CAPITULO 4

TABLAS DE CERTEZA

● 4.1 *Tablas de certeza*

Un método en general más conveniente que el diagrama para analizar los valores de certeza de proposiciones, es el de poner todas las posabilidades de certeza o falsedad en forma de una tabla. En efecto, todas las reglas de certeza funcional que se utilizan para proposiciones moleculares pueden resumirse en forma de tabla. *Estas tablas básicas de certeza* indican rápidamente si una proposición molecular es cierta o falsa si se conoce la certeza o falsedad de las proposiciones que la forman. Se dan a continuación las tablas básicas de certeza para los cinco términos de enlace de proposiciones. Si se conocen los valores de certeza de una proposición P y de una proposición Q, se busca la línea que presenta esta combinación particular de valores de certeza y en la misma línea en la columna de la proposición molecular se encontrará su valor de certeza.

Negación

P	$\neg$P
C	F
F	C

Conjunción

P	Q	P & Q
C	C	C
C	F	F
F	C	F
F	F	F

Disjunción

P	Q	P $\vee$ Q
C	C	C
C	F	C
F	C	C
F	F	F

Condicional

P	Q	P $\rightarrow$ Q
C	C	C
C	F	F
F	C	C
F	F	C

Equivalencia

P	Q	P $\leftrightarrow$ Q
C	C	C
C	F	F
F	C	F
F	F	C

En estas tablas se hallan resumidas todas las reglas de aplicación estudiadas. Si se tiene duda sobre alguna de estas reglas se pueden utilizar entonces estas tablas como tablas de referencia.

En el Capítulo 3 se indicó que necesitabamos un método general de determinación de validez por medio del cual pudiéramos estar seguıos de la validez de cada regla de inferencia sugerida. Las tablas de certeza proporcionan un método mecánico para comprobar la validez. Se puede comprobar la validez de cualquier inferencia sin hacer referencıa a una de las reglas particulares dadas que permita aquella inferencia.

Antes de desarrollar esta comprobación conviene volver bruscamente a la noción misma de inferencia válida. Si una inferencia es válida, entonces en cada posible interpretación o asignación de certeza, si las premisas son ciertas la conclusión del razonamiento será también cierta. Las tablas de certeza proporcionan todas las posibles asignaciones de certeza, y el método de comprobar la validez de cualquier inferencia es el siguiente: Primero, se escriben todas las combinaciones posibles de valores de certeza para las proposiciones atómicas incluidas en el ejemplo. Segundo, se determinan los valores de certeza para todas las *premisas* y de la conclusión del razonamiento. Tercero, se buscan las líneas que presentan todas las premisas como proposiciones ciertas; si la conclusión es también cierta para *cada* una de estas líneas, entonces el razonamiento es válido. Pero si hay *alguna* línea para la que todas las premisas son ciertas y la conclusión es falsa, el razonamiento no es válido y la conclusión no es una consecuencia lógica.

Se considera ahora un ejemplo de una regla de inferencia ya conocida. Se utilizará una tabla de certeza para confrontar la validez de la regla del *modus tollendo ponens*. Las premisas son de la forma **P** $\vee$ **Q** y $\neg$**P**. Por tanto, es necesario hallar todos los posibles valores de certeza para estas dos proposiciones. Para ello, primero se anotan todas las posibles combinaciones de certeza o falsedad para las proposiciones atómicas que constituyen las proposiciones moleculares. Las proposiciones atómicas son la proposición **P** y la proposición **Q**. El número de combinaciones posibles de certeza o falsedad depende del número de proposiciones atómicas que intervienen. En este caso se tienen dos proposiciones atómicas, y puesto que para cada una de ellas hay dos posibles valores de certeza, el número de líneas en la tabla de certeza será 2×2 o 2^2.* Se construye la tabla de certeza en la forma siguiente:

P	Q	P $\vee$ Q	$\neg$P
C	C	C	F
C	F	C	F
F	$\boxed{\text{C}}$	C	C
F	F	F	C

* Si hay tres proposiciones atómicas, entonces hay dos veces más, o sea, ocho combinaciones posibles de certeza o falsedad. Puesto que hay dos posibles valores de certeza para cada proposición atómica, entonces para tres proposiciones atómicas se tiene $2 \times 2 \times 2$ ó 2^3 combinaciones. La regla general es que si hay n proposiciones atómicas, entonces hay 2^n combinaciones de valores posibles de certeza.

El método para la formación de la tabla de certeza anterior es el siguiente: Se empieza poniendo todas las combinaciones de certeza o falsedad debajo de las proposiciones P y Q. El valor de certeza de las proposiciones moleculares depende de los valores de certeza de las proposiciones P y Q. Por tanto, al llenar la columna correspondiente a cada proposición molecular hay que referirse a los valores de certeza de sus partes. Por ejemplo, en la primera línea se tiene P como cierta y Q como cierta. Por tanto, $P \vee Q$ es una proposición cierta, y puesto que P es una proposición cierta $\neg P$ es falsa. Por otra parte, en la última línea de la tabla P y Q son ambas proposiciones falsas; por tanto, la proposición $P \vee Q$ ha de ser falsa, y $\neg P$ es cierta.

El paso siguiente es ver las líneas en las que *todas* las premisas del razonamiento son ciertas. En este caso, las premisas del razonamiento son $P \vee Q$ y $\neg P$. Mirando la tabla de certeza se ve que las premisas forman las dos últimas columnas de la tabla. Observando las columnas encabezadas por ellas se encuentra sólo un caso donde ambas premisas son simultáneamente ciertas. Esto ocurre en la tercera línea. Para indicar en las tablas que las premisas son simultáneamente ciertas se encierran las C en círculos para las premisas de la tercera línea. Puesto que una inferencia válida requiere que en todos los casos en que las premisas son ciertas la conclusión sea también cierta, la conclusión será también cierta en la tercera línea si el razonamiento es válido. La conclusión del razonamiento es Q. Se comprueba ahora la columna de la Q para el valor de certeza de la tercera línea. Puesto que se encuentra que es cierto, entonces se sabe que la inferencia en cuestión es válida. Para poner esto de manifiesto en la tabla se pone un cuadrado alrededor de la asignación de certeza de la conclusión en cada línea en la que todas las premisas son ciertas; es decir, en cada línea donde los valores de certeza de las premisas están señalados con un círculo.

Para presentar un contraste con la inferencia válida del *modus tollendo ponens* consideremos el error de afirmar el consecuente, discutido en el capítulo anterior. Lo que se pretende es mostrar cómo se puede utilizar el análisis de las tablas de certeza para demostrar que se trata de un error. Esta inferencia errónea tiene la forma

$$P \rightarrow Q$$
$$Q$$
$$P$$

Las premisas son $P \rightarrow Q$ y Q; la conclusión es P. Puesto que se tienen dos proposiciones atómicas, P y Q, la tabla de certeza ha de tener cuatro líneas. Ambas premisas son ciertas en las líneas (1) y (3) de la tabla, pero sólo en la línea (1) la conclusión P es también cierta. Al aparecer F en la columna P en la tercera línea se sabe por la tabla que la inferencia es errónea.

P	Q	P ⟶ Q
$\boxed{C}$	C	C
C	F	F
$\boxed{F}$	C	C
F	F	C

Es importante comprender exactamente el motivo por el cual la tabla de certeza muestra que esta inferencia es errónea. En la línea (3) se observa que **P** es falsa y **Q** es verdadera. Si se eligen dos proposiciones atómicas cualesquiera que tengan respectivamente estos valores de certeza, se pueden construir las premisas ciertas **P ⟶ Q** y **Q** y la conclusión falsa **P**. En este caso aparece sin más que la conclusión es falsa, pues es precisamente la proposición atómica **P**. Por ejemplo, sea **P** = «1 = 2» y **Q** = «0 = 0». Entonces la inferencia errónea sería:

Si 1 = 2 entonces 0 = 0
0 = 0
Por tanto, 1 = 2.

En el Capítulo 3, se sugirió un ejemplo de inferencia válida que no ha sido introducido como regla de inferencia. Se sugirió que de la proposición **P ⟶ Q** se podría inferir la proposición **¬P ∨ Q**. Se puede comprobar la validez de esta inferencia construyendo la tabla de certeza apropiada. Las dos proposiciones atómicas son la proposición **P** y la proposición **Q**; así se empezará llenando las columnas **P** y **Q**. Después se obtienen los valores de certeza para la premisa **P ⟶ Q**. Para conseguir los valores de certeza para la disjunción **¬P ∨ Q**, que es la conclusión deseada, se han de encontrar primero los valores de certeza para **¬P**.

P	Q	¬P	P ⟶ Q	¬P ∨ Q
C	C	F	C	$\boxed{C}$
C	F	F	F	F
F	C	C	C	$\boxed{C}$
F	F	C	C	$\boxed{C}$

El método para llenar las columnas en la tabla de certeza anterior es: Colocar los valores de certeza en las columnas 1 y 2. Obtener la columna (3), **¬P**, haciendo referencia a los valores de certeza de la columna 1. Se obtienen los valores para la columna 4 atendiendo conjuntamente a los valores de las columnas 1 y 2. Finalmente, se obtienen los valores de la columna 5 considerando la columna 2 y la columna 3, conjuntamente.

La columna 4 representa la única premisa en el ejemplo de inferencia. Se consideran los casos en los que esta premisa es cierta. Para esta premisa se tiene *cierta* como valor de certeza en las líneas (1), (3) y (4). Por tanto, se encierran en círculos las tres C. Si la inferencia es válida, entonces la conclusión será cierta en cada una de estas líneas. Confrontando la columna 5, que es la conclusión que se busca, se encuentra la letra C en cada línea en la que aparece la letra C para la premisa, como se indica por las C en cuadrados. Así se concluye que la inferencia sugerida es válida.

Para poner de manifiesto la potencia de este método de análisis, será útil considerar un ejemplo más complicado en el que no es posible de antemano saber nada de su validez o no validez. Se considera el siguiente razonamiento matemático.

Si $x=0$ y $y=z$, entonces $y>1$

$y \not> 1$

Por tanto, $y \neq z$.

Se desea saber si este razonamiento es válido. Aparecen en él tres proposiciones atómicas, que se simbolizan en la forma

A= «$x=0$»
B= «$y=z$»
C= «$y>1$».

Puesto que cada proposición atómica puede ser verdadera o falsa, hay $2^3=8$ combinaciones de certeza y, por tanto, ocho líneas en la tabla de certeza.*

Mediante los símbolos **A**, **B**, y **C**, el razonamiento considerado se puede simbolizar

$$\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$$
$$\neg \mathbf{C}$$
$$\neg \mathbf{B}$$

* Para estar cierto de haber obtenido las ocho combinaciones y no escribir alguna dos veces, puede ser útil el siguiente procedimiento sistemático. Se encabezan las tres primeras columnas con **A**, **B** y **C**. Debajo de **C** escribir alternativamente C y F. Debajo de **B** escribir alternativamente dos C y dos F. Y, finalmente, debajo de **A** escribir alternativamente cuatro C y cuatro F. Esta manera de asignar valores de certeza a las proposiciones atómicas dará todas las posibles combinaciones sin ninguna fila duplicada.

La tabla de certeza para ello es

A	B	C	A & B	A & B → C	¬C	¬B
C	C	C	C	C	F	F
C	C	F	C	F	C	F
C	F	C	F	C	F	C
C	F	F	F	C	C	$\boxed{C}$
F	C	C	F	C	F	F
F	C	F	F	C	C	$\boxed{F}$
F	F	C	F	C	F	C
F	F	F	F	C	C	$\boxed{C}$

Como indican los círculos, tres de las ocho líneas tienen las dos premisas ciertas, pero como indican los cuadrados, para una de estas líneas la conclusión no es cierta. La linea (6) muestra que el razonamiento es erróneo. Si se toma para x el valor 1, y para y y z el 0, se puede ver esto fácilmente:

Si $1=0$ y $0=0$, entonces $0>1$
$0 \ngtr 1$
Por tanto, $0 \neq 0$.

La primera premisa es cierta porque el antecedente es falso, y la segunda premisa es evidentemente cierta, pero la conclusión es claramente falsa.

Examinando esta tabla de certeza se observa que la columna 4 representa un paso intermedio. A & B no es ni una proposición atómica, ni una premisa ni una conclusión. Es una proposición molecular que es parte de una de las premisas. Esto ilustra una regla que debería seguirse siempre. La tabla de certeza para analizar un razonamiento debería tener una columna (a) para cada proposición atómica, y una columna (b) para cada proposición molecular que se presenta en el razonamiento. La condición (b) indica que habrá una columna cada vez que se presente un término de enlace en cada proposición con la excepción, que no es necesario repetir, de cuando el mismo término de enlace liga las mismas proposiciones dos veces. Así, si se tiene A & B y A & B → C se necesitaría sólo una columna para A & B. En el caso considerado se necesitarían siete columnas, tres para las proposiciones atómicas A, B, y C, y cuatro para las proposiciones moleculares A & B, A & B → C, ¬C y ¬B.

EJERCICIO 1

A. Mostrar por medio de una tabla de certeza cuál de los ejemplos de inferencia siguientes es válido. Construir la tabla de certeza completa y escribir las palabras «válida» o «no válida» junto a ella.

1. Si Isabel se retrasa, entonces Cristina es puntual.
   Si Isabel no se retrasa, entonces Cristina no es puntual.
   Por tanto, o Isabel se retrasa o Cristina es puntual.
2. Si tengo 18 años, entonces soy mayor que Pablo.
   Si no tengo 18 años, entonces soy más joven que Jorge.
   Por tanto, o tengo 18 años o soy más joven que Jorge.
3. O García no entrega la mercancía o el contrato se considera legal.
   Por tanto, si García entrega la mercancía, entonces el contrato se considera legal.
4. Si yo fuera el presidente, entonces viviría en Washington, D. C.
   No soy el presidente.
   Por tanto, no vivo en Washington, D. C.
5. Un átomo de hidrógeno tiene un protón en su núcleo y el número atómico del hidrógeno es uno.
   Por tanto, un átomo de hidrógeno tiene un protón en cada núcleo si y sólo si el número atómico del hidrógeno es 1.
6. Los terrenos sembrados continuamente se agotan si y sólo si no se han tomado medidas para restablecer los minerales extraídos por las cosechas.
   Por tanto, o los terrenos sembrados continuamente se agotan o se han tomado medidas para restablecer los minerales extraídos por las cosechas.
7. O AB es mayor que BC o AB no es igual a CD.
   Por tanto, AB no es igual a CD y AB es mayor que BC.
8. $(P \vee Q)\ \&\ \neg Q$.
   Por tanto, P.
9. $\neg Q \rightarrow \neg P$.
   Por tanto, $P \rightarrow Q$.
10. $P \rightarrow \neg Q$. $\neg Q$.
    Por tanto, $\neg P$.

B. Completar la tabla de certeza dada a continuación para mostrar que la ley del silogismo hipotético es una buena regla.

P	Q	R	P → Q	Q → R	P → R
C	C	C			
C	C	F			
C	F	C			
C	F	F			
F	C	C			
F	C	F			
F	F	C			
F	F	F			

C. Construir una tabla de certeza para demostrar que $\neg P \ \& \ \neg Q$ es consecuencia lógica de $\neg(P \lor Q)$.

D. Construir una tabla de certeza para probar que la regla de adjunción es una buena regla de inferencia.

E. Construir una tabla para probar que la regla, *modus tollendo ponens* es una buena regla.

F. Probar mediante una tabla de certeza cuáles de los siguientes razonamientos matemáticos son válidos y cuáles no son válidos.

1. $x=3$. Por tanto, $y=0 \rightarrow x=3$.
2. $x\neq y \rightarrow x=y$. $y=1 \lor x\neq y$. Por tanto, $y=1$.
3. $x<5 \rightarrow x\neq y$. $x\neq y \ \& \ x<5$. Por tanto, $x\nless 5 \ \& \ x=y$.
4. $x<3 \rightarrow x\nless 3$. Por tanto, $x\nless 3$.
5. $x=y \rightarrow x\neq y \ \& \ y=2$. Por tanto, $x\neq y$.
6. $x=y \rightarrow x=y \ \& \ y=2$. Por tanto, $x=y$.
7. $x<z \rightarrow x\neq y$. $\neg(x\nless z \ \& \ x=y)$. Por tanto, $x<z \lor x=y$.
8. $3\nless y \rightarrow x>y$. $x>y \rightarrow (x\ngtr y \ \& \ 3\nless y)$. Por tanto, $3<y \lor x>y$.
9. $x^2=4 \rightarrow x=2$. $\neg(x=2 \lor x^2\neq 4)$. Por tanto, $x=2 \ \& \ x\neq 2$.
10. $x=2 \lor x<2$. $x=3 \rightarrow x\neq 2$. $x=3 \rightarrow x\nless 2$. Por tanto, $x\neq 3$.
11. $x=y \leftrightarrow y\neq 1$. $\neg(x=y \ \& \ y\neq 1)$. Por tanto, $y\neq 1$.
12. $x\neq y \rightarrow x<5$. $x\nless 5 \lor y<6$. $x=y \rightarrow y<6$.

● 4.2 *Tautologías*

Una proposición molecular es una *tautología* si es cierta, cualesquiera que sean los valores de certeza de las proposiciones atómicas que la componen. En una tautología se pueden sustituir sus proposiciones atómicas por otras proposiciones atómicas cualesquiera, ciertas o falsas, y la proposición es también cierta. Por ejemplo, para cualquier proposición atómica **P**

$$P \vee \neg P$$

es una tautología. Si **P** es cierta, entonces $P \vee \neg P$ es cierta. Además, si es falsa, entonces $P \vee \neg P$ es también cierta.

Se puede presentar esto mediante una tabla de certeza.

P	¬P	P ∨ ¬P
C	F	C
F	C	C

En una tabla de certeza, si una proposición es una tautología, entonces cada línea ha de tener una «C» en la columna encabezada por ella, lo que indica que la proposición es siempre cierta independientemente de las combinaciones de los valores de certeza de sus proposiciones atómicas. Se ha de recordar que en cada caso particular una proposición atómica tiene el mismo valor de certeza cada vez que se presenta dentro de una proposición molecular. Si **P** se presenta más de una vez en una proposición particular, entonces no puede ser cierta en un caso y falsa en el otro. Si es falsa, entonces es falsa cada vez que se presenta, y si es cierta, entonces es cierta cada vez que se presenta.

¿Es la proposición $P \vee Q \rightarrow P$ una tautología? Para responder a esta cuestión se puede construir una tabla de certeza.

P	Q	P ∨ Q	P ∨ Q → P
C	C	C	C
C	F	C	C
F	C	C	F
F	F	F	C

En esta tabla se obtiene la tercera columna de las dos primeras en virtud de la regla práctica para las disjunciones. Se obtiene la última columna de la primera y la tercera en virtud de la regla práctica para condicionales. Si la proposición sugerida es una tautología ha de tener una «C» en cada línea de la cuarta columna. La letra «F» de falsedad en la tercera línea muestra que $P \vee Q \rightarrow P$ no es una tautología, pues la combinación de ser P falsa y Q ser cierta da lugar a la proposición $P \vee Q \rightarrow P$ que es falsa. La letra «F», en una única fila de la columna encabezada por la proposición en cuestión es suficiente para demostrar que la proposición no es una tautología.

Una definición formal de una tautología es:

> *Una proposición es una tautología si y sólo si permanece cierta para todas las combinaciones de asignaciones de certeza atribuidas a cada una de sus distintas proposiciones atómicas.*

El método de la tabla de certeza para determinar si una fórmula es una tautología utiliza esta definición. Independientemente de cuales sean las proposiciones atómicas que se sustituyan en una tautología, la proposición resultante será siempre cierta. Así se encuentra la «C» de certeza en cada línea de la columna final de la tabla, como en el ejemplo siguiente.

P	Q	$P \& Q$	$\neg(P \& Q)$	$P \vee \neg(P \& Q)$
C	C	C	F	C
C	F	F	C	C
F	C	F	C	C
F	F	F	C	C

EJERCICIO 2

A. Si P y Q son proposiciones atómicas distintas, ¿cuáles de las siguientes son tautologías? Utilizar tablas de certeza.

1. $P \leftrightarrow Q$
2. $P \leftrightarrow P \vee P$
3. $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$
4. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$
5. $(P \leftrightarrow P) \rightarrow P$
6. $P \vee Q \rightarrow P$
7. $P \& Q \rightarrow P \vee Q$
8. $\neg P \vee \neg Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$
9. $P \vee \neg Q \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$
10. $\neg P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$

B. Sean P, Q y R proposiciones atómicas distintas. Decidir mediante tablas de certeza cuáles de las proposiciones siguientes son tautologías.

1. $P \vee Q$
2. $P \vee \neg P$
3. $P \vee Q \rightarrow Q \vee P$
4. $P \rightarrow (P \vee Q) \vee R$
5. $P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$
6. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$
7. $[(P \rightarrow Q) \leftrightarrow Q] \rightarrow P$
8. $P \rightarrow [Q \rightarrow (Q \rightarrow P)]$
9. $P \& Q \rightarrow P \vee R$
10. $P \& Q \rightarrow (P \leftrightarrow Q \vee R)$

● 4.3 *Implicación tautológica y equivalencia tautológica*

Una proposición P se dice que *implica tautológicamente* una proposición Q si y sólo si la condicional $P \rightarrow Q$ es una tautología. Así, una *implicación tautológica es una tautología cuya forma es la de una proposición condicional.* La proposición «Pérez apuesta por los "Gigantes" y López apuesta por los "Universitarios"», tautológicamente implica «Pérez apuesta por los "Gigantes"». Ya que cualesquiera que sean las proposiciones P y Q, $P \& Q \rightarrow P$ es una tautología.

La noción de implicación tautológica es importante en el estudio de la validez de inferencias, pues cada ejemplo de inferencia proposicional puede expresarse como una implicación tautológica. Si se toman los ejemplos de inferencia que se encuentran a lo largo del Capítulo 2 se puede construir para cada uno de ellos una condicional cuyo antecedente es la conjunción de premisas y cuyo consecuente es la conclusión. Si la conjunción de las premisas es cierta, entonces la conclusión ha de ser cierta. Por lo tanto, a cada razonamiento proposicional corresponde una condicional y a cada condicional corresponde un razonamiento. *El razonamiento es válido si y sólo si la condicional correspondiente es una tautología.*

Para construir la condicional que corresponde a un razonamiento se ligan simplemente con & todas las premisas para formar la conjunción de premisas que es el antecedente, y después se pone la conclusión del razonamiento como consecuente, como en el siguiente ejemplo:

Razonamiento:

Demostrar: $R \& S$

(1) P

(2) $P \rightarrow Q$

(3) $\neg Q \vee (R \& S)$

Condicional correspondiente*

$$P \& (P \rightarrow Q) \& (\neg Q \vee (R \& S) \rightarrow R \& S$$

Por otra parte, si se desea construir el razonamiento para la condicional se escribe el consecuente como conclusión, y las diversas proposiciones cuya conjunción constituye el antecedente como las premisas del razonamiento.

* Algo en la forma $A \& B \& C$ no es estrictamente correcto, pues B no puede figurar a la vez como segundo miembro de una conjunción y primero de otra. Para ser perfectamente preciso se necesitaría escribir $(A \& B) \& C$ o $A \& (B \& C)$. Pero puesto que son lógicamente equivalentes, se puede omitir el paréntesis.

Una manera de hablar de un razonamiento es diciendo que las premisas *implican* la conclusión. Cuando se dice que es una *implicación tautológica,* se indica con ello que la condicional correspondiente es una tautología y, por tanto, el razonamiento válido. Debido a esta correspondencia ente el razonamiento y su condicional, las proposiciones condicionales se consideran frecuentemente como implicaciones. Esto es particularmente conveniente cuando se discuten implicaciones tautológicas.

EJERCICIO 3

A. Construir la condicional correspondiente a cada uno de los razonamientos siguientes.

1. Demostrar: R
   (1) $\neg$Q
   (2) $\neg$R $\rightarrow$ Q

2. Demostrar: $\neg$(P & $\neg$Q)
   (1) P $\rightarrow$ Q

3. Demostrar: $x=y \rightarrow x<z$
   (1) $x=y \rightarrow x=5$
   (2) $x=5 \rightarrow x<z$

4. Demostrar: $\neg$(A $\vee$ B)
   (1) C & $\neg$D
   (2) C $\rightarrow$ $\neg$A
   (3) D $\vee$ $\neg$B

B. Construir el razonamiento (premisas y conclusión) correspondientes a cada una de las condicionales siguientes.

1. P & (Q $\vee$ $\neg$P) $\rightarrow$ Q
2. $\neg(x<0 \;\&\; y\neq x) \rightarrow x\nless 0 \vee y=x$
3. (Q $\rightarrow$ T $\vee$ R) & $\neg$S & (R $\vee$ T $\rightarrow$ S) $\rightarrow$ (S $\rightarrow$ Q & $\neg$T)
4. (P $\rightarrow$ Q) & (P & $\neg$Q) $\rightarrow$ S

La regla de inferencia del *modus ponendo ponens,* considerada como una implicación tautológica, presenta la forma:

$$(P \rightarrow Q) \;\&\; P \rightarrow Q.$$

El antecedente de la condicional es la conjunción de ambas premisas. El consecuente es la conclusión.

Otra implicación tautológica es:

$$(P \rightarrow Q) \;\&\; \neg Q \rightarrow \neg P.$$

Se puede reconocer esta implicación tautológica como expresión de la inferencia conocida por el *modus tollendo tollens*. El antecedente es la conjunción de dos premisas $P \rightarrow Q$ y $\neg Q$, y el consecuente es la conclusión $\neg P$.

Se puede demostrar si un ejemplo cualquiera de inferencia proposicional es válido, expresando la inferencia como una condicional y determinando por medio de una tabla de certeza si esta condicional es o no tautológica. Si la implicación es tautológica, entonces la inferencia es válida. Si la implicación no es tautológica, entonces la inferencia es no válida. Recuérdese que la implicación que se ha escrito tiene como antecedente la conjunción de todas las premisas y como consecuente la conclusión. Un ejemplo de comprobación de validez por tabla de certeza, donde la inferencia es la del *modus tollendo tollens,* es:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q)\ \&\ \neg Q$	$(P \rightarrow Q)\ \&\ \neg Q \rightarrow \neg P$
C	C	F	F	C	F	C
C	F	F	C	F	F	C
F	C	C	F	C	F	C
F	F	C	C	C	C	C

La implicación que aparece en la última columna es una implicación tautológica, pues se ve que cada fila en esta columna tiene una C. Si la implicación es una tautología, entonces la inferencia que deduce $\neg P$ de las premisas $P \rightarrow Q$ y $\neg Q$ es una inferencia válida.

Dos proposiciones se dice que son *lógicamente equivalentes* si en cualquier posible asignación de certeza las dos tienen el mismo valor de certeza. Esto se puede ver mediante una tabla de certeza. Se considera P y $\neg\neg P$

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
C	F	C
F	C	F

Esta tabla indica que en cualquier línea P y $\neg\neg P$ son ambas ciertas o ambas falsas. En ningún caso es una cierta y otra falsa. Por tanto, son lógicamente equivalentes. A continuación se utiliza una tabla de certeza para comprobar la equivalencia de $A\ \&\ \neg B$ y $\neg(\neg A \vee B)$.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee B$	$\neg(\neg A \vee B)$	$A\ \&\ \neg B$
C	C	F	F	C	F	F
C	F	F	C	F	C	C
F	C	C	F	C	F	F
F	F	C	C	C	F	F

Comparando las dos últimas columnas línea a línea se ve que bajo la misma asignación de certeza (en cualquier línea) tienen el mismo valor de certeza, ambas ciertas o ambas falsas. Así se sabe que son lógicamente equivalentes.

Ejercicio 4

Utilizar tablas de certeza para determinar para cada uno de los pares de proposiciones siguientes si son lógicamente equivalentes.

1. $P \vee \neg Q$
   $Q \rightarrow P$

2. $x=1 \quad \vee \quad x \nless 3$
   $\neg(x<3 \quad \& \quad x=1)$

3. $P \vee \neg Q \rightarrow \neg P$
   $P \rightarrow \neg P \;\&\; Q$

4. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$
   $B \;\&\; \neg C \rightarrow \neg A$

Examinemos ahora la tabla de certeza para la bicondicional.

	P	Q	$P \leftrightarrow Q$
(1)	C	C	C
(2)	C	F	F
(3)	F	C	F
(4)	F	F	C

Se observa que en la línea (1) y en la línea (4), en las que P y Q tienen la misma asignación de certeza (ambas ciertas o ambas falsas), la bicondicional es cierta; y que en la línea (2) y en la línea (3), en las que una es cierta y la otra es falsa, la bicondicional es falsa. Por lo tanto, la bicondicional conduce a la afirmación que P es equivalente a Q puesto que $P \leftrightarrow Q$ es cierta siempre que tengan ambas los mismos valores de certeza, y falsa si sus valores de certeza son opuestos. Así, para cada par de proposiciones se puede construir una bicondicional colocando $\leftrightarrow$ entre ellas. Esta bicondicional es cierta siempre que las proposiciones tengan el mismo valor de certeza, y falsa cuando no lo tengan. Por esto, una bicondicional se denomina con frecuencia una *equivalencia.*

Ejercicio 5

Construir la condicional correspondiente a cada uno de los pares de proposiciones dadas en el Ejercicio 4.

Si dos proposiciones son lógicamente equivalentes, el valor de certeza de una es siempre el mismo que el valor de certeza de la otra, y su bicondicional correspondiente será *siempre* cierta. Se trata de una tautología. Por esta razón, proposiciones lógicamente equivalentes se llaman también proposiciones tautológicamente equivalentes y la bicondicional (o equivalencia) se denomina una equivalencia tautológica.

Esto proporciona un segundo método para determinar si dos proposiciones son lógicamente equivalentes: se construye la bicondicional correspondiente (equivalencia) y, por medio de la tabla de certeza se determina si la equivalencia resultante es una tautología (equivalencia tautológica).

EJERCICIO 6

Examinar las tablas de certeza para cada una de las bicondicionales construidas en el Ejercicio 5 y deducir de ellas si las proposiciones de cada uno de los pares en el Ejercicio 4 son tautológicamente equivalentes.

Ordinariamente no se usan las tablas de certeza para comprobar la validez de un razonamiento; en general se usa el método de deducción que se aprendió en el Capítulo 2. Hay dos razones poderosas para desarrollar la teoría de la inferencia proposicional y aplicar los métodos expuestos de llegar a las conclusiones a partir de premisas. Primero, excepto para las inferencias más simples, una tabla de certeza es muy grande y pesada de construir. Ya las tablas de certeza que contienen tres proposiciones atómicas resultan molestas porque tienen ocho combinaciones posibles de certeza o falsedad con las que hay que trabajar. La mayor parte de las deducciones que se presentan en seguida contienen más de tres proposiciones atómicas. Si un conjunto de premisas y la conclusión deseada contiene cinco proposiciones atómicas distintas, entonces la tabla de certeza adecuada ha de tener 32 líneas. No sólo tendría muchas líneas, sino que tendría también muchas columnas, porque en la mayoría de ejemplos de inferencia hay diversas premisas y no pocas proposiciones moleculares. Algunos de los ejemplos de inferencia para los cuales se puede deducir paso a paso una conclusión en 8 ó 9 líneas se necesitaría mucho más tiempo para demostrarlo por medio de una tabla de certeza. No sólo es aburrido el constuir una tabla tan masiva, sino que además es muy difícil el evitar equivocarse. Segundo, el método de la tabla de certeza sólo es adecuado para demostrar la validez de una cierta parte de los posibles razonamientos lógicos. Usaremos la teoría proposicional de inferencia desarrollada en el Capítulo 2 para poder continuar en el Capítulo 5 con otros tipos de inferencia lógica. La introducción de las tablas de certeza no es adecuada para las clases de razonamientos lógicamente válidos que se analizarán en los capítulos que siguen. Sin embargo, las tablas de certeza son un método general que puede ser utilizado siempre, para comprobar la validez o no validez de cualquier inferencia proposicional.

● 4.4 *Resumen*

Así como un diagrama de certeza, presentar los valores de certeza de una fórmula para una sola combinación de asignaciones de certeza para sus proposiciones atómicas, la tabla de certeza muestra los valores de certeza de la fórmula para todas las combinaciones posibles de asignaciones de certeza. Incluso con una tabla de certeza se puede hacer simultáneamente para varias fórmulas diferentes.

Para construir una tabla de certeza que dé todas las combinaciones posibles de asignaciones de certeza a *n* letras atómicas distintas, son necesarias 2^n líneas. Para cada letra atómica distinta se necesita una columna, y también se necesita una columna por cada término de enlace que se presente.

Una tautología es una proposición molecular cuya columna en una tabla de certeza no posee ninguna F.

Hay dos maneras de utilizar una tabla de certeza para determinar si un razonamiento es válido. El primero consiste en construir una tabla de certeza con una columna para cada premisa y la conclusión y analizar línea por línea para ver si la conclusión es cierta para cada línea en la que *todas* las premisas son ciertas. El otro método consiste en construir la condicional correspondiente y después utilizar una tabla de certeza para determinar si la condicional es una tautología (implicación tautológica).

Hay dos maneras de utilizar una tabla de certeza para determinar si dos proposiciones son lógicamente equivalentes. La primera consiste en construir una tabla de certeza con una columna para cada una de las proposiciones y después examinar la tabla línea por línea para ver si tienen siempre los mismos valores de certeza en cada línea. El otro método consiste en construir la correspondiente bicondicional y después utilizar la tabla de certeza para determinar si la bicondicional es una tautología (equivalencia tautológica).

EJERCICIO 7

Ejercicios de repaso

A. Se suponen conocidos los valores de certeza de las proposiciones atómicas en las proposiciones moleculares siguientes. Primero traducirlas totalmente en símbolos lógicos y después con aquellos valores de certeza utilizar diagramas de certeza para hallar los valores de certeza de cada proposición molecular. (Para los diagramas de certeza y las tablas de certeza todas las proposiciones atómicas, incluidas las proposiciones matemáticas, serán representadas por letras atómicas.)

1. Si dos y dos son cinco, entonces Colón no descubrió América y esto es un ejèrcicio lógico.
2. Si uno no es dos entonces, si dos por tres no son seis entonces, a la vez nueve menos cinco no es dos y uno es menor que dos.
3. Si no ocurre que la Luna está hecha de queso verde o que las vacas no tienen cuatro patas, entonces las finas vajillas chinas se rompen fácilmente si y sólo si se utilizan cucharas para comer.

B. Utilizar la tabla de certeza de las premisas y conclusión de cada uno de los razonamientos siguientes para decidir si es válido o no válido, aplicando el primer método de analizar línea por línea.

1. $(A \rightarrow B) \ \& \ (A \rightarrow C)$
   $\neg A$
   Por tanto: $\neg B \vee \neg C$
2. $(A \rightarrow B) \ \& \ (A \rightarrow C)$
   $\neg B \vee \neg C$
   Por tanto: $\neg A$

C. Determinar si los razonamientos siguientes son válidos, construyendo la condicional correspondiente y determinando por tablas de certeza si es una implicación tautológica.

1. $x \neq y \ \rightarrow \ x = y$
   Por tanto: $x = y$
2. $A \rightarrow B \ \& \ A$
   $B \vee \neg A \rightarrow C$
   Por tanto: $A \rightarrow C$

D. Sean A, B, y C tres proposiciones atómicas distintas cualesquiera. Decidir mediante tablas de certeza cuáles de las siguientes son tautologías.

1. $\neg(C \ \& \ \neg(D \vee C))$
2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$
3. $A \ \& \ B \rightarrow (A \leftrightarrow B \vee C)$
4. $x = 3 \ \ \& \ \ (x \neq y \ \rightarrow \ x \neq 3)$

E. Utilizando la proposición $P \ \& \ Q$ como premisa, determinar mediante tablas de certeza a cuáles de las siguientes implica tautológicamente.

1. P (Dar una tabla de certeza para $P \ \& \ Q \rightarrow P$, por ejemplo).
2. $P \ \& \ \neg Q$

3. $\neg P \vee Q$
4. $\neg Q \rightarrow P$
5. $P \leftrightarrow Q$

F. Utilizando la proposición $\neg P \vee Q$ como premisa determinar, mediante tablas de certeza, a cuáles de las siguientes implica tautológicamente.

1. P (Por ejemplo, dar una tabla de certeza para $\neg P \vee Q \rightarrow P$).
2. $Q \rightarrow P$
3. $P \rightarrow Q$
4. $\neg Q \rightarrow \neg P$
5. $\neg P \mathbin{\&} Q$

G. ¿Es la proposición P tautológicamente equivalente a alguna de las siguientes?

1. $P \vee Q$
2. $P \vee \neg P$
3. $\neg P \rightarrow P$
4. $P \rightarrow \neg P$
5. $Q \vee \neg Q \rightarrow P$

H. Algunas de las reglas de inferencia introducidas en el Capítulo 2 son implicaciones tautológicas y algunas son equivalencias tautológicas. Utilizar tablas de certeza para mostrar cuáles de las siguientes son implicaciones tautológicas y cuáles son equivalencias tautológicas:

1. Ley de simplificación
   (Ver si $P \mathbin{\&} Q \rightarrow P$ es una tautología y si $P \mathbin{\&} Q \leftrightarrow P$ es una tautología).
2. Ley de doble negación
   (Ver si $P \rightarrow \neg\neg P$ es una tautología y si $P \leftrightarrow \neg\neg P$ es una tautología).
3. Ley de adición
4. Leyes conmutativas.
5. La nueva ley: De $P \rightarrow Q$ se puede inferir $\neg(P \mathbin{\&} \neg Q)$.

Examen de repaso

I. En los ejemplos siguientes, primero hacer la traducción a símbolos lógicos utilizando las letras dadas para las proposiciones atómicas, después utilizar los diagramas de certeza para hallar los valores de certeza de las proposiciones moleculares a partir de los valores de certeza dados de las proposiciones que son las partes.

«Franklin nació antes que Washington» (cierta).
«Washington nació en el siglo dieciocho» (cierta).
«John Quincy Adams nació antes que John Adams» (falsa).
«Lincoln vivió durante el mismo período que Franklin» (falsa).

a. Si Franklin nació antes que Washington, entonces John Quincy Adams no nació antes que John Adams.
b. Si, o Lincoln vivió durante el mismo período que Franklin o John Quincy Adams nació antes que John Adams, entonces Washington nació en el siglo dieciocho.
c. Si Lincoln no vivió durante el mismo período que Franklin, entonces o Washington no nació en el siglo dieciocho o John Quincy Adams nació antes que John Adams.

II. Utilizar tablas de certeza para hallar la validez o no validez de los siguientes razonamientos simbolizados:

a. $A \rightarrow B$
Por tanto: $\neg B \rightarrow \neg A$

b. $x<4$
Por tanto: $x=y \quad \vee \quad x<4$

c. $A \rightarrow (B \vee C)$
$C \ \& \ B \rightarrow C$
Por tanto: $A \rightarrow C$

d. $A \vee B$
Por tanto: A

III. Sean A, B, C, tres proposiciones atómicas distintas cualesquiera. Decidir mediante tablas de certeza cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías:

a. $A \vee \neg A$
b. $\neg A \ \& \ B \leftrightarrow (B \rightarrow A)$
(c.) $\neg(\neg A \vee B) \rightarrow \neg B \ \& \ A$
d. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
e. $[(A \rightarrow B) \leftrightarrow B] \rightarrow A$

IV. Mostrar mediante tablas de certeza cuáles de las siguientes son implicaciones tautológicas.

a. $\neg P \vee \neg Q \rightarrow \neg P \mathbin{\&} \neg Q$
b. $[(P \rightarrow Q) \mathbin{\&} (R \rightarrow P)] \rightarrow (R \rightarrow Q)$

V. Mostrar mediante tablas de certeza cuáles de las siguientes, son equivalencias tautológicas.

a. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
b. $P \leftrightarrow P \vee Q$
c. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg P \vee Q$