A$ DN 1

*c.* (1) $\neg\neg(P \ \& \ Q)$ P
(2) $P \ \& \ Q$ DN 1

Ahora que se conocen ya dos reglas de inferencia se pueden hacer demostraciones cortas que requieran el uso de ambas. Considérese el ejemplo que sigue en el que el *modus ponendo ponens,* PP, y la doble negación, DN, se utilizan para llegar a la conclusión:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $P \rightarrow Q$ | P |
| (2) | $P$ | P |
| (3) | $Q$ | PP 1, 2 |
| (4) | $\neg\neg Q$ | DN 3 |

En la demostración hay dos premisas y dos líneas derivadas. La línea (3) se deriva de las líneas (1) y (2) por el *modus ponendo ponens*. La línea (4) se deduce de la línea (3) por la regla de la doble negación.

## Ejercicio 4

**A.** ¿Qué conclusiones se pueden sacar de cada una de las proposiciones siguientes por la doble negación?

1. Todos los mamíferos son animales de sangre caliente.
2. No ocurre que el núcleo de un átomo no está cargado positivamente.
3. El granito es un tipo de mineral ígneo.
4. En los Estados Unidos las elecciones presidenciales tienen lugar cada cuatro años.
5. No ocurre que un quinto no es el veinte por ciento.

**B.** En cada uno de los siguientes grupos de premisas deducir una conclusión, cuando sea posible, por el *modus ponendo ponens*. Si la regla *modus ponendo ponens* no se puede aplicar a las premisas, indicarlo poniendo «no PP».

1. (1) $P \& Q \rightarrow R$
   (2) $R$
2. (1) $Q \rightarrow R \vee S$
   (2) $Q$
3. (1) $\neg\neg R$
   (2) $Q \rightarrow \neg\neg R$
4. (1) $S$
   (2) $S \rightarrow \neg P$
5. (1) $S \rightarrow T \& U$
   (2) $T \& U$
6. (1) $\neg\neg P \rightarrow Q$
   (2) $\neg\neg P$

**C.** Poner la letra C junto a cada afirmación cierta. Poner la letra F junto a cada afirmación falsa.

1. De $\neg\neg R$ se puede deducir $R$.
2. De $S$ se puede deducir $\neg S$.
3. De $P \rightarrow Q$ y $P$ se puede deducir $Q$.
4. De $Q$ se puede deducir $\neg\neg Q$.
5. De $R \rightarrow S$ y $S$ se puede deducir $R$.

**D.** Demostrar que las conclusiones son consecuencia lógica de las premisas dadas en cada uno de los ejemplos que siguen. Dar la *demostración completa* como en los ejemplos anteriores; es decir, se ha de numerar cada línea, indicar la abreviatura de la regla usada, y los números de las líneas de las que se ha deducido cada línea en la demostración.

1. Demostrar: $\neg\neg T$
   (1) $S \rightarrow T$ P
   (2) $S$ P
   (3)
   (4) $\neg\neg T$ (1

2. Demostrar: $B$
   (1) $\neg A$ P
   (2) $\neg A \rightarrow \neg\neg B$ P
   (3)
   (4)

3. Demostrar: $G$
   (1) $H \rightarrow \neg\neg G$ P
   (2) $H$ P
   (3)
   (4)

4. Demostrar: $P \vee Q$
   (1) $R \rightarrow \neg\neg(P \vee Q)$ P
   (2) $R$ P
   (3)
   (4)

5. Demostrar: $\neg\neg N$
   (1) $M \rightarrow \neg P$ P
   (2) $\neg P \rightarrow N$ P
   (3) $M$ P
   (4)
   (5)
   (6)

6. Demostrar: $Q$
   (1) $J \rightarrow K \ \& \ M$ P
   (2) $J$ P
   (3) $K \ \& \ M \rightarrow \neg\neg Q$ P
   (4)
   (5)
   (6)

*Modus Tollendo Tollens.* La regla de inferencia que tiene el nombre latino *modus tollendo tollens* se aplica también a las proposiciones condicionales. Pero en este caso, negando (tollendo) el consecuente, se puede negar (tollens) el antecedente de la condicional. La deducción siguiente es un ejemplo del uso del *modus tollendo tollens.*

| | |
|---|---|
| Premisa 1. | Si tiene luz propia, entonces el astro es una estrella. |
| Premisa 2. | El astro no es una estrella. |
| Conclusión. | Por tanto no tiene luz propia. |

Se simbolizará el ejemplo de la manera siguiente:
Sea

$P =$ «Tiene luz propia»
$Q =$ «El astro es una estrella».

$$P \rightarrow Q$$
$$\neg Q$$
$$\neg P$$

La abreviatura del *modus tollendo tollens* es TT.

Cuando el antecedente o el consecuente es una proposición molecular, puede usarse el paréntesis para mayor claridad:

$$(P) \to (Q)$$
$$\neg(Q)$$
$$\neg(P)$$

Por tanto, la regla *modus tollendo tollens* permite pasar de dos premisas: (a) una proposición condicional, y (b) una proposición que niega el consecuente, a una conclusión que niega el antecedente.

Otro ejemplo puede aclarar todavía la afirmación anterior. La proposición condicional es:

Si es por la mañana, entonces el sol estará en el Este.

Se niega el consecuente:

El sol no está en el Este.

Entonces se puede negar el antecedente:

Por tanto, no es por la mañana.

La regla se aplica a todo conjunto de premisas de esta *forma*. El antecedente o el consecuente pueden ser proposiciones moleculares o proposiciones atómicas. En los ejemplos siguientes, se usa la regla *modus tollendo tollens;* en cada uno de ellos una de las premisas es una condicional, y la otra premisa niega el consecuente.

*a.* (1) $R \to S$ P
(2) $\neg S$ P
(3) $\neg R$ TT 1, 2

*b.* (1) $Q \& R \to S$ P
(2) $\neg S$ P
(3) $\neg(Q \& R)$ TT 1, 2

*c.* (1) $P \to \neg Q$ P
(2) $\neg\neg Q$ P
(3) $\neg P$ TT 1, 2

Obsérvese que en el último ejemplo se niega una negación, lo que da lugar a una doble negación: se niega $\neg Q$ es decir, se toma como premisa $\neg\neg Q$.

Se considera ahora un ejemplo de una demostración en el que se aplican las tres reglas expuestas hasta aquí. Se trata de demostrar $\neg\neg R$.

(1) $P \to Q$ P
(2) $\neg Q$ P

| | |
|---|---|
| (3) $\neg P \rightarrow R$ | P |
| (4) $\neg P$ | TT 1, 2 |
| (5) $R$ | PP 3, 4 |
| (6) $\neg\neg R$ | DN 5 |

Repasar este ejemplo para asegurarse que se puede seguir cada uno de los pasos. Se da ahora otro ejemplo en el que sólo se usan dos reglas. Se desea demostrar $A$.

| | |
|---|---|
| (1) $\neg A \rightarrow \neg B$ | P |
| (2) $B$ | P |
| (3) $\neg\neg B$ | DN 2 |
| (4) $\neg\neg A$ | TT 1, 3 |
| (5) $A$ | DN 4 |

El uso de la doble negación es aquí importante. Se necesita la negación del consecuente en la primera premisa para poder aplicar la regla TT. El consecuente es $\neg B$. La negación de esta proposición molecular se consigue anteponiendo el símbolo que corresponde al «no»; y así, $\neg\neg B$ niega a $\neg B$. No se tiene $\neg\neg B$ en las premisas, pero se puede deducir de la segunda premisa $B$. Obsérvese que esto es lo que se ha realizado en la línea (3). Utilizando el *modus tollendo tollens* se tiene la negación del antecedente. El antecedente es $\neg A$ de manera que su negación es $\neg\neg A$. Finalmente, todo se reduce a aplicar la regla DN otra vez, para obtener $A$ de $\neg\neg A$.

## Ejercicio 5

**A.** ¿Qué conclusión se puede deducir de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes utilizando la regla TT? Escribir las conclusiones en castellano.

1. Si la luz fuera simplemente un movimiento ondulatorio continuo, entonces la luz más brillante daría lugar siempre a una emisión de electrones con mayor energía que los originados por luz más tenue. La luz más brillante no siempre emite electrones con mayor energía que los originados por luz más tenue.
2. Si un ángulo de un triángulo es mayor de 90 grados, entonces la suma de los otros dos ángulos es menor de 90 grados. La suma de los otros dos ángulos no es menor de 90 grados.
3. Si el arriendo se mantiene válido, entonces el dueño es responsable de las reparaciones. El dueño no es responsable de las reparaciones.
4. Si llovió la pasada noche, entonces las pistas se han limpiado. Las

pistas no se han limpiado.

5. José no es mi hermano. Si Susana es mi hermana, entonces José es mi hermano.

**B.** Deducir una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes, aplicando la regla del *modus tollendo tollens.*

1. (1) $Q \rightarrow R$ P
   (2) $\neg R$ P
   (3)

2. (1) $\neg P \rightarrow Q$ P
   (2) $\neg Q$ P
   (3)

3. (1) $R \rightarrow S$ P
   (2) $\neg S$ P
   (3)

4. (1) $Q \rightarrow \neg R$ P
   (2) $\neg\neg R$ P
   (3)

5. (1) $P \rightarrow Q \ \& \ R$ P
   (2) $\neg(Q \ \& \ R)$ P
   (3)

6. (1) $P \vee Q \rightarrow R$ P
   (2) $\neg R$ P
   (3)

**C.** Demostrar que las conclusiones son consecuencia de las premisas dadas. Indicar la demostración completa.

1. Demostrar: $C$
   (1) $\neg B$ P
   (2) $A \rightarrow B$ P
   (3) $\neg A \rightarrow C$ P

2. Demostrar: $F$
   (1) $G \rightarrow H$ P
   (2) $\neg G \rightarrow \neg\neg F$ P
   (3) $\neg H$ P

3. Demostrar: $R \ \& \ S$
   (1) $P \rightarrow \neg Q$ P
   (2) $Q$ P
   (3) $\neg P \rightarrow R \ \& \ S$ P

4. Demostrar: $E$
   (1) $F$ P
   (2) $\neg E \rightarrow \neg F$ P

5. Demostrar: $\neg S$
   (1) $S \rightarrow \neg R$ P
   (2) $R$ P

*Más sobre la negación.* La regla de doble negación se utiliza frecuentemente con *modus tollendo tollens,* y con otras reglas que se introducirán seguidamente. Puesto que el uso de la regla de doble negación en conjunción con la TT, esencialmente tiene siempre la misma forma, se pueden acortar deducciones, introduciendo una extensión de la definición de negación:

*$P$ es la negación de $\neg P$*

Ya se sabe que $\neg P$ es la negación de $P$, y podemos aplicar la regla de doble negación para lograr esta extensión de la definición de negación. Dado $\neg P$, su negación es $\neg\neg P$, pero en virtud de la regla de doble negación, se obtiene la proposición equivalente $P$. Esta regla sólo permite simplificar, pero en sí no es una regla nueva de demostración.

Teniendo presente que $P$ es la negación de $\neg P$ se simplifican las demostraciones, como en el caso siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $A \rightarrow \neg B$ | P |
| (2) | $B$ | P |
| (3) | $\neg A$ | TT 1, 2 |

De las dos premisas se obtiene la negación de $A$ sin más que aplicar TT. Teniendo en cuenta que $A$ es la negación de $\neg A$ resulta la negación de $B$, es decir, $\neg B$. Sin esta extensión de la definición de negación, la deducción requiere una nueva línea en la que se aplica la regla de doble negación.

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $A \rightarrow \neg B$ | P |
| (2) | $B$ | P |
| (3) | $\neg\neg B$ | DN 2 |
| (4) | $\neg A$ | TT 1, 3 |

Obsérvese que el efecto de reconocer $P$ como negación de $\neg P$ es extender el TT a la forma lógica siguiente:

$$P \rightarrow \neg Q$$
$$Q$$

$$\neg P$$

Otra extensión análoga del TT se refiere al antecedente de la premisa condicional:

$$\neg P \rightarrow Q$$
$$\neg Q$$

$$P$$

Esta extensión se usa en el ejemplo siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg A \rightarrow B$ | P |
| (2) | $\neg B$ | P |
| (3) | $A$ | TT 1, 2 |

Si $A$ no se reconociera como negación de $\neg A$, esta deducción necesitaría la línea adicional usual para aplicación de la regla de doble negación.

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg A \rightarrow B$ | P |
| (2) | $\neg B$ | P |
| (3) | $\neg\neg A$ | TT 1, 2 |
| (4) | $A$ | DN 3 |

Se puede utilizar esta extensión del TT en el antecedente y el consecuente, como se ve en el ejmplo

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg P \rightarrow \neg Q$ | P |
| (2) | $Q$ | P |
| (3) | $P$ | TT 1, 2 |

Una ilustración de estas ideas en una deducción, utilizando proposiciones matemáticas, es la siguiente. Se quiere demostrar que $x=0$, y se tienen tres premisas.

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $x \neq 0 \rightarrow x = y$ | P |
| (2) | $x = y \rightarrow x = z$ | P |
| (3) | $x \neq z$ | P |
| (4) | $x \neq y$ | TT 2, 3 |
| (5) | $x = 0$ | TT 1, 4 |

Obsérvese que se obtiene la línea (5) de las líneas (1) y (4) puesto que «$x=0$» es la negación de «$x \neq 0$».

### EJERCICIO 6

**A.** Usando la regla: $P$ es la negación de $\neg P$, evitar la regla de doble negación en las deducciones siguientes.

1. Demostrar: $\neg P$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $P \rightarrow \neg Q$ | P |
| (2) | $Q$ | P |

2. Demostrar: $\neg A$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $A \rightarrow \neg C$ | P |
| (2) | $B \rightarrow C$ | P |
| (3) | $B$ | P |

3. Demostrar: $P$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg P \rightarrow \neg Q$ | P |
| (2) | $Q$ | P |

4. Demostrar: $A$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg A \rightarrow \neg B$ | P |
| (2) | $\neg B \rightarrow \neg C$ | P |
| (3) | $C$ | P |

5. Demostrar: $\neg S$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $P \rightarrow Q$ | P |
| (2) | $Q \rightarrow R$ | P |
| (3) | $S \rightarrow \neg R$ | P |
| (4) | $P$ | P |

6. Demostrar: $\neg A$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $A \rightarrow B$ | P |
| (2) | $B \rightarrow C$ | P |
| (3) | $C \rightarrow D$ | P |
| (4) | $\neg D$ | P |

**B.** Teniendo en cuenta que «$x=0$» es la negación de «$x\neq 0$», evitar la regla de doble negación en las deducciones siguientes.

1. Demostrar: $x=0$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $x\neq 0 \;\rightarrow\; x+y\neq y$ | P |
| (2) | $x+y=y$ | P |

2. Demostrar: $x\neq 0$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $x=0 \;\rightarrow\; x\neq y$ | P |
| (2) | $x=z \;\rightarrow\; x=y$ | P |
| (3) | $x=z$ | P |

3. Demostrar: $x=y$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $x\neq y \;\rightarrow\; x\neq z$ | P |
| (2) | $x\neq z \;\rightarrow\; x\neq 0$ | P |
| (3) | $x=0$ | P |

4. Demostrar: $x\neq 0$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $x=y \;\rightarrow\; x=z$ | P |
| (2) | $x=z \;\rightarrow\; x=1$ | P |
| (3) | $x=0 \;\rightarrow\; x\neq 1$ | P |
| (4) | $x=y$ | P |

5. Demostrar: $x\neq y$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $x=y \;\rightarrow\; y=z$ | P |
| (2) | $y=z \;\rightarrow\; y=w$ | P |
| (3) | $y=w \;\rightarrow\; y=1$ | P |
| (4) | $y\neq 1$ | P |

6. Demostrar: $x=0$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $x\neq 0 \;\rightarrow\; y=1$ | P |
| (2) | $x=y \;\rightarrow\; y=w$ | P |
| (3) | $y=w \;\rightarrow\; y\neq 1$ | P |
| (4) | $x=y$ | P |

*Adjunción y simplificación.* Se suponen dadas dos proposiciones como premisas. La primera es

Jorge es adulto.

La segunda es

María es adolescente.

Si ambas proposiciones son verdaderas, entonces se podrían juntar en una proposición molecular utilizando el término de enlace «y» y se tendría una proposición verdadera que se leería

Jorge es adulto y María es adolescente.

Si ambas premisas son ciertas, entonces la conclusión tendría que ser cierta. La regla que permite pasar de las dos premisas a la conclusión se denomina *regla de adjunción*. Se indica abreviadamente por A.

De manera simbólica se puede ilustrar la regla así:

| | |
|---|---|
| De las premisas | **P** |
| | **Q** |
| se puede concluir | **P** & **Q** |
| o se puede concluir | **Q** & **P**. |

Con paréntesis, la regla se presenta de la manera siguiente:

| | |
|---|---|
| De las premisas | (**P**) |
| | (**Q**) |
| se puede concluir | (**P**) & (**Q**) |
| o se puede concluir | (**Q**) & (**P**). |

Los peréntesis en la conclusión son necesarios sólo si **P** o **Q** son proposiciones moleculares que no sean negaciones.

El orden de las premisas es indiferente. En el primer ejemplo se hubiera podido concluir «María es adolescente y Jorge es adulto». El significado no cambiaría. Si se tiene la proposición **Q** como una premisa, seguida de la proposición **P** como una premisa, la conclusión puede muy buen ser **P** & **Q**. ya que por una parte el orden de las líneas a las que se aplica la regla es indiferente, y también porque en la conjunción se puede alterar el orden.

A continuación se dan varios ejemplos en los que se utiliza la regla de adjunción.

*a.* (1) **P** P
(2) ¬**R** P
(3) **P** & ¬**R** A 1, 2

*b.* (1) **Q** & **S** P
(2) ¬**T** P
(3) ¬**T** & (**Q** & **S**) A 1, 2

*c.* (1) **T** P
(2) **U** P
(3) **U** & **T** A 1, 2

*d.* (1) **P** ∨ **Q** P
(2) **Q** ∨ **R** P
(3) (**P** ∨ **Q**) & (**Q** ∨ **R**) A 1, 2

Consideremos ahora un ejemplo en el que precisamente se emplea la regla opuesta a la que se acaba de estudiar. Se tiene una premisa que dice:

El cumpleaños de María es el viernes **y** el mío el sábado.

De esta premisa se pueden deducir dos proposiciones. Una conclusión es:

El cumpleaños de María es el viernes.

La otra conclusión es:

El mío es el sábado.

Si la premisa es cierta, cada una de las conclusiones es también cierta. La regla que pemite pasar de una conjunción a cada una de las dos proposiciones que están unidas por & se denomina *regla de simplificación*. Esta regla se designa abreviadamente por S.

En forma simbólica la regla de simplificación es:

De la premisa $P \ \& \ Q$

se puede concluir $P$
o se puede concluir $Q$

Añadiendo paréntesis, la regla es:

| | |
|---|---|
| De la premisa | $(P) \ \& \ (Q)$ |
| se puede concluir | $(P)$ |
| o se puede concluir | $(Q)$. |

Con los paréntesis se hace resaltar que la premisa *ha* de ser una conjunción. La regla de simplificación *no se puede* aplicar a $P \ \& \ Q \rightarrow R$ cuyo significado es: $(P \ \& \ Q) \rightarrow R$; *pero se puede aplicar a* $P \ \& \ (Q \rightarrow R)$ obteniendo $P$ o $Q \rightarrow R$.

Ejemplos del uso de la regla de simplificación son

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a.* (1) | $(P \vee Q) \ \& \ R$ | P | *b.* (1) | $Q \ \& \ S$ | P |
| (2) | $R$ | S 1 | (2) | $Q$ | S 1 |
| *c.* (1) | $(P \vee Q) \ \& \ R$ | P | *d.* (1) | $T \ \& \ \neg V$ | P |
| (2) | $P \vee Q$ | S 1 | (2) | $\neg V$ | S 1 |

*e.* (1) $(P \ \& \ Q) \ \& \ R$ P
(2) $P \ \& \ Q$ S 1

## EJERCICIO 7

**A.** ¿Qué conclusión o conclusiones se pueden deducir de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes utilizando la regla A o la regla S?

1. Una sociedad es una colección de individuos que buscan una forma de vida y la cultura es su forma de vida.
2. El número atómico del hidrógeno es 1. El número atómico del helio es 2.
3. Kofi habla la lengua Twi. Ama habla la lengua Ga.
4. A Tomás le gusta esquiar y ha nevado en la montaña.
5. Esta inferencia es válida. Aquella no es válida.

6. (1) $Q \;\&\; R$ P
   (2)

7. (1) $(P \lor Q) \;\&\; S$ P
   (2)

8. (1) $R \lor S$ P
   (2) $Q$ P

9. (1) $S$ P
   (2) $T$ P
   (3)

10. (1) $Q \;\&\; R$ P
    (2) $S$ P
    (3)

**B.** Probar que las conclusiones siguientes son consecuencia lógica de las premisas dadas. Dar la demostración completa.

1. Demostrar: $\neg S$
   (1) $\neg R \;\&\; T$ P
   (2) $S \rightarrow R$ P

2. Demostrar: $A \;\&\; B$
   (1) $C \rightarrow A$ P
   (2) $C$ P
   (3) $C \rightarrow B$ P

3. Demostrar: $\neg\neg Q$
   (1) $P \;\&\; Q$ P

4. Demostrar: $B \;\&\; D$
   (1) $B \;\&\; C$ P
   (2) $B \rightarrow D$ P

5. Demostrar: $\neg S \;\&\; Q$
   (1) $\neg S \rightarrow Q$ P
   (2) $\neg(T \;\&\; R)$ P
   (3) $S \rightarrow T \;\&\; R$ P

6. Demostrar: $A \;\&\; C$
   (1) $A \;\&\; \neg B$ P
   (2) $\neg C \rightarrow B$ P

*Disjunciones como premisas.* Quizá se ha observado que en las reglas estudiadas hasta ahora, se han estado utilizando conjunciones, condicionales, y negaciones. En las reglas dadas aparecen los términos de enlace: «y», «si... entonces...», y «no». Sin embargo, no se ha considerado, ni se ha dado ninguna regla en la que interviniera el término de enlace «o». No se han utilizado disjunciones en las premisas cuando se deseaba mostrar el uso de una regla de inferencia.

Antes de introducir una regla conviene, sin embargo, considerar el *significado* de una disjunción en Lógica. En el lenguaje corriente hay dos maneras posibles de usar la palabra «o». Algunas veces se quiere significar que se presenta una u otra de dos cosas, pero no las dos a la vez. Este es el sentido *excluyente* de «o». Por ejemplo, en la proposición:

Juan vive en el norte de España o vive en el sur de España

se expresa que una de las dos proposiciones atómicas es cierta y la otra es falsa.

En Lógica, sin embargo, daremos un significado más amplio a la disjunción. Se denomina sentido *incluyente*. En el sentido inclusivo, cuando se utiliza la palabra «o», se supone que *por lo menos* un miembro de la disjunción se presenta y quizá ambos. Supóngase un cartel en una de las entradas de un estadio que diga:

Los periodistas o fotógrafos han de entrar por aquí.

El significado de la proposición es la disjunción:

Los periodistas han de entrar por aquí, o los fotógrafos
han de entrar por aquí.

Es una disjunción en sentido incluyente o sea, que por lo menos es cierto un miembro de la disjunción y pueden serlo ambos. En el ejemplo, la proposición significa que si una persona es un periodista ha de entrar por dicha puerta o si es un fotógrafo ha de entrar por dicha puerta. Además, los fotógrafos de la prensa, que sean a la vez periodistas, también entrarán por la misma puerta.

En Lógica, una disjunción significa que *por lo menos un* miembro de la disjunción es cierto y *quizá ambos* lo son. Se ha de tener presente que en Lógica se utiliza la palabra «o» en sentido incluyente y así se evitará el error de creer que si un miembro de una disjunción es cierto el otro ha de ser falso. Ambos pueden ser ciertos. La disjunción dice simplemente que *por lo menos* uno es cierto.

Con el significado lógico de una disjunción puesto en claro, ¿puede pensarse en una posible regla de inferencia que se aplique a una disjunción?

Consideremos la siguiente proposición como premisa:

O la producción aumenta o el precio aumenta.

Veamos si se puede imaginar una segunda premisa de manera que de las dos se pueda deducir una conclusión válida. La conclusión será *válida* cuando resulte de las premisas utilizando una «buena» regla de inferencia; y una regla es «buena» si equivale simplemente a asegurar que siempre que las premisas sean proposiciones ciertas la conclusión que resulta por aquella regla es una proposición cierta. Esto significa que reglas válidas de deducción nunca permiten pasar de premisas ciertas a conclusiones falsas.

*Modus Tollendo Ponens.* La regla anteriormente sugerida es la que se denomina *modus tollendo ponens.* Una vez más, el nombre latino dice algo acerca de la regla. Dice que *negando* (tollendo) un miembro de una disjunción se *afirma* (ponens) el otro miembro.

Simbólicamente, el *modus tollendo ponens* se puede expresar·

| | |
|---|---|
| De la premisa | $P \vee Q$ |
| y la premisa | $\neg P$ |
| se puede concluir | $Q$ |

o

| | |
|---|---|
| De la premisa | $P \vee Q$ |
| y la premisa | $\neg Q$ |
| se puede concluir | $P$ |

La abreviatura para *modus tollendo ponens* es TP.

Añadiendo paréntesis, *modus tollendo ponens* se puede escribir:

| | |
|---|---|
| De | $(P) \vee Q$ |
| y | $\neg(P)$ |
| se deduce | $(Q)$ |

o

| | |
|---|---|
| De | $(P) \vee (Q)$ |
| y | $\neg(Q)$ |
| se deduce | $(P)$ |

Supóngase que se tiene como premisa la disjunción

O esta sustancia contiene hidrógeno o contiene oxígeno

La segunda premisa dice

Esta sustancia no contiene hidrógeno.

Por medio de el *modus tollendo ponens* se puede concluir:

Esta sustancia contiene oxígeno.

Para aclarar la *forma* de esta inferencia, se puede simbolizar el ejemplo anterior. Sea

P = «Esta sustancia contiene hidrógeno»
Q = «Esta sustancia contiene oxígeno».

La demostración de la conclusión es:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $P \vee Q$ | P |
| (2) | $\neg P$ | P |
| (3) | $Q$ | TP 1, 2 |

Obsérvese que una premisa (la negación) niega una parte de la disjunción. La conclusión afirma precisamente la otra parte. No importa cual sea el miembro negado, el derecho o el izquierdo. La disjunción dice que por lo menos un miembro se cumple; por tanto, si se encuentra que uno de los miembros *no* se cumple, se sabe que el otro ha de cumplirse.

Una disjunción en Lógica significa que por lo menos una de las dos proposiciones es cierta *y quizá ambas*. Supuesto que se tiene una premisa que dice que un miembro de la disjunción es cierto, ¿se puede concluir algo sobre el otro miembro? Por ejemplo, considérese la proposición anterior sobre oxígeno e hidrógeno. Si la segunda premisa hubiera sido «La sustancia tiene hidrógeno», ¿qué se podría concluir del oxígeno, en caso de poder concluir algo? No se podría concluir nada.

Véanse los ejemplos que siguen. Son ejemplos del uso de la regla *modus tollendo ponens*. Estas reglas no están limitadas a proposiciones atómicas. Igual que los otros tipos de proposiciones, la disjunción tiene lugar entre proposiciones moleculares de igual manera que entre proposiciones atómicas. Obsérvese que en muchas proposiciones se necesitan paréntesis para indicar cuál es el término de enlace dominante.

*a.* (1) $Q \vee R$ P
(2) $\neg R$ P
(3) $Q$ TP 1, 2

*b.* (1) $(P \,\&\, Q) \vee S$ P
(2) $\neg S$ P
(3) $P \,\&\, Q$ TP 1, 2

*c.* (1) $\neg S \vee T$ P
(2) $\neg T$ P
(3) $\neg S$ TP 1, 2

*d.* (1) $\neg P \vee \neg Q$ P
(2) $\neg\neg P$ P
(3) $\neg Q$ TP 1, 2

*e.* (1) $(P \,\&\, Q) \vee (R \,\&\, S)$ P
(2) $\neg(P \,\&\, Q)$ P
(3) $R \,\&\, S$ TP 1, 2

Se usa también el hecho de ser $P$ la negación de $\neg P$ al aplicar *modus tollendo ponens,* como se muestra en los ejemplos siguientes.

*a.* (1) $Q \vee \neg R$ P
(2) $R$ P
(3) $Q$ TP 1, 2

*b.* (1) $\neg(P \,\&\, Q) \vee S$ P
(2) $P \,\&\, Q$ P
(3) $S$ TP 1, 2

*c.* (1) $\neg S \vee T$ P
(2) $S$ P
(3) $T$ TP 1, 2

## Ejercicio 8

**A.** ¿Qué conclusión, en forma de proposición escrita en castellano, se puede deducir de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes utilizando la regla TP?

1. Este hombre o es un abogado o es un político. No es un abogado.
2. El puerto de Nueva Orleans o está en el golfo de Méjico o está en el océano Atlántico. No está en el océano Atlántico.
3. O la energía interna de un átomo puede cambiar con continuidad o cambia sólo a saltos. La energía interna de un átomo no puede cambiar con continuidad.
4. Juan o ha terminado el libro o no ha ido a devolverlo hoy a la biblioteca. Juan no ha terminado el libro.
5. O hace frío y llueve o el festival se celebrará al aire libre. Ni hace frío ni llueve.

**B.** Deducir una conclusión de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas usando el *modus tollendo ponens.*

1. (1) $\neg Q \vee R$ P
(2) $\neg R$ P

2. (1) $T \vee (P \rightarrow Q)$ P
(2) $\neg T$ P

3. (1) $\neg T \vee \neg R$ P
(2) $\neg\neg R$ P

4. (1) $P \vee Q$ P
(2) $\neg Q$ P

5. (1) $(S \,\&\, T) \vee R$ P
   (2) $\neg(S \,\&\, T)$ P

6. (1) $(P \,\&\, Q) \vee S$ P
   (2) $\neg S$ P

7. (1) $\neg Q \vee R$ P
   (2) $\neg\neg Q$ P

8. (1) $\neg T$ P
   (2) $T \vee \neg S$ P

9. (1) $\neg(P \,\&\, Q)$ P
   (2) $T \vee (P \,\&\, Q)$ P

10. (1) $T \vee U$ P
    (2) $\neg T$ P

11. (1) $S \vee \neg T$ P
    (2) $T$ P

12. (1) $\neg(S \,\&\, R) \vee T$ P
    (2) $S \,\&\, R$ P

13. (1) $\neg(P \rightarrow Q) \vee R$ P
    (2) $P \rightarrow Q$ P

**C.** Demostrar que las conclusiones son consecuencia de las premisas dadas en los ejercicios que siguen. Dar una demostración completa.

1. Demostrar: $P$
   (1) $P \vee Q$ P
   (2) $\neg T$ P
   (3) $Q \rightarrow T$ P

2. Demostrar: $B$
   (1) $\neg A \vee B$ P
   (2) $\neg A \rightarrow E$ P
   (3) $\neg E$ P

3. Demostrar: $M$
   (1) $S \,\&\, P$ P
   (2) $M \vee \neg N$ P
   (3) $S \rightarrow N$ P

4. Demostrar: $A \,\&\, B$
   (1) $B$ P
   (2) $B \rightarrow \neg D$ P
   (3) $A \vee D$ P

5. Demostrar: $H$
   (1) $\neg S$ P
   (2) $S \vee (H \vee G)$ P
   (3) $\neg G$ P

6. Demostrar: $P$
   (1) $T \rightarrow P \vee Q$ P
   (2) $\neg\neg T$ P
   (3) $\neg Q$ P

7. Demostrar: $R$
   (1) $\neg Q \vee S$ P
   (2) $\neg S$ P
   (3) $\neg(R \,\&\, S) \rightarrow Q$ P

**D.** Primero simbolizar las premisas y conclusiones siguientes. Después demostrar que las conclusiones son consecuencia lógica de las premisas. Recuérdese que cuando las proposiciones atómicas están ya simbolizadas por símbolos matemáticos, no hace falta utilizar letras mayúsculas. Conservar las proposiciones atómicas con sus símbolos matemáticos y simbolizar los términos de enlace.

1. O $x=y$ o $x=z$.
   Si $x=z$ entonces $x=6$.
   No es $x=6$.
   Por tanto, $x=y$.
2. A la vez $1+1=2$ y $2+1=3$.
   O $3-2=1$ o no ocurre que $2-1=1$.
   Si $1+1=2$ entonces $2-1=1$.
   Por tanto, $3-2=1$.
3. Si $0\neq x$ entonces $x\neq y$.
   O $x=y$ o $x=z$. $x\neq z$.
   Por tanto, $x=0$.
4. O $x=0$ o $x=y$.
   Si $x=y$ entonces $x=z$. $x\neq z$.
   Por tanto, $x=0$.
5. Si $x=y$ entonces $x=z$.
   Si $x=z$ entonces $x=w$.
   O $x=y$ o $x=0$.
   Si $x=0$ entonces $x+u=1$. $x+u\neq 1$.
   Por tanto, $x=w$.

## ● 2.3 *Deducción proposicional*

Hemos aprendido algunas reglas de buena inferencia que permiten pasar lógicamente de un conjunto de afirmaciones a otra afirmación. De la proposición $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$ y la proposición $\mathsf{P}$, por ejemplo, se puede deducir la proposición $\mathsf{Q}$.

Se ha visto también que se puede demostrar que una conclusión se deduce lógicamente de un conjunto de premisas, aún cuando no se pueda ir directamente de las premisas a la conclusión en un solo paso. Yendo por pasos sucesivos, cada uno permitido por una regla, es posible alcanzar la conclusión deseada. Si es así, se ha *demostrado* que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas dadas.

Con el manejo de unas pocas reglas, empezamos a aprender el método de las *deducciones formales*. Es decir, hemos aprendido el camino preciso de demostrar que los razonamientos son válidos. Un *razonamiento* es simplemente un conjunto de proposiciones como premisas y una conclusión deducida de estas premisas. Cuando decimos que es *válido* entendemos que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas. Una deducción formal es una serie de proposiciones o pasos, en la cual cada paso o es una premisa o está deducido directamente de los pasos que le preceden por medio de una determinada regla.

En la introducción a este capítulo, se comparaban las reglas de la Lógica a las de un juego; y se puede imaginar la deducción como la realización de un juego. Se han aprendido reglas suficientes para hacer una deducción simple. La deducción o demostración es el juego y las reglas del juego son precisamente las reglas de inferencia. Se puede hacer cualquier movimiento, dar cualquier paso que está permitido por una regla, y se ha de poder justificar cada paso dado indicando la regla seguida. El objetivo que nos proponemos alcanzar en este juego es la conclusión establecida. El propósito de cada movimiento que se hace, es avanzar un paso acercándose al objetivo. La posición de partida con la que se inicia el juego es un conjunto de premisas. Las premisas están justificadas por la *regla de premisas* que es:

> Una premisa puede ser introducida en cualquier punto de una deducción.

La aplicación de las reglas no depende del uso que se haya hecho de las mismas en líneas anteriores.

La regla de las premisas se ha utilizado ya al principio de las deducciones. Como esta regla es familiar, la P para la regla de premisas se omitirá corrientemente cuando se da un problema en forma simbolizada. En deducciones formales, sin embargo, se escribirá una P antes de cada premisa dada, para indicar que las líneas están justificadas por la regla de premisas.

Resumiendo, se empieza con un conjunto de premisas y el objeto es pasar de estas premisas a una conclusión particular. Cada movimiento que se hace, cada línea que se escribe debajo, ha de ser permitido por una regla de inferencia definida.

Hemos aprendido a efectuar deducciones simples. Ahora se considerarán algunas deducciones complicadas.

Consideremos el razonamiento del siguiente ejemplo:

*Ejemplo a.*

Si la ballena es un mamífero entonces toma oxígeno del aire. Si toma su oxígeno del aire, entonces no necesita branquias. La ballena es un mamífero y vive en el océano. Por tanto, no necesita branquias.

La conclusión que se desea demostrar o deducir es la proposición «no necesita branquias». (La palabra, «por tanto», pone de manifiesto que la proposición final es la conclusión del razonamiento.)

El primer paso en este proceso es simbolizar el razonamiento de manera que la deducción sea perfectamente clara.

Sea

$W =$ «La ballena es un mamífero»
$O =$ «Toma su oxígeno del aire»
$G =$ «Necesita branquias»
$H =$ «Habita en el océano».

Entonces

| | |
|---|---|
| la primera premisa es | $W \rightarrow O$ |
| la segunda premisa es | $O \rightarrow \neg G$ |
| la tercera premisa es | $W \ \& \ H$ |
| la conclusión es | $\neg G$. |

La deducción proposicional se puede escribir como se indica a continuación:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $W \rightarrow O$ | P |
| (2) | $O \rightarrow \neg G$ | P |
| (3) | $W \ \& \ H$ | P |
| (4) | $W$ | S 3 |
| (5) | $O$ | PP 1, 4 |
| (6) | $\neg G$ | PP 2, 5 |

Los tres primeros pasos son premisas. Los pasos 4, 5 y 6 están justificados por reglas de inferencia aplicadas a líneas anteriores. A la derecha de cada paso o línea, se indica la manera como se justifica aquella línea. Por ejemplo, puesto que las tres primeras líneas son premisas, se escribe la letra P a la derecha de aquellas líneas. Estas líneas son dadas y no deducidas y, por tanto, no necesitan ninguna otra justificación.

La línea 4 se deduce de la línea 3 por la regla de simplificación. Por tanto, se escribe la abreviatura de la regla S a la derecha de aquella línea, seguida del número de la línea de la que se ha deducido. La línea 5 se obtiene de las líneas 1 y 4 por *modus ponendo ponens*. Considerando la línea 1, $W \rightarrow O$, y la línea 4, $W$, se puede ver rápidamente que *modus ponendo ponens* nos permite obtener $O$. Este movimiento se indica por la abreviatura del nombre de la regla PP, y el número de las líneas de las que se ha deducido la línea 5. De forma análoga se indica que la línea 6 se ha deducido por *modus ponendo ponens* de las líneas 2 y 5.

Puesto que la línea 6 representa la conclusión deseada, objetivo de nuestra deducción, la deducción es completa. Se ha demostrado que $\neg G$ es consecuencia lógica de las tres premisas del razonamiento. Así, puesto que $\neg G$ representa la proposición «No necesita branquias» en el razonamiento puesto como ejemplo se ha demostrado que la conclusión de aquel razonamiento es válida. Este es un ejemplo de una *deducción formal*.

A fin de que cada paso de la demostración resulte perfectamente claro a todos aquellos que lo lean, nos atendremos estrictamente a la forma indicada para hacer deducciones. No se olvide que un objetivo de la Lógica es ser preciso. Para estar seguro de la precisión, anótese cada paso que se efectúe y el por qué está permitido. Para cada paso, escríbase primero el número de aquella línea, después la proposición misma, y finalmente lo que justifica aquel paso por la abreviatura de la regla que lo ha permitido. Si el paso está deducido de otras líneas por una regla, entonces añádase el número o números de las líneas de las que se ha deducido.

Consideremos el siguiente razonamiento:

*Ejemplo b.*

> Si la enmienda no fue aprobada entonces la Constitución queda como estaba. Si la Constitución queda como estaba entonces no podemos añadir nuevos miembros al comité. O podemos añadir nuevos miembros al comité o el informe se retrasará un mes. Pero el informe no se retrasará un mes. Por tanto la enmienda fue aprobada.

Sea,

$\mathsf{A}$ = «La enmienda fue aprobada»
$\mathsf{C}$ = «La Constitución queda como estaba»
$\mathsf{M}$ = «Podemos añadir nuevos miembros al comité»
$\mathsf{R}$ = «El informe se retrasará un mes».

Entonces;

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg \mathsf{A} \rightarrow \mathsf{C}$ | P |
| (2) | $\mathsf{C} \rightarrow \neg \mathsf{M}$ | P |
| (3) | $\mathsf{M} \vee \mathsf{R}$ | P |
| (4) | $\neg \mathsf{R}$ | P |
| (5) | $\mathsf{M}$ | TP 3, 4 |
| (6) | $\neg \mathsf{C}$ | TT 2, 5 |
| (7) | $\mathsf{A}$ | TT 1, 6 |

La conclusión del razonamiento es «La enmienda fue aprobada». El objetivo entonces es mostrar que la conclusión es consecuencia lógica de las cuatro premisas del razonamiento. *Primero* se indican las letras con que se simboliza cada una de las proposiciones atómicas. *Después* se simboliza cada una de las cuatro premisas y se indica que están justificadas en la demostración poniendo junto a cada una la letra «P». Las premisas son las cuatro primeras líneas en la demostración.

El movimiento *siguiente* es el intentar obtener la conclusión, que es A, utilizando las reglas aprendidas. La línea 5 se obtiene de las líneas 3 y 4 por *modus tollendo ponens,* TP. La línea 6 se deduce de las líneas 2 y 5 por *modus tollendo tollens, TT*. La línea 7 se obtiene de las líneas 1 y 6 por *modus tollendo tollens*. Se ha mostrado que la conclusión del razonamiento se deduce de las premisas por medio de una deducción formal.

Consideremos la siguiente deducción.

*Ejemplo c.*

> Si Tomás tiene diecisiete años, entonces Tomás tiene la misma edad que Juana. Si Joaquín tiene distinta edad que Tomás, entonces Joaquín tiene distinta edad que Juana. Tomás tiene diecisiete años y Joaquín tiene la misma edad que Juana. Por tanto, Joaquín tiene la misma edad que Tomás y Tomás la misma que Juana.

Sea

E = «Tomás tiene diecisiete años»
S = «Tomás tiene la misma edad que Juana»
T = «Joaquín tiene la misma edad que Tomás»
J = «Joaquín tiene la misma edad que Juana».

Entonces

| | |
|---|---|
| (1) $E \rightarrow S$ | P |
| (2) $\neg T \rightarrow \neg J$ | P |
| (3) $E \;\&\; J$ | P |
| (4) $E$ | S 3 |
| (5) $S$ | PP 1, 4 |
| (6) $J$ | S 3 |
| (7) $T$ | TT 2, 6 |
| (8) $T \;\&\; S$ | A 5, 7 |

## Ejercicio 9

**A.** En cada uno de los ejemplos siguientes demostrar que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas. Hacer cada deducción exactamente igual a como se han hecho las deducciones en los ejemplos anteriores, con líneas numeradas, abreviaturas para cada regla utilizada, e indicando además los números de las líneas empleadas para la deducción de cada paso.