Tarea 9 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 24 de Mayo del 2017, Grupo B 23 de Mayo 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Utilizar residuos para evaluar las siguientes integrales

$$a)\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}dx, \qquad b)\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}, \qquad c)\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}.$$

sobre las circunferencias recorridas en sentido positivo. a)$|z-2|=2$, b)$|z|=4$.

2.- Calcule el valor principal de la integral

$$a)\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} \qquad , b)\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.$$

sobre las circunferencias recorridas en sentido positivo. a)$|z+2|=3$, b)$|z|=2$.

3.- Use el camino de la Fig. 1 para mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4.- Sean m y n enteros que cumplen $0 \le m < n$. Demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{2n}\csc\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right).$$

5.- Demostrar la fórmula de integración

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left[(x^2-a^2)+1\right]^2} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}A^3}\left[(2a^2+3)\sqrt{A+a}+a\sqrt{A-a}\right]$$

donde a es un número arbitrario y $A=\sqrt{a^2+1}$.

6.- Calcular las siguientes integrales

$$a)\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^4+4}dx \ (a>0), \qquad b)\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)(x^2+4)}dx, \qquad c)\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{(x+a)^2+b^2}dx \ (b>0).$$

7.- Resuelva los incisos para mostrar las integrales de fresnel

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

a) Integrando la función e^{iz^2} sobre el contorno $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le \pi/4$, probar que

$$\int_0^R \cos x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-r^2}dr - \mathrm{Re}\int_{C_R} e^{iz^2}dz, \qquad \int_0^R \sin x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-r^2}dr - \mathrm{Im}\int_{C_R} e^{iz^2}dz$$

b) Demostrar que el valor de la integral sobre C_R del inciso anterior tiende a cero cuando $R\to\infty$, obteniendo la desigualdad

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}dz\right| \le \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin\phi}d\phi$$

y usando la desigualdad de Jordan.

c) Terminar la demostración usando los incisos a) y b) junto con la integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$